Ex 3.3.17 :

Déterminer la fonction dont le graphe est une parabole de sommet $S(1;2)$ tangente à la droite $y = x$.

$\Rightarrow$ Déterminer la fonction = Retrouver l'expression !

$\rightarrow$ parabole : $f(x) = ax^2 + bx + c$

ou sous forme canonique : $f(x) = a(x-k)^2 + \alpha$

où $S(k;\alpha)$: sommet S

coordonnées du sommet S

$\Rightarrow$ $f(x) = a(x-1)^2 + 2$

$\ast$ La parabole est tangente à la droite $y = x$

$\Rightarrow \quad a(x-1)^2 + 2 = x$

$\Leftrightarrow \quad a(x^2 + 1 - 2x) + 2 - x = 0$

$\Leftrightarrow \quad ax^2 + a - 2ax + 2 - x = 0$

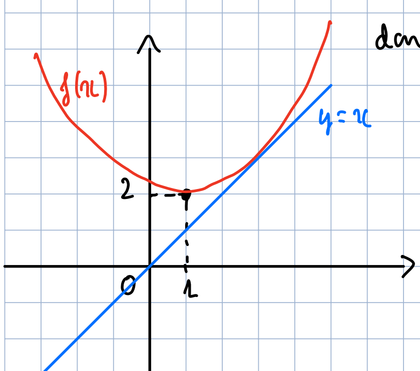
$\Leftrightarrow \quad ax^2 - x(2a+1) + a + 2 = 0$

La parabole est tangente à la droite $y = x \Rightarrow$ 1 seule solution

donc $\Delta = (2a+1)^2 - 4a \cdot (a+2) = 0$

$\cancel{4a^2} + 1 + 4a - \cancel{4a^2} - 8a = 0$

$\Rightarrow -4a = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$



donc $\boxed{f(x) = \frac{1}{4}(x-1)^2 + 2}$

Ex 3.3.19 :

$$x^2 + mx + 3 = x$$

$\Rightarrow \quad x^2 + mx - x + 3 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + x(m-1) + 3 = 0$

pour avoir exactement une solution $\Rightarrow \Delta = 0$

$\Rightarrow \quad \Delta = (m-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = (m-1)^2 - 12 = 0$

$\Rightarrow \quad (m-1)^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad m - 1 = \pm \sqrt{12}$

$\Rightarrow \quad m = 1 \pm 2\sqrt{3}$

Donc $\boxed{m_1 = 1 - 2\sqrt{3} \quad \text{et} \quad m_2 = 1 + 2\sqrt{3}}$

Ex 3.3.20 :

$m = ?$ $\quad f(x) = x^2 + mx + 5$ est tangente à $y = -4$

" tangente " $\Leftrightarrow \quad f(x) = y = -4$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + mx + 5 = -4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + mx + 9 = 0$

" tangente " $\Leftrightarrow$ une solution $\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$

$\Rightarrow \quad m^2 - 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \pm 6$

- $m = -6 \quad \Rightarrow \quad f(x) = x^2 - 6x + 5$

$\Rightarrow$ point de contact : $\quad f(x) = -4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 5 = -4$

$\Rightarrow \quad x^2 - 6x + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 36 - 4 \cdot 9 = 0$

$\Rightarrow \quad x = \frac{6}{2} = 3 \quad \Rightarrow \quad y = -4$

$\rightarrow A(3; -4)$

• $m = 6 \Rightarrow f(x) = x^2 + 6x + 5$

$\Rightarrow$ point de contact : $x^2 + 6x + 5 = -4$

$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0$

$\Delta = 36 - 36 = 0$

$\Rightarrow x = -\frac{6}{2} = -3 \Rightarrow y = -4$

$\Rightarrow B(-3; -4)$

Donc deux points de contact sont : $\boxed{A(3; -4) \text{ et } B(-3; -4)}$

Ex 3.3.21 :

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

$= x^2(x+2) - 1(x+2)$

$= (x+2)(x^2-1)$

1) Zéros : $\boxed{f(x) = (x+2)(x^2-1)} = 0$

$x = -2$ ou $x = \pm 1$

2) Tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-1		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

b) $f(x) = (x^3 - x^2 + x)(2 - x)$

$= x(x^2 - x + 1)(2 - x)$

1) <u>Zéros</u> : $x = 0$ et $x = 2$

2) <u>Tableau de signe</u> :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2 - x + 1$		$+$		$+$		$+$	
$2 - x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

e) $f(x) = x(x+2)^2 \cdot (2 - x^2) \cdot (x^2 - 1) \cdot (3 - 2x)$

$= x(x+2)^2(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)(x - 1)(x + 1)(3 - 2x)$

1) <u>Zéros</u>: $x = 0$; $x = -2$; $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$, $x = 1$, $x = -1$, $x = \frac{3}{2}$

2) <u>Tableau de signe</u> :

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
x		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$(x+2)^2$		$+$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$2 - x^2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x^2 - 1$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$3 - 2x$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

f) $3 \quad -x) \quad > \frac{2}{5} \quad x$

$\Leftrightarrow \quad \cdot \quad - \quad 2 \quad \Rightarrow \quad - \quad > 2x$

$\Leftrightarrow \quad - 7x \quad \Rightarrow \quad -\frac{5}{-}$

$\Rightarrow \quad = \quad]-\infty \quad , \quad \underline{15}$