# Chapitre 1

# Proportionnalité

## 1.1 Grandeurs proportionnelles

Deux grandeurs sont **proportionnelles** si l'on peut obtenir les valeurs de la deuxième grandeur en multipliant les valeurs de la première grandeur par un même nombre. Ce nombre est appelé **coefficient de proportionnalité**.

**Exemple 1**

| Grandeur A | 3 | 6 | 12 | 21 |
|---|---|---|---|---|
| Grandeur B | 2 | 4 | 8 | 14 |

$\cdot \frac{2}{3}$ $\cdot \frac{3}{2}$

Ces deux grandeurs sont proportionnelles, car on obtient à chaque fois la valeur de $B$ en multipliant la valeur de $A$ par : $\frac{2}{3}$

**Exemple 2**

| Grandeur C | 0 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Grandeur D | 0 | 1 | 4 | 16 |

$( \ )^2$

Ces deux grandeurs sont-elles proportionnelles ? Non !

**Exemple 3**

E et F sont deux grandeurs proportionnelles. Déterminer $x$ et $y$ :

| Grandeur E | 2 | 4 | 13 | 15 | $x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Grandeur F | 5 | 10 | 32,5 | $y$ | 50 |

$\cdot 2,5$ $\cdot 0,4$

| E | F |
|---|---|
| 2 | 5 |
| 15 | $y$ |

$$y = \frac{5 \cdot 15}{2} = 37,5$$

Variante :

$$y = 15 \cdot 2,5 = 37,5$$

Variante :

$$2 + 13 = 15$$
$$5 + 32,5 = 37,5$$

| E | F |
|---|---|
| 2 | 5 |
| $x$ | 50 |

$$x = \frac{2 \cdot 50}{5} = 20$$

Variante : $50 \cdot 0,4 = 20$

Variante : $4 \xrightarrow{\cdot 5} 20$, $10 \xrightarrow{\cdot 5} 50$

## 1.2 Taux de change

On appelle **taux de change** la valeur d'une monnaie nationale (ou devise) par rapport à celle d'un autre pays. Le taux de change est exprimé sous la forme d'un coefficient multiplicateur : le coefficient de proportionnalité.

**Exemple 1**
Le taux de change du franc suisse (CHF) en dollar américain (USD) sera noté :
CHF/USD = 1,09. Ce qui signifie que 1 franc suisse vaut 1,09 dollar américain.

Le taux de change du dollar américain (USD) en yen (JPY) sera noté USD/JPY = 113,93.
Ce qui signifie que 1 dollar américain vaut 113,93 yen.

Lucie a acheté un skate électrique aux États-Unis pour 900 USD. Quel est le montant payé en francs suisses ?

| CHF | USD |
|---|---|
| 1 | 1,09 |
| x | 900 |

$$x = \frac{900}{1{,}09} \cong 825{,}70 \text{ CHF}$$

**Exemple 2**
A l'achat de 100 €, vous payez CHF 110.-.

David a payé une oeuvre d'art 800 €. Quel est son prix en CHF ?

| € | CHF |
|---|---|
| 1 | 1,1 |
| 800 | x |

$$x = 800 \cdot 1{,}1 = 880 \text{ CHF}$$

ou $x = 8 \cdot 110 = 880$ CHF

**Exemple 3**
Vous avez commandé un livre au Canada au prix de 45 dollars canadiens, qui vous a été facturé 34,20 CHF sur votre carte de crédit après avoir appliqué le taux de change en vigueur. Est-il rentable d'attendre votre prochain voyage au Canada pour faire des réserves de sirop d'érable, sachant qu'il est vendu 6,30 CHF les 250 ml en Suisse, et 12 dollars le litre au Canada ?

| Dollar | CHF |
|---|---|
| 45 | 34,20 |
| 12 | x |

$$x = \frac{12 \cdot 34{,}20}{45} = 9{,}12 \text{ CHF}$$

= prix du litre au Canada

Prix du litre en Suisse : $6{,}30 \cdot 4 = 25{,}20$ CHF

$\Rightarrow$ Oui, c'est rentable

(On ne tient compte ni du prix du vol, ni du bilan carbone !)

## 1.3 Échelle de mesure

Une échelle indique le rapport de grandeur entre un élément réel et sa représentation graphique (plan, carte, croquis, ...).

Une échelle de 1 : 25'000 signifie que 1 cm sur une carte correspond à 25'000 cm dans la réalité.

**Exemple 1**

Sur une carte au 1 : 25'000, combien mesure une distance correspondant dans la réalité à 300 mètres ?

| Carte [m] | Réalité [m] |
|---|---|
| 1 | 25'000 |
| x | 300 |

$x = \frac{300}{25'000} = 0{,}012 \text{ m} = \underline{\underline{1{,}2 \text{ cm}}}$

**Exemple 2**

Quelle est la distance réelle entre deux points distants de 4 mm sur cette même carte ?

$\cdot 4$

1 : 25'000

4 : 100'000 mm $= \underline{\underline{100 \text{ m}}}$

**Exemple 3**

La longueur d'une fourmi est de 5 mm. Sur un croquis, elle est représentée par un segment de 10 cm. Quelle est l'échelle du croquis ? 10 cm = 100 mm

$:5$

100 mm : 5 mm

20 : 1 $) :5$

$\Rightarrow$ L'échelle est de $\underline{\underline{20 : 1}}$

(Zoom 20x)

## 1.4 Unité de mesure

**Exemple 1**

En vacances en Angleterre, je roule sur une route limitée à 50 mph (50 milles par heure). A combien de km/h cela correspond-il si 1 km correspond à 0,6214 mille ?

| Km | Mille |
|---|---|
| 1 | 0,6214 |
| x | 50 |

$x = \frac{50}{0{,}6214} \cong 80{,}5 \text{ km}$

$\Rightarrow$ 50 mph $\cong$ $\underline{\underline{80{,}5 \text{ km/h}}}$

**Exemple 2**

Au marché, un agriculteur vend ses cerises CHF 8,50 le kg. Combien devrais-je payer pour 300 g de cerises ?

| kg | CHF |
|---|---|
| 1 | 8,50 |
| 0,3 | x |

$x = 8{,}50 \cdot 0{,}3 = \underline{\underline{2{,}55 \text{ CHF}}}$

## 1.5 Masse volumique

On appelle **masse volumique** d'une matière la masse correspondant à l'unité de volume de cette matière. La masse volumique s'exprime généralement en kg/m$^3$.

$$\boxed{\text{masse volumique} = \frac{\text{masse [kg]}}{\text{volume [m}^3\text{]}}}$$

Voici un tableau donnant quelques exemples de masses volumiques :

| Matière | Masse volumique [kg/m$^3$] |
|---|---|
| Or | 18'900 |
| Argent | 10'500 |
| Bronze | 8'800 |
| Aluminium | 2'700 |
| Eau | 1'000 |
| Glace | 920 |

**Équivalence importante :** On sait que 1 kg = 1000 g et 1 m$^3$ = 1'000 dm$^3$.

Ainsi on peut écrire : $\boxed{1\ \text{kg/m}^3 = \frac{1\,\text{kg}}{1\,\text{m}^3} = \frac{1'000\,\text{g}}{1'000\,\text{dm}^3} = 1\ \text{g/dm}^3}$

**Exemple 1**

Sur une bouteille de ketchup, nous pouvons lire 300 ml de ketchup pour un poids net de 342 g. Quelle est la masse volumique du ketchup ? (Donner la réponse en g/dm$^3$).

300 ml = 0,3 l = 0,3 dm$^3$

Masse volumique : $\frac{342}{0,3} = \underline{\underline{1'140\ g/dm^3}}$

**Exemple 2**

Sachant que la masse volumique du fer vaut 7,8 kg/dm$^3$, calculer la masse (en kg) d'une barre de fer lorsque le volume est égal à 2'500 cm$^3$. = 2,5 dm$^3$

| Masse (kg) | Volume (dm$^3$) |
|---|---|
| 7,8 | 1 |
| x | 2,5 |

$x = 7,8 \cdot 2,5 = \underline{\underline{19,5\ kg}}$

Variante : $MV = \frac{M}{V} \Rightarrow M = MV \cdot V = 7,8 \cdot 2,5 = 19,5$ kg

**Exemple 3**

Quelle est la masse volumique du sirop d'érable (en g/l) si une bouteille de 250 ml pleine de sirop pèse 450 grammes, alors que cette même bouteille vide pèse 120 grammes ?

Masse de sirop : 450 − 120 = 330 g

$MV = \frac{330}{250} = 1,32\ g/ml = \underline{\underline{1'320\ g/l}}$

## 1.6 Pourcentage

Un **pourcentage** est une fraction dont le dénominateur vaut 100. Pour l'exprimer, on utilise le signe %.

**Exemple 1**
Exprimer 0,04 en % : $0{,}04 = \frac{4}{100} = \underline{\underline{4\%}}$

**Exemple 2**
Calculer le 25% de 200 : $\frac{25}{\cancel{100}} \cdot \cancel{200}^{2} = \underline{\underline{50}}$ (ou $200 : 4 = 50$)

**Exemple 3**
Marc fait les magasins le jour des soldes. Il rentre dans une boutique où tout est soldé à 30%. Il voit une paire de basket qui lui plaît au prix de 150 CHF (prix avant soldes). Quel pourcentage du prix initial va-t-il payer ? Quel prix va-t-il payer ?

Il devra payer : $100\% - 30\% = \underline{\underline{70\%}}$

Prix soldé : $0{,}7 \cdot 150 = \underline{\underline{105 \text{ CHF}}}$

**Exemple 4**
Nous avons à disposition 1'470 souris grises. Elles représentent 42% d'une population de souris. De combien de souris cette population est-elle constituée ?

| % | souris |
|---|---|
| 42 | 1470 |
| 100 | x |

$x = \frac{100 \cdot 1470}{42} = \underline{\underline{3'500 \text{ souris}}}$

**Exemple 5**
Un t-shirt coûte initialement 70 francs. Tous les articles du magasin bénéficient d'un rabais de 30%, et grâce à votre carte de fidélité, le magasin vous enlève encore 10% sur le prix soldé. Combien vous coûte ce t-shirt ?

$70 \cdot 0{,}7 = 49.-$

$49 \cdot 0{,}9 = \underline{\underline{44{,}10 \text{ francs}}}$

= coût final du t-shirt

**Exemple 6**
Quel est le prix de votre loyer hors charges, si vous payez 1'610 francs au total, et si les charges représentent un supplément de 15% sur votre loyer ?

Loyer + 15% = 100% + 15% = 115% ⟷ 1610.–

100% ⟷ x

$x = \frac{1'610 \cdot 100}{115} = \underline{\underline{1'400 \text{ francs}}}$

= prix du loyer

## 1.7 Pente

On appelle **pente** le rapport entre la dénivellation et la distance horizontale. La pente s'exprime en %.

$$\boxed{\text{Pente} = \frac{\text{dénivellation}}{\text{distance horizontale}}}$$

**Exemple 1**

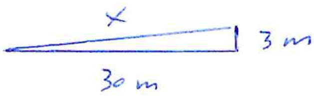
Quelle est la distance réelle parcourue sur une route rectiligne dont la pente est de 10%, et mesurant 3 cm sur une carte au 1 : 1'000 ?

$10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0,1$

$3 : 3000$ cm $= 30$ m


| Déniv | Dist horiz |
|---|---|
| 1 | 10 |
| x | 30 |

$\Rightarrow x = \frac{30}{10} = 3$ m




Pythagore :

$x = \sqrt{30^2 + 3^2} \cong \underline{\underline{30,15 \text{ m}}}$

= distance réelle parcourue

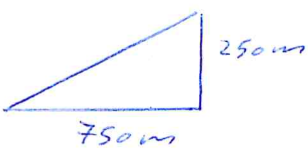
**Exemple 2**

Sur une carte au 1 : 25'000, deux points sont séparés de 3 cm.

Si le premier point est à une altitude de 241 m et le deuxième à 491 m, quelle est la pente moyenne entre ces deux points ?

$491 - 241 = 250$ m

1 : 25'000
3 : 75'000 cm = 750 m




$\text{Pente} = \frac{250}{750} = \frac{1}{3} = 0,\bar{3} \cong 33,3\%$

## 1.8 Vitesse

On appelle **vitesse** le rapport de la distance parcourue par le temps mis pour la parcourir. La vitesse s'exprime en km/h ou en m/s.

$$\boxed{\text{Vitesse} = \frac{\text{distance}}{\text{temps}}}$$

**Équivalence importante :** On sait que 1 km = 1'000 m et 1 h = 3'600 s.

Ainsi : $\boxed{3{,}6 \text{ km/h} = \frac{3{,}6 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{3600 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{1 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 1 \text{ m/s}}$

**Exemple 1**

Une moto roulant à vitesse constante a parcouru 120 km en 1h40.

a) Quelle est sa vitesse en km/h ?

$1h40 = 1h\ \frac{40}{60}h = 1h\ \frac{2}{3}h = \frac{5}{3}h$

$V = \frac{120}{\frac{5}{3}} = \frac{120 \cdot 3}{5} = \underline{\underline{72 \text{ km/h}}}$

Variante :

120 km en 100' ) :100

1,2 km en 1' ) ·60

72 km en 60'

$\Rightarrow$ 72 km/h

b) Combien de temps lui faudra-t-il pour parcourir 160 km à cette même vitesse ?

$V = \frac{d}{t} \Rightarrow t = \frac{d}{V}$

$t = \frac{160}{72} = 2{,}\bar{2}\ h = \underline{\underline{2h\ 13'\ 20''}}$

$0{,}\bar{2} \cdot 60 = 13{,}\bar{3}$

$0{,}\bar{3} \cdot 60 = 20''$

Variante :

72km/h = 0,02 km/s (: 3600)

$\frac{160}{0{,}02} = 8'000''$

$= 7'200'' + 800''$

$= 2h + 13 \cdot 60'' + 20''$

$= \underline{\underline{2h\ 13'\ 20''}}$

c) Quelle est sa vitesse en m/s ?

$72 \text{ km/h} = 72'000 \text{ m/h} = 72'000 \text{ m}/3600'' = \underline{\underline{20 \text{ m/s}}}$

**Exemple 2**

La vitesse du son est de 340 m/s. À combien de km/h cela correspond-il ?

| Dist (m) | Temps (s) |
|---|---|
| 340 | 1 |
| x | 3600 |

$\Rightarrow x = 3600 \cdot 340 = 1'224'000$ m

$= 1'224$ km

$\Rightarrow 340 \text{ m/s} = \underline{\underline{1'224 \text{ km/h}}}$

## 1.9 Débits

En mathématiques, un **débit** permet de mesurer un volume par unité de temps.

**Exemple 1**

Une fontaine a un débit de 10 litres par minutes.

Combien de temps faut-il pour remplir 1 litre ?

| litres | secondes |
| --- | --- |
| 10 | 60 |
| 1 | 6'' |

Combien de litres peut-on remplir en un quart d'heure ? $= 15'$

$10 \cdot 15 = \underline{\underline{150 \text{ litres en } 15'}}$

**Exemple 2**

Un robinet remplit une baignoire de 300 litres en 8 minutes. Un deuxième robinet remplit cette même baignoire en 6 minutes.

a) Quels sont les débits respectifs (en l/min) de ces deux robinets ?

1er robinet : $\frac{300}{8} = \underline{\underline{37{,}5 \text{ l/min}}}$

2ème robinet : $\frac{300}{6} = \underline{\underline{50 \text{ l/min}}}$

b) Si seul le premier robinet est ouvert, combien de litres se seront écoulés après 5 minutes ?

$37{,}5 \cdot 5 = \underline{\underline{187{,}5 \text{ l}}}$

c) Si les deux robinets sont ouverts en même temps, combien de temps faudra-t-il pour remplir entièrement la baignoire ?

Débit total : $37{,}5 \text{ l/min} + 50 \text{ l/min} = 87{,}5 \text{ l/min}$

Temps : $\frac{300}{87{,}5} \cong 3{,}43' = \underline{\underline{3'\ 26''}}$

$0{,}43 \cdot 60 \cong 26''$

## 1.10 Proportionnalité inverse

Dans tous les cas de proportionnalité, si $x$et $y$ sont deux grandeurs proportionnelles, alors **plus** $x$ est grand, **plus** $y$ est grand.

**Exemples :**

- Plus le volume est grand, plus la masse est grande
- Plus la vitesse est grande, plus la distance parcourue est grande

**Mais :** **plus** la vitesse est grande, **moins** le temps est grand.
C'est ce qu'on appelle deux grandeurs **inversement proportionnelles**.

**Attention !** Dans le cas de la proportionnalité inverse, on ne peut pas utiliser les produits croisés. Il faut utiliser le produit en lignes.

**Exemple 1**

Si 25 ouvriers effectuent un travail en 12 jours, combien de jours faudrait-il à 30 ouvriers pour effectuer ce même travail ?

25 ouvriers $\rightarrow$ 12 jours

1 ouvrier $\rightarrow$ $12 \cdot 25 = 300$ jours

30 ouvriers $\rightarrow$ $\frac{300}{30} = \underline{\underline{10 \text{ jours}}}$

Variante

| Ouvriers | Temps |
|---|---|
| 25 | 12 |
| 30 | x |

$$x = \frac{25 \cdot 12}{30} = \underline{\underline{10 \text{ jours}}}$$

$$⚠ \quad x \neq \frac{30 \cdot 12}{25} = 14{,}4$$

## 1.11 Double proportionnalité

**Exemple 1**

8 chats mangent 6 kg de croquettes en 10 jours. Combien de kg de croquettes mangent 14 chats en 25 jours ?

8 chats mangent 6 kg de croquettes en 10 jours

1 chat mange $\frac{6}{8}$ kg " " " " "

1 " " $\frac{6}{80}$ kg " " " 1 jour

1 " " $\frac{6}{80} \cdot 25$ kg " " " 25 jours

14 chats mangent $\frac{6}{80} \cdot 25 \cdot 14$ kg " " " 25 jours

$\Rightarrow$ " " " $\underline{\underline{26{,}25 \text{ kg}}}$ de croquettes en 25 jours

Variante

| chats | croquettes (kg) | Jours |
|---|---|---|
| 8 | 6 | 10 |
| 14 | ? | 25 |
| 8 | 6 | 10 |
| 14 | x | 10 |
| 14 | 10,5 | 10 |
| 14 | y | 25 |

Prop $\Rightarrow$ $x = \frac{14 \cdot 6}{8} = 10{,}5$ kg

Prop $\Rightarrow$ $y = \frac{10{,}5 \cdot 25}{10} = \underline{\underline{26{,}25 \text{ kg}}}$

## 1.12 Proportionnalité ?

**Attention !**

Il faut toujours se demander si le problème représente une situation de proportionnalité.

Si oui, se demander si c'est une **proportionnalité directe** ou une **proportionnalité inverse** !

**Exemple 1**

Dans une casserole remplie d'eau bouillante, il faut 3 minutes pour cuire 3 oeufs. Combien de temps faut-il dans la même casserole pour cuire 4 oeufs ?

Il faut toujours $\underline{\underline{3'}}$ !! Ce n'est pas de la proportionnalité !