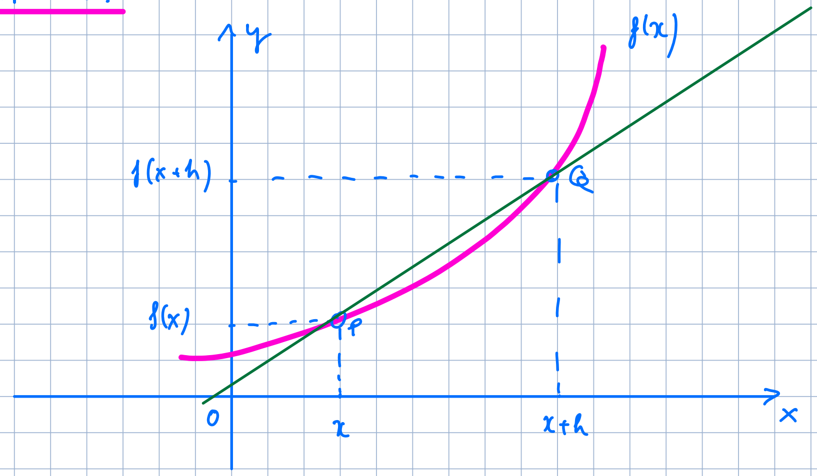
Dérivées

1) Définition :



$P(x\,;\,f(x))$; $Q(x+h\,;\,f(x+h))$

Soit f est une fonction et $P(x\,;\,f(x))$ un point du graphe f.

=> On appelle dérivée de la fonction f en x, que l'on note $f'(x)$, la pente de la tangente au graphe de f au point $P(x\,;\,f(x))$, pour autant qu'elle existe.

* Soit $Q(x+h\,;\,f(x+h))$ un point du graphe de f au voisinage de P.

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+h-x \\ f(x+h)-f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ f(x+h)-f(x) \end{pmatrix}$$

$m =$ pente $= \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ la pente de la droite PQ

=> plus le point Q se rapproche du point P, plus la droite PQ se rapproche de la tangente au graphe de f au point P.

Par conséquent, la dérivé de la fonction f au point $P(x\,;\,f(x))$ est donnée par :

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$ pour autant que cette limite existe

=> $f'(x)$ est un nombre = la pente de la tangente à la courbe au point d'abcisse x.

$$\boxed{y = f'(x_0)\,x + h}$$

* Équation de la tangente t à la courbe $y = f(x)$ au point $P(a\,;\,f(a))$:

$$\boxed{y - f(a) = f'(a)(x-a)}$$

2) Exemples :

1) $f(x) = x$ $\Rightarrow f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} = 1$$

donc $f'(x) = (x)' = \underline{1}$

2) $f(x) = x^4$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2)^2 - x^4}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2)(x^2 + 2xh + h^2) - x^4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^4} + 2x^3h + x^2h^2 + 2x^3h + 4x^2h^2 + 2xh^3 + h^2x^2 + 2xh^3 + h^4 - \cancel{x^4}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4x^3h + 2x^2h^2 + 4xh^3 + 4x^2h^2 + h^4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(4x^3 + 2x^2h + 4xh^2 + 4x^2h + h^3)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} 4x^3 + 2x^2h + 4xh^2 + 4x^2h + h^3 = 4x^3 + 2x^2 \cdot 0 + 4x \cdot 0 + 4x^2 \cdot 0 + 0$$

$$= 4x^3$$

$\Rightarrow f'(x) = (x^4)' = \underline{4x^3}$

* Nombre dérivé d'une fonction en un point

Soit f une fonction définie dans un intervalle ouvert contenant une valeur a.

=> le nombre dérivé de la fonction f au point a est la limite :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$ si elle existe et est finie.

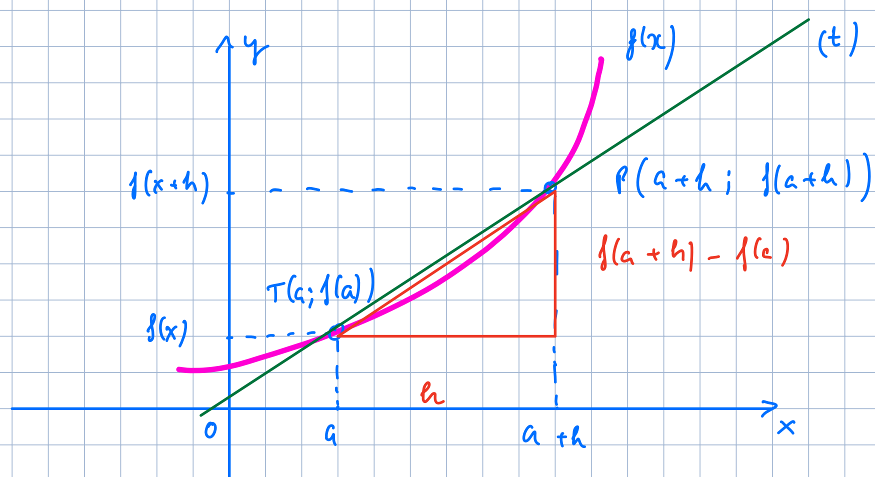
Si elle existe, le nombre dérivé de f au point a est noté $f'(a)$.

* Remarque :

a) s'il existe, le nombre dérivé $f'(a)$ représente la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point d'abscisse a, donc au point $T(a\,;\,f(a))$.

b) En posant $x = a + h$, il est possible de calculer $f'(a)$ de la manière suivante :

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$



Exercices : 2.8.1 , 2.8.2

3) Fonction dérivable d'un point :

Soit f une fonction définie dans un voisinage d'un point x_0.

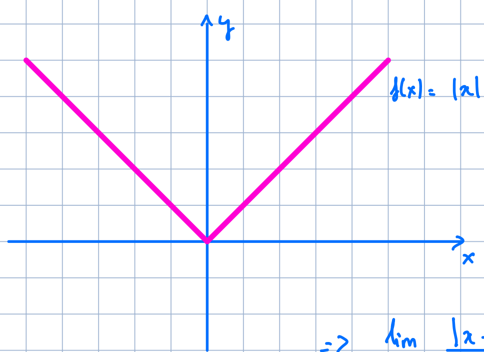
f est dérivable en x_0 si le nombre dérivé $f'(x_0)$ existe.

On parle aussi de fonction dérivable à gauche et à droite.

* **Exemple** :

Soit $f(x) = |x|$, f est continue sur $\mathbb{R}$

=> Calculer, s'il existe, $f'(0)$



$f'(0) = ?$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} \overset{FI}{=}$$

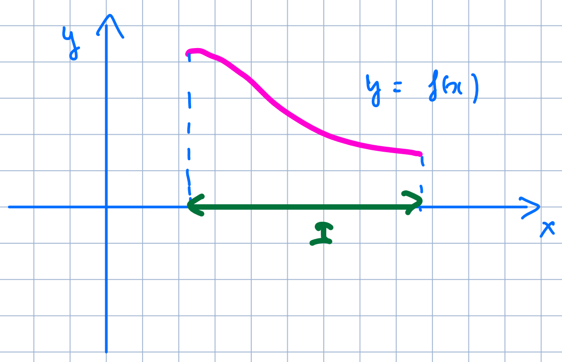
$$\left.\begin{array}{l} * \ \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{|h|}{h} = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{-h}{h} = -1 \\ * \ \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{|h|}{h} = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{h}{h} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0) \text{ n'existe pas}$$

=> Une fonction qui est continue en un point mais n'est pas forcément dérivable en ce point.

=> Par contre, une fonction dérivable en un point est continue en ce point

4) Fonction dérivable sur un intervalle :

Une fonction est dérivable sur un intervalle ouvert I si elle est dérivable en tout point de I.



5) Fonction dérivée :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction :

$$f' : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f'(x) \end{array}$$

est appelée fonction dérivée de f sur I

* **Exemple :**

Donner l'ensemble de définition des fonctions ci-dessous, calculer leur dérivée et donner l'ensemble de définition de celle-ci.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$

6) Les règles de dérivation :

Rappel :

La dérivé d'une fonction f est la fonction f' définie par :

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

Cette méthode reposant toujours sur un calcul de limites n'est pas très efficace.

$\Rightarrow$ 7 règles de dérivation

a) 1ère règle : La dérivé d'une puissance

Pour dériver x à une certaine puissance, on passe la puissance devant, on reproduit x et on descend la puissance d'un cran.

$$\boxed{f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n\,x^{n-1}}$$

b) 2ème règle : La dérivée d'un nombre vaut 0

$$\boxed{f(x) = \text{nombre} \Rightarrow f'(x) = 0}$$

c) 3ème règle

Pour dériver une expression du type " un nombre fois une fonction", on garde le nombre et on dérive la fonction.

$$\boxed{f(x) = \text{nombre} \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = \text{nombre} \cdot g'(x)}$$

d) 4$^{\text{ème}}$ règle : La dérivée d'une somme (soustraction)

La dérivée d'une somme est la somme des dérivées.

La dérivée d'une soustraction est la soustraction des dérivées.

$$\boxed{f(x) = g(x) \pm h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \pm h'(x)}$$

e) 5$^{\text{ème}}$ règle : La dérivée d'une multiplication

La dérivée d'une multiplication n'est pas la multiplication des dérivées !

⇒ Il s'agit de la dérivée de la première fois la deuxième + la première fois la dérivée de la seconde.

$$\boxed{f(x) = g(x) \cdot h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)}$$

f) 6$^{\text{ème}}$ règle : La dérivée d'une fraction

La dérivée d'une fraction consiste en :

- dériver la première · la deuxième − la première · la dérivée de la seconde, le tout divisé par le carré de la seconde.

$$\boxed{f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h^2(x)}}$$

g) 7$^{\text{ème}}$ règle : La dérivée d'une parenthèse

On passe la puissance devant, on reproduit la parenthèse à une puissance un cran inférieur et on multiplie le tout par la dérivée du contenu de la parenthèse.

$$\boxed{f(x) = \left(g(x)\right)^n \Rightarrow f'(x) = n\left(g(x)\right)^{n-1} \cdot g'(x)}$$

* Exercice :

(1) Soit f et g deux fonctions dérivables.

Montrer que : $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

$$\Rightarrow (f+g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{} + \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{}$$

$$(f+g)' = f'(x) + g'(x) \quad \text{cqfd}$$

(2) Montrer que : $(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

$$(f\cdot g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f\cdot g)(x+h) - (f\cdot g)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\, g(x+h) - f(x)\, g(x+h) + f(x)\, g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)\left(f(x+h) - f(x)\right) + f(x)\left(g(x+h) - g(x)\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{[f(x+h) - f(x)]\, g(x+h)}{h} + \frac{[g(x+h) - g(x)]\, f(x)}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) g(x+h) + \lim_{h\to 0} \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right) f(x)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} g(x+h) + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} f(x)$$

$$= f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) \qquad \text{cqfd}$$

* **Dérivée des fonctions trigonométriques :**

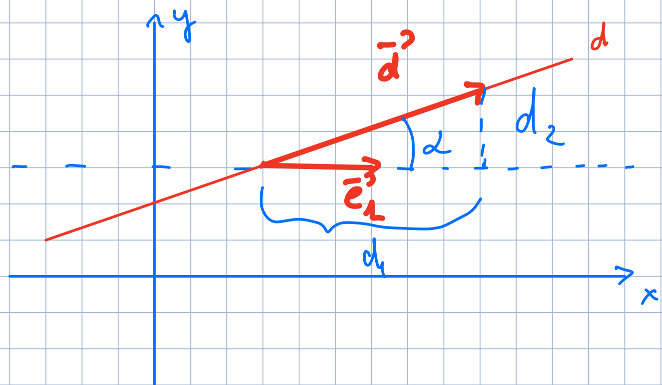
$$\left(\sin(x)\right)' = \cos(x)$$

$$\left(\cos(x)\right)' = -\sin(x)$$

$$\left(\tan(x)\right)' = \frac{1}{\cos^2(x)} = \tan^2(x) + 1$$

Angle de deux droites

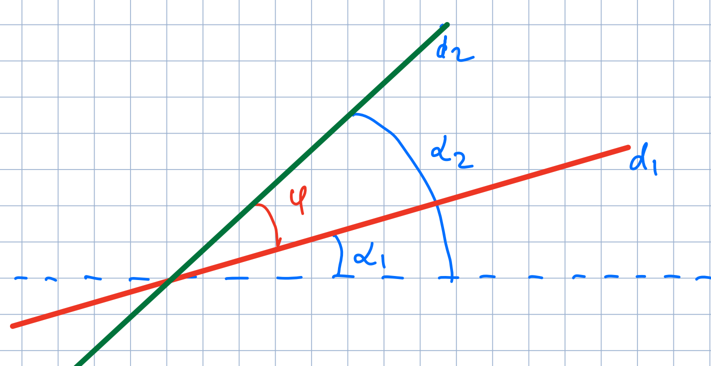
On appelle <u>angle directeur</u> d'une droite d tout angle entre $\vec{e_1}$ et un vecteur directeur $\vec{d}$ de d.



1) Soit une droite d de pente m et d'angle directeur α. Quel lien y-a-t-il entre m et α ?

2) Soit deux droites d_1 et d_2 de pentes respectives m_1 et m_2 et d'angles directeurs respectifs α_1 et α_2. Montrer que l'angle orienté α entre les droites d_1 et d_2 est donné par :

$$\boxed{\tan(\varphi) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}}$$



$$\Rightarrow \quad \tan(\varphi) = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$$

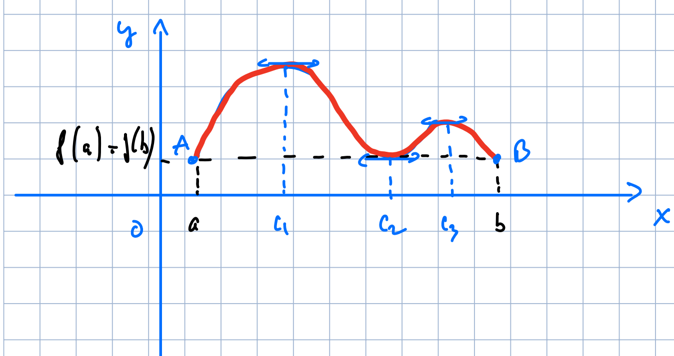
Croissance et convexité :

* **Théorème de Rolle :**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle fermé $[a;b]$ telle que $f(a) = f(b)$.

Alors il existe au moins un nombre c dans l'intervalle $]a;b[$ tel que :

$$f'(c) = 0$$



En d'autres termes, entre les points A et B de même ordonnée, il existe au moins un point du graphe à tangente horizontale.

* On dit qu'une fonction f admet un maximum local en c s'il existe un intervalle ouvert I contenant c tq $f(x) \leq f(c)$ pour tout $x \in I \cap D_f$.

* On dit qu'une fonction f admet un minimum local en c s'il existe un intervalle ouvert I contenant c tq $f(x) \geq f(c)$ pour tout $x \in I \cap D_f$.

$\Rightarrow$ On appelle extremum local un maximum local ou un minimum local.

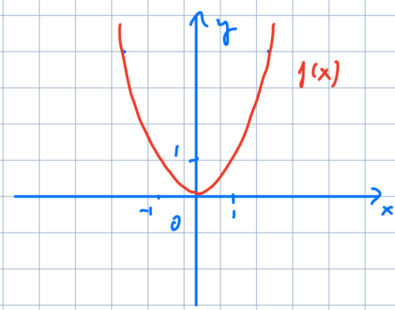
* La preuve du théorème de Rolle a montré le corollaire suivant.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle fermé $[a;b]$. Si f admet un extremum local en $c \in]a;b[$, alors $f'(c) = 0$

Exemple :

Résoudre l'équation $f'(x) = 0$. La fonction f admet-elle un extremum local ?

1) $f(x) = x^2$ 2) $f(x) = x^3$ 3) $f(x) = x^3 - x^2$

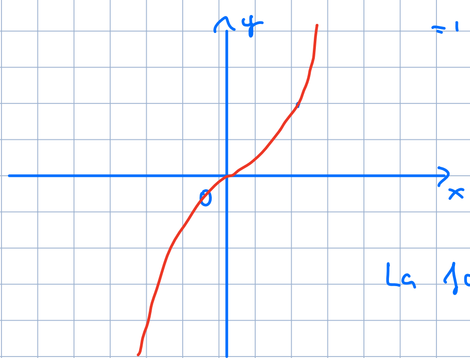


1) $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow$ La fonction f admet un minimum absolu en 0

2) $f(x) = x^3$



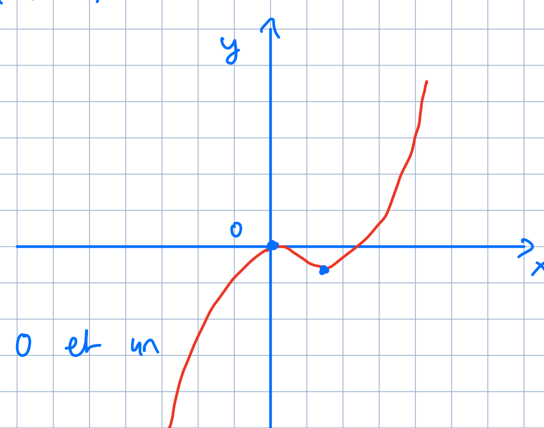
$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

La fonction admet un point critique (replat) en 0

3) $f(x) = x^3 - x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(3x-2) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x = \frac{2}{3}$

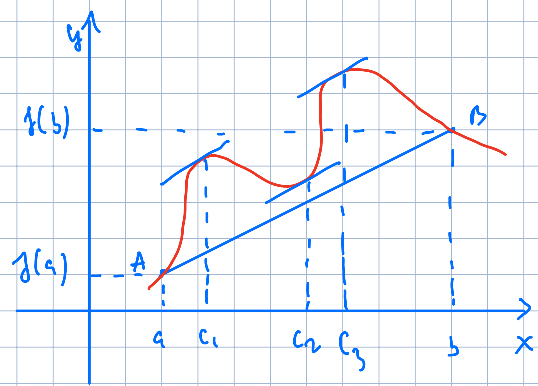


La fonction f admet un maximum local en 0 et un minimum local en $\frac{2}{3}$

* Théorème des accroissements finis :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle fermé $[a;b]$, alors il existe au moins un nombre c dans l'intervalle $]a;b[$ tq :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$



En d'autres termes, entre A et B, il existe au moins un point du graphe où la tangente est parallèle à la sécante AB.

=> Corollaire :

Si f est fonction dérivable sur un intervalle I et si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est constante sur I.