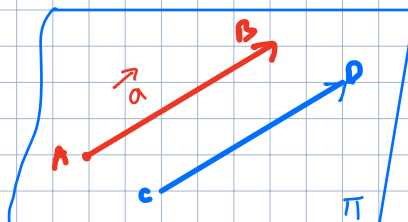


Géométrie vectorielle et analytique

(A) Vecteurs

1) Définition

- Soit π l'ensemble des points du plan.
- Soit A et B deux points. Nous avons une flèche d'origine A et d'extrémité B .

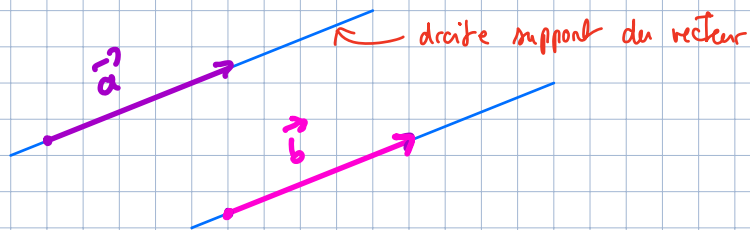


- Cette flèche a une direction, un sens et une longueur (la norme).
 - La direction de la flèche est donnée par la droite AB .
- => Un vecteur est l'ensemble de toutes les flèches équivalentes qui définissent la même translation. Chaque flèche est un représentant du vecteur.
- Sans référence à un représentant, un vecteur se note par une lettre minuscule munie d'une flèche : $\vec{v}, \vec{w}, \vec{a}, \dots$. L'origine et l'extrémité d'une flèche représentant un vecteur sont aussi utilisées pour le désigner : $\vec{AB}, \vec{BC}, \dots$
 - On note $\|\vec{v}\|$ la norme d'un vecteur.
 - Dans le cas particulier où l'origine et l'extrémité de la flèche représentant un vecteur sont confondues, il n'y a pas de déplacement et la translation correspondante est l'identité. Par extension, on définit le vecteur nul comme le vecteur de norme nulle dont la direction et le sens ne sont pas définis. On le note $\vec{0}$ ou $\vec{AA} = \vec{BB} = \vec{CC} = \dots$

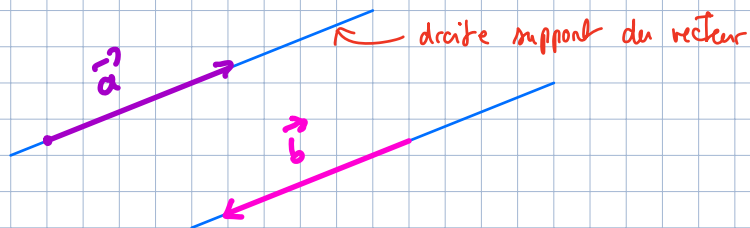
2) Vecteurs égaux et vecteurs opposés

a) On dit que deux vecteurs sont égaux s'ils définissent la même translation du plan ou de l'espace, soit s'ils ont :

- + la même longueur
- + des droites supports qui sont parallèles ou confondues
- + le même sens



b) Deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont dits opposés s'ils ont même direction, même longueur mais de sens contraire, on note $\vec{a} = -\vec{b}$



3) Addition des vecteurs

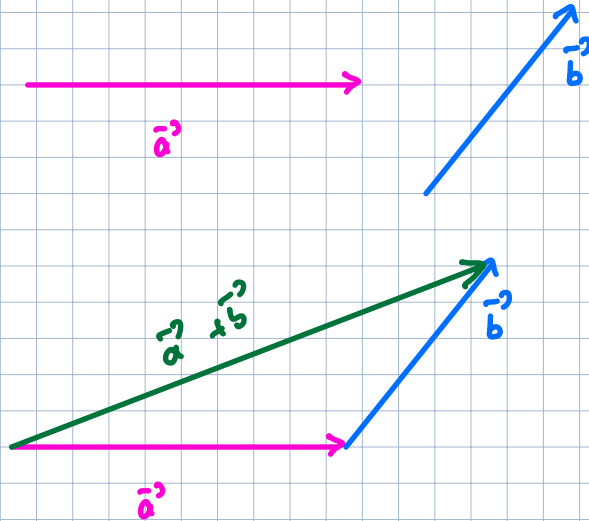
On considère deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

La somme des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est le vecteur correspondant à la composition des deux translations $\vec{a}$ et $\vec{b}$. On le note $\vec{a} + \vec{b}$

=> Deux méthodes pour additionner des vecteurs :

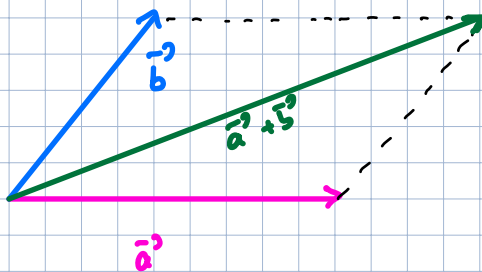
a) Méthode du triangle :

=> On transporte l'origine du vecteur $\vec{b}$ à l'extrémité du vecteur $\vec{a}$.



b) Méthode du parallélogramme :

=> On fait coïncider les origines des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.



c) Soustraction de deux vecteurs :

On définit la soustraction vectorielle comme l'addition du vecteur opposé :

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = -\vec{b} + \vec{a}$$



5) Propriétés de l'addition des vecteurs

a) L'addition est commutative : $\vec{b} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{b}$

b) L'addition est associative : $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

c) Le vecteur nul $\vec{0}$ est un élément neutre pour l'addition :

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$

pour n'importe quel vecteur $\vec{a}$

d) À tout vecteur $\vec{a}$ est associé son vecteur opposé, noté $-\vec{a}$, de même direction, de sens contraire et de même norme que $\vec{a}$:

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

e) Si $\vec{a} = \vec{AB}$, alors l'opposé de $\vec{a}$ est donné par $-\vec{a} = \vec{BA}$

En résumé, ces quatre propriétés (de a à d) signifient que l'ensemble des vecteurs, muni de l'addition vectorielle, forme un groupe commutatif (ou un groupe abélien - du nom de Niels Abel, 1802 - 1829, mathématicien norvégien).

6) Propriété de la soustraction de deux vecteurs

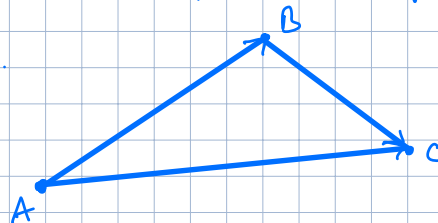
Le vecteur $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$ différence des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ vérifie l'égalité suivante :

$$\vec{x} + \vec{b} = \vec{a}$$

7) Relation de Chasles (Michel Chasles, 1793 - 1880, mathématicien français)

Soient A, B, C des points quelconques.

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$



* Exemples :

$$a) \vec{AB} + \vec{DE} + \vec{BD} = \vec{AB} + \vec{BD} + \vec{DE} = \vec{AD} + \vec{DE} = \vec{AE}$$

$$b) \vec{BC} - \vec{DE} - \vec{AD} = \vec{BC} + \vec{ED} + \vec{DB} = \vec{BC} + \vec{EB} = \vec{EB} + \vec{BC} = \vec{EC}$$

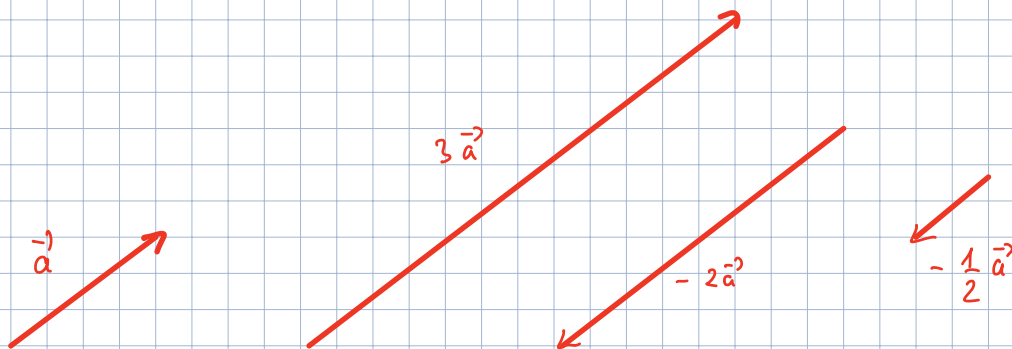
8) Produit d'un vecteur par un scalaire

Soient $k \in \mathbb{R}$ et $\vec{a}$ un vecteur. Le produit du vecteur $\vec{a}$ par le scalaire k , noté $k\vec{a}$ est le vecteur caractérisé par :

- la direction du vecteur $\vec{a}$;
- le sens du vecteur $\vec{a}$ si $k > 0$ et le sens contraire si $k < 0$;
- une norme égale au produit de celle du vecteur $\vec{a}$ par la valeur absolue de k ;

$$\|k\vec{a}\| = |k| \|\vec{a}\|$$

* Exemples :



* Propriétés du produit d'un vecteur par un scalaire :

$$a) 1\vec{a} = \vec{a} \quad \text{et} \quad (-1)\vec{a} = -\vec{a}$$

$$b) k(m\vec{a}) = (km)\vec{a}$$

$$c) k\vec{a} + m\vec{a} = (k+m)\vec{a}$$

$$d) k\vec{a} + k\vec{b} = k(\vec{a} + \vec{b})$$

$$e) \quad k(-\vec{a}) = (-k)\vec{a} = -(k\vec{a})$$

$$f) \quad 0\vec{a} = \vec{0}$$

$$g) \quad k\vec{0} = \vec{0}$$

En résumé, l'ensemble des vecteurs, muni de l'addition vectorielle et de la multiplication d'un vecteur par un scalaire, forme un espace vectoriel.

9) Vecteurs colinéaires

- Deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ non nuls sont dits colinéaires (ou linéairement dépendants) s'ils ont même direction.
- Deux vecteurs non colinéaires sont dits linéairement indépendants.

* Théorème :

Deux vecteurs non nuls $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires (de même direction) si et seulement s'il existe un scalaire non nul k tel que :

$$\vec{a} = k\vec{b}$$

10) Combinaisons linéaires de vecteurs

On dit qu'un vecteur $\vec{v}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ s'il existe des scalaires k et m tels que :

$$\vec{v} = k\vec{a} + m\vec{b}$$

On définit de même une combinaison linéaire de trois vecteurs ou plus.

* Remarque :

Deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils sont colinéaires.

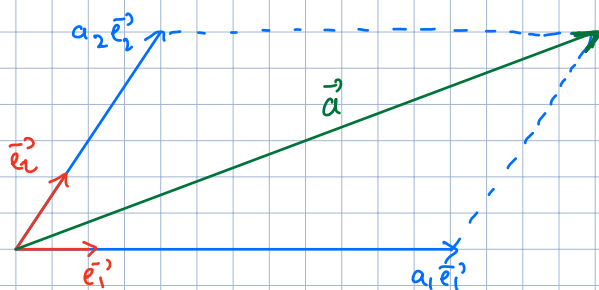
③ Bases

1) Bases de l'ensemble des vecteurs du plan

Une basis de l'ensemble V_2 des vecteurs du plan est un couple de vecteurs non colinéaires $B = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$.

Toute combinaison linéaire $a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$ détermine un unique vecteur $\vec{a}$ du plan.

Réciproquement, tout vecteur $\vec{a}$ du plan se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$.

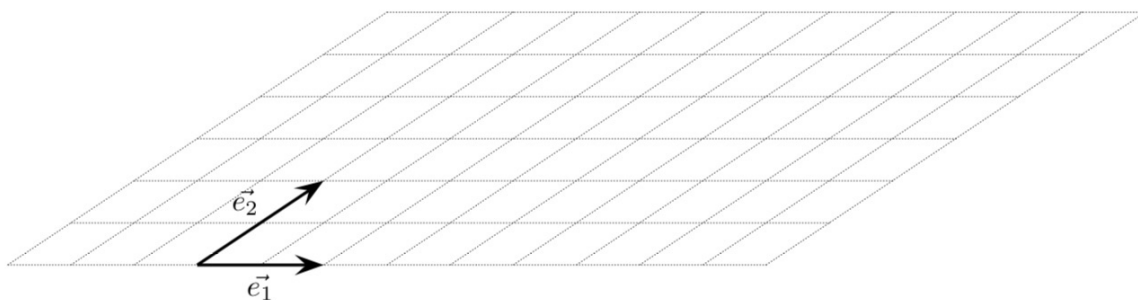


$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 \Leftrightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

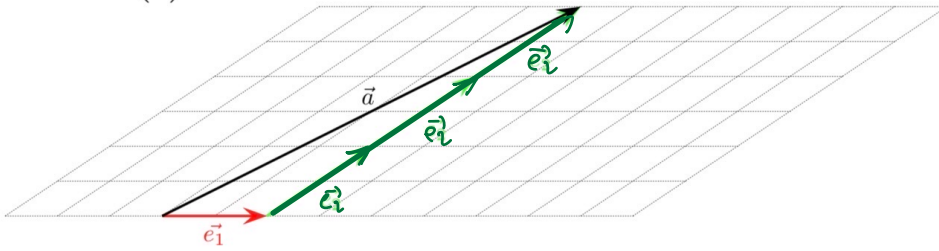
Les nombres réels a_1 et a_2 s'appellent les composantes du vecteur $\vec{a}$ dans la base $B = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$.

* Exemple :

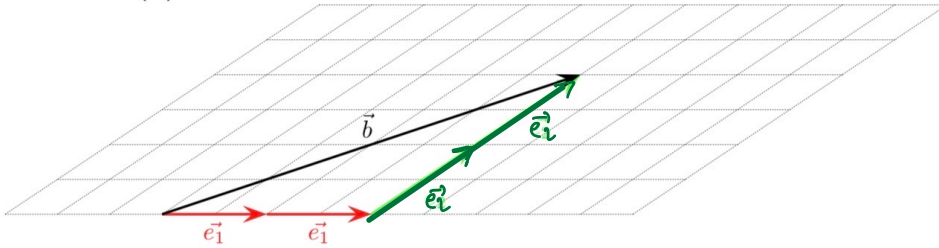
Représenter dans la base $B = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$
 $\vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$



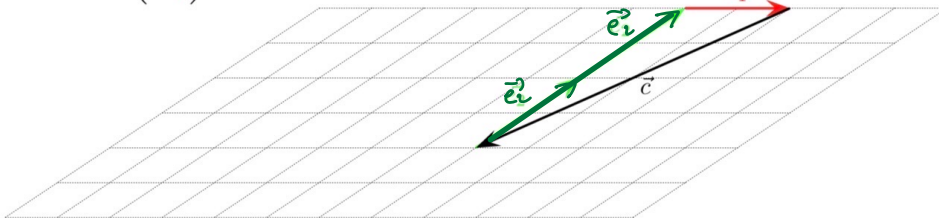
$$1) \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \vec{a} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$$



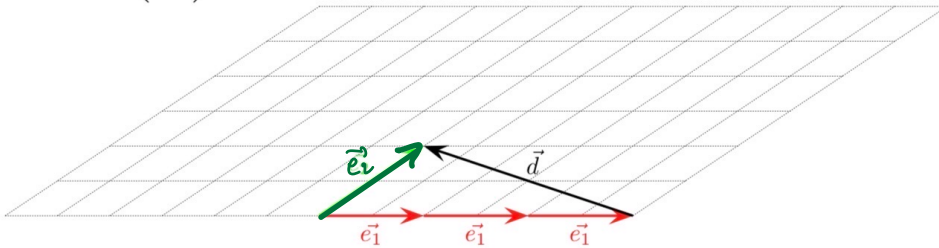
$$2) \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \vec{b} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$$



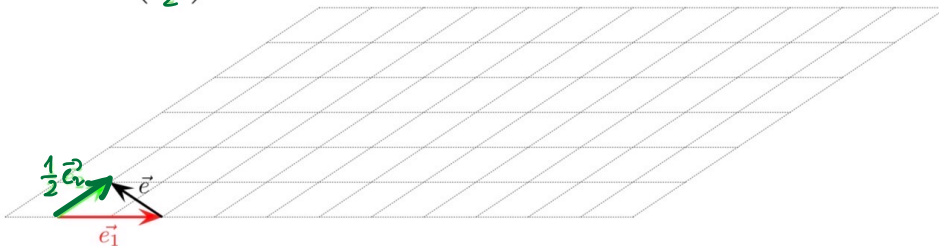
$$3) \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \iff \vec{c} = -\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$$



$$4) \vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \vec{d} = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$$



$$5) \vec{e} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \iff \vec{e} = -\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2$$



2) Opérations avec les composantes

* Proposition :

Soient deux vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ du plan donnés par leurs composantes dans une base $B = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ et un nombre réel λ . Alors :

$$i) \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$$

$$ii) \quad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

L'addition des vecteurs est l'addition des composantes.

$$iii) \quad \lambda \vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}.$$

Le produit d'un vecteur par un scalaire est le produit des composantes par le scalaire.

* Preuve :

i) Cette propriété se déduit de l'unicité des composantes.

$$\begin{aligned} ii) \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} &= (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) + (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2) \\ &= (a_1 + b_1) \vec{e}_1 + (a_2 + b_2) \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$iii) \quad \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) = \lambda a_1 \vec{e}_1 + \lambda a_2 \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$$

3) Critère pour déterminer si deux vecteurs de V_2 sont colinéaires

sat $\vec{a}' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b}' = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$\vec{a}'$ et $\vec{b}'$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$k \vec{a}' = \vec{b}' \Leftrightarrow k \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ka_1 = b_1 \\ ka_2 = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} a_1 \neq 0 \\ a_2 \neq 0 \end{matrix} \begin{cases} k = \frac{b_1}{a_1} \\ k = \frac{b_2}{a_2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$$

$$\Leftrightarrow a_1 b_2 = a_2 b_1 \Leftrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

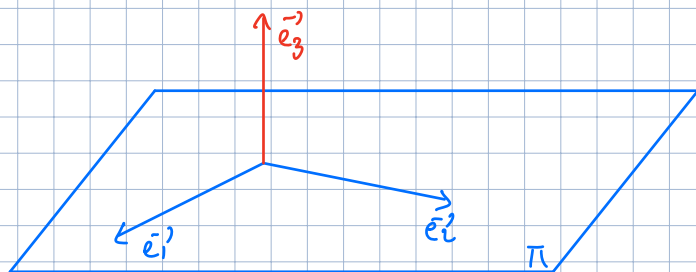
La dernière expression s'écrit :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

(déterminant d'une matrice 2×2)

4) Base de V_3

$B = (\vec{e}_1'; \vec{e}_2'; \vec{e}_3')$ est une base de V_3 si $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$ et $\vec{e}_3'$ ne sont pas coplanaires.



π est le plan vectoriel engendré par $\vec{e}_1'$ et $\vec{e}_2'$

Si $\vec{e}_3'$ n'appartient pas à π , alors B est une base.

* Soit $\vec{a}' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, toute combinaison linéaire $a_1 \vec{e}_1' + a_2 \vec{e}_2' + a_3 \vec{e}_3'$

détermine un unique vecteur $\vec{a}'$ de l'espace.

* Réciproquement, tout vecteur $\vec{a}'$ de l'espace se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ et $\vec{e}_3'$

$$\vec{a}' = a_1 \vec{e}_1' + a_2 \vec{e}_2' + a_3 \vec{e}_3' \quad (\Rightarrow) \quad \vec{a}' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Les nombres réels a_1, a_2 et a_3 s'appellent les composantes du vecteur $\vec{a}'$ dans la base $B = (\vec{e}_1'; \vec{e}_2'; \vec{e}_3')$

5) Vecteurs coplanaires

$\vec{a}', \vec{b}'$ et $\vec{c}'$ sont coplanaires si l'un d'eux est une combinaison linéaire des deux autres.

Par exemple : $k \vec{a}' + t \vec{b}' = \vec{c}'$, $k, t \in \mathbb{R}$

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 2\vec{a}' + \vec{b}' = \vec{c}' \quad \Rightarrow \quad \vec{a}', \vec{b}' \text{ et } \vec{c}' \text{ sont coplanaires.}$$

6) Critère pour déterminer si 3 vecteurs sont coplanaires

$$\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}' \text{ coplanaires} \Leftrightarrow \det(\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}') = 0$$

(C) Repères et coordonnées

1) Repères dans le plan :

- Un repère du plan est formé d'un point O du plan et d'une base $B = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ du plan vectoriel. On appelle O l'origine et $B = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$ la base associée du repère.
- Les coordonnées d'un point A du plan relativement à un repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ sont les composantes du vecteur $\vec{OA}$ relativement à la base associée $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$.

$$A(a_1; a_2) \Leftrightarrow \vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

a_1 est la première coordonnée ou abscisse du point A ;

a_2 est la deuxième coordonnée ou ordonnée du point A .

2) Repères dans l'espace :

- Un repère de l'espace est formé d'un point O du plan et d'une base $B = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$ de l'espace vectoriel. On appelle O l'origine et $B = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$ la base associée du repère.
- Les coordonnées d'un point A de l'espace relativement à un repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ sont les composantes du vecteur $\vec{OA}$ relativement à la base associée $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$.

$$A(a_1; a_2; a_3) \Leftrightarrow \vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

a_1 est la première coordonnée ou abscisse du point A ;

a_2 est la deuxième coordonnée ou ordonnée du point A ;

a_3 est la troisième coordonnée ou cote du point A .

3) L'espace affine :

L'espace muni d'un repère est appelé l'espace affine. Les calculs avec coordonnées et composantes dans l'espace affine sont analogues à ceux effectués dans le plan.

* Composantes du vecteur $\vec{AB}$

Si $A(a_1; a_2; a_3)$ et $B(b_1; b_2; b_3)$ sont deux points exprimés dans un repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$, on a :

Règle de Chasles : $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$

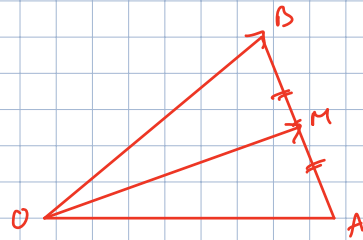
(D) Milieu d'un segment et centre de gravité d'un triangle

1) Dans le plan :

* Milieu M du segment AB

i) Méthode vectorielle :

$$\vec{OM} = \frac{1}{2} \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{OB}$$



ii) Méthode analytique :

Relativement à un repère du plan, si $A(a_1; a_2)$ et $B(b_1; b_2)$, on

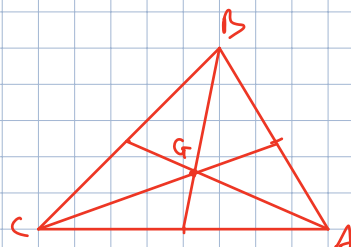
a :

$$M \left(\frac{a_1 + b_1}{2} ; \frac{a_2 + b_2}{2} \right)$$

* Centre de gravité G d'un Triangle :

i) Méthode vectorielle :

$$\vec{OG} = \frac{1}{3} \vec{OA} + \frac{1}{3} \vec{OB} + \frac{1}{3} \vec{OC}$$



ii) Méthode analytique :

Relativement à un repère du plan, si $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$ et $C(c_1; c_2)$, on a :

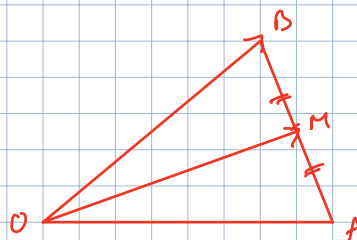
$$G \left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3} ; \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3} \right)$$

2) Dans l'espace :

* Milieu M du segment AB

i) Méthode vectorielle :

$$\vec{OM} = \frac{1}{2} \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{OB}$$



ii) Méthode analytique :

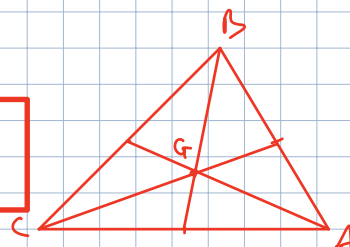
Relativement à un repère de l'espace, si $A(a_1; a_2; a_3)$ et $B(b_1; b_2; b_3)$, on a :

$$M \left(\frac{a_1 + b_1}{2} ; \frac{a_2 + b_2}{2} ; \frac{a_3 + b_3}{2} \right)$$

* Centre de gravité G d'un Triangle :

i) Méthode vectorielle :

$$\vec{OG} = \frac{1}{3} \vec{OA} + \frac{1}{3} \vec{OB} + \frac{1}{3} \vec{OC}$$



ii) Méthode analytique :

Relativement à un repère de l'espace, si $A(a_1; a_2; a_3)$, $B(b_1; b_2; b_3)$ et $C(c_1; c_2; c_3)$, on a :

$$G \left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3} ; \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3} ; \frac{a_3 + b_3 + c_3}{3} \right)$$

(E)

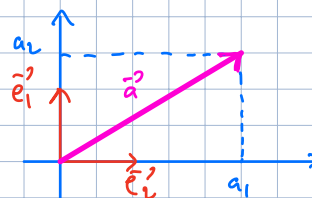
Norme :

Soit $\vec{a}$ un vecteur $\Rightarrow \|\vec{a}\|$ désigne la longueur d'un représentant du vecteur $\vec{a}$.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ un vecteur du plan.

Le théorème de Pythagore implique :

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$



* un vecteur $\vec{a}$ est dit unitaire s'il est de longueur 1, c-à-d si $\|\vec{a}\| = 1$.

* Une base $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ du plan est dite orthonormée si ses vecteurs sont unitaires et orthogonaux, c-à-d si $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1$ et si $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$.

* Un repère est dit orthonormé si la base associée est orthonormée.

F Produit scalaire

1) vecteurs orthogonaux :

Deux vecteurs $\vec{v}'$ et $\vec{w}'$ sont dits orthogonaux si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

a) $\vec{v}'$ ou $\vec{w}'$ est nul (ou les deux vecteurs sont nuls)

b) $\vec{v}'$ et $\vec{w}'$ ont des directions perpendiculaires.

* Propriétés de vecteurs orthogonaux :

$$\vec{v}' \perp \vec{w}' \Leftrightarrow \|\vec{v}' + \vec{w}'\|^2 = \|\vec{v}'\|^2 + \|\vec{w}'\|^2$$

2) produit scalaire de deux vecteurs :

- Soient $\vec{v}' = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}' = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{v}'$ et $\vec{w}'$, et on le note $\vec{v}' \cdot \vec{w}'$, le nombre :

$$\vec{v}' \cdot \vec{w}' = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2 \in \mathbb{R}$$

Le produit scalaire se définit relativement à une base orthonormée.

- Soient $\vec{v}' = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}' = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace

=> le produit scalaire des vecteurs $\vec{v}'$ et $\vec{w}'$:

$$\vec{v}' \cdot \vec{w}' = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 \in \mathbb{R}$$

* Propriétés du produit scalaire :

a) $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$

b) $\vec{v} \cdot (\vec{w} + \vec{t}) = \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{t}$

c) $\vec{v} \cdot (k\vec{w}) = (k\vec{v}) \cdot \vec{w} = k(\vec{v} \cdot \vec{w})$

d) $\vec{v} \cdot \vec{w} = \frac{1}{2} (\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2)$

e) La valeur du produit scalaire est indépendante de la base orthonormée choisie !

* Théorème : Condition d'orthogonalité

$$\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

3) Vecteurs orthogonaux à un vecteur donné du plan :

Relativement à une base orthonormée du plan, si $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, on a :

a) $\begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}$ sont les deux seuls vecteurs orthogonaux et de même norme que $\vec{v}$.

b) $\vec{m} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{m} = k \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$

c) Dans le plan, il existe une unique direction perpendiculaire à un vecteur donné.

4) Déterminant d'un couple de vecteurs du plan :

Soient $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, le déterminant du couple $(\vec{a}; \vec{b})$ est le nombre réel :

$$\det(\vec{a}; \vec{b}) = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

* Propriétés du déterminant de deux vecteurs du plan :

Soient $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$



a) L'aire d'un parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est donnée par :

$$A_{(\vec{a}; \vec{b})} = \left| \det(\vec{a}; \vec{b}) \right| = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right| = \left| a_1 b_2 - a_2 b_1 \right|$$

b) 2^{ème} critère de colinéarité dans le plan :

$$\vec{a} \text{ et } \vec{b} \text{ colinéaires } (\Rightarrow \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0)$$

* Equation cartésienne d'une droite :

Une droite est sous la forme cartésienne canonique si son équation est de la forme :

$$ax + by + c = 0$$

⇒ Le vecteur directeur de cette droite est donné par :

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

Exemple :

Déterminer l'équation cartésienne canonique de la droite (d) passant par A(2;0) et de vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \text{ où } a, b \text{ coefficients}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -b = 4 \\ a = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -4 \\ a = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (d) : -x - 4y + c = 0$$

↓
reste à déterminer $c = ?$

On sait que la droite (d) passe par A(2;0)

⇒ Les coordonnées de A vérifient l'équation de la droite (d)

$$\Rightarrow -2 - 4 \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 2$$

D'où l'équation de (d) :

$$-x - 4y + 2 = 0$$

ou

$$x + 4y - 2 = 0$$

* Équation cartésienne d'une droite :

=> la forme :

$$y = mx + h$$

où m s'appelle la pente de la droite et correspond au calcul :

$$m = \frac{\text{variation verticale}}{\text{variation horizontale}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

et h s'appelle ordonnée à l'origine et donne la hauteur à laquelle la droite coupe l'axe Oy .

Exemple : même exemple !

Déterminer l'équation cartésienne canonique de la droite (d) passant par $A(2;0)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ici, on va utiliser la pente !

Si on a un vecteur directeur de la droite (d) :

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{la pente} = m = \frac{d_2}{d_1}$$

$$\Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow m = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \text{droite } (d) : y = mx + h = -\frac{1}{4}x + h$$

↓
pente h à déterminer

on sait que (d) passe par $A(2; 0)$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{1}{4} \cdot 2 + h \Rightarrow h = \frac{1}{2}$$

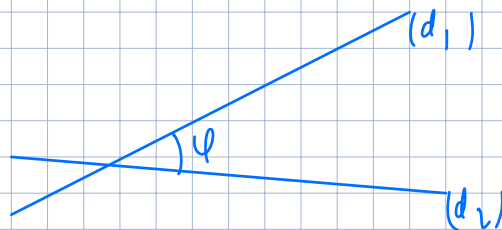
donc l'équation cartésienne de la droite (d) est :

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}x - y + \frac{1}{2} = 0 \quad | \cdot 4 \quad (\Rightarrow) \quad -x - 4y + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (d) : x + 4y - 2 = 0 \quad \text{est l'équation cartésienne canonique de la droite (d)}$$

* Angle entre deux droites :

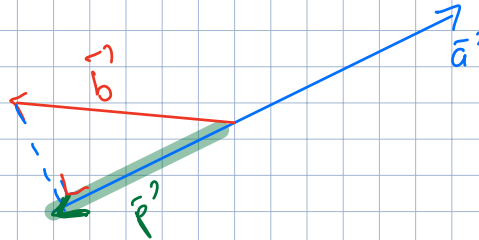


Soient deux droites (d₁) et (d₂) de pentes respectives m_1 et m_2

$\Rightarrow$ l'angle φ aigu entre deux droites est donné par :

$$\tan(\varphi) = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$$

* Projection orthogonale $\vec{p}'$ de $\vec{b}'$ sur $\vec{a}'$

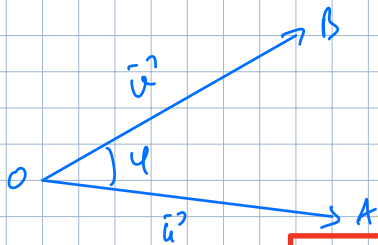


$$\vec{p}' = \frac{\vec{a}' \cdot \vec{b}'}{\|\vec{a}'\|^2} \cdot \vec{a}'$$

et la longueur de la projection orthogonale $\vec{p}'$ de $\vec{b}'$ sur $\vec{a}'$:

$$\|\vec{p}'\| = \frac{|\vec{a}' \cdot \vec{b}'|}{\|\vec{a}'\|}$$

* Le produit scalaire et angle :



$\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ sont 2 vecteurs non nuls
 $\Rightarrow \vec{OA} = \vec{u}'$, $\vec{OB} = \vec{v}'$

- * si $\vec{u}' \cdot \vec{v}' > 0 \rightarrow$ angle est aigu
- * si $\vec{u}' \cdot \vec{v}' = 0 \rightarrow$ angle est droit
- * si $\vec{u}' \cdot \vec{v}' < 0 \rightarrow$ angle est obtus