Chapitre 6

Proportionnalité

6.1 Grandeurs proportionnelles

Exercice 6.1
Un transporteur propose les tarifs suivants :

Distance (km)	100	150	200	250
Prix (CHF)	83,60	125,40	159,20	191

Le prix payé est-il proportionnel à la distance parcourue ? Justifier.

On a : $\frac{83,60}{100} = \frac{125,40}{150} = 0,836$

mais $\frac{159,20}{200} = 0,796$

$\Rightarrow$ Non, le coefficient de proportionnalité change !

Exercice 6.2

Parmi les tableaux suivants, indiquer ceux qui correspondent à des situations de proportionnalité :

N° 1

Grandeur A	5	10	15
Grandeur B	10	15	20

N° 4

Grandeur G	1	3	9
Grandeur H	2,5	7,5	20,5

N° 2

Grandeur C	12	18	15
Grandeur D	8,4	12,6	10,5

N° 5

Grandeur I	3	4	5
Grandeur J	2	1,5	1,2

N° 3

Grandeur E	12	9	6
Grandeur F	8	6	4

N° 6

Grandeur K	4	7	11
Grandeur L	684	1197	1881

1) N° 1 : $\frac{10}{5} = 2 \neq \frac{15}{10} = 1,5$ ⇒ NON !

2) N° 2 : $\frac{8,4}{12} = \frac{12,6}{18} = \frac{10,5}{15} = 0,7$ ⇒ coefficient = 0,7

⇒ OUI !

3) N° 3 : $\frac{8}{12} = \frac{6}{9} = \frac{4}{6} = 0,\overline{6}$ ⇒ coefficient = $0,\overline{6}$

⇒ OUI !

4) N° 4 : $\frac{2,5}{1} = \frac{7,5}{3} = 2,5 \neq \frac{20,5}{9} = 2,\overline{27}$ ⇒ NON !

5) N° 5 : $\frac{2}{3} = 0,\overline{6} \neq \frac{1,5}{4} = 0,375$ ⇒ NON !

6) N° 6 : $\frac{684}{4} = \frac{1197}{7} = \frac{1881}{11} = 171$ ⇒ coefficient = 171

⇒ OUI !

Taux de change

Exercice 6.3

On affiche 3′400 € pour le prix d'un ordinateur. Cette somme correspond à 5′644 CHF.

Quel est le montant en francs suisses à dépenser pour acheter un livre à 25 € ?

Taux de change : $\frac{5644}{3400} = 1{,}66 \Rightarrow 1\ € = 1{,}66$ CHF

(Notation : EUR/CHF = 1,66 ou EURCHF = 1,66
Il s'agit de la norme ISO 4217)

$\Rightarrow$ Prix du livre : $25 \cdot 1{,}66 = \underline{41{,}50 \text{ CHF}}$

<u>Autre méthode :</u>

€	CHF
3400	5644
25	x

$\Rightarrow x = \frac{25 \cdot 5644}{3400} = 41{,}50$ CHF

Exercice 6.4

Pierre s'est rendu en vacances en Italie et Jacques en Angleterre. De retour en Suisse, ils s'aperçoivent qu'ils ont acheté la même paire de baskets. Pierre a payé 82.50 €, alors que Jacques a payé 63 £.

Sachant que les taux de change de l'euro et de la livre sterling étaient respectivement de 1,65 et de 2,21, déterminer lequel des deux amis a fait la meilleure affaire.

1 £ = 2,21 CHF

Pierre : 1 € = 1,65 CHF

* Pierre :

€	CHF
1	1,65
82,50	x

$\Rightarrow x = 82{,}50 \cdot 1{,}65 = \underline{136{,}125 \text{ CHF}}$

* Jacques :

£	CHF
1	2,21
63	x

$\Rightarrow x = 63 \cdot 2{,}21 = \underline{139{,}23 \text{ CHF}}$

Donc Pierre a fait la meilleure affaire (~ 3.– d'économie)

Exercice 6.5

On doit payer un certain jour 158 CHF à l'achat de 100 €.

a) Combien de francs suisses doit-on payer pour 700 euros ? Et pour 15′000 euros ?

b) Combien d'euros obtient-on avec 285 francs suisses ? Et avec 9′500 francs suisses ?

On a :

€	CHF
100	158
700	x
1500	y
z	285
t	9′500

a) $x = \dfrac{700 \cdot 158}{100} = \underline{1'106 \text{ CHF}} = 700\ €$

$y = \dfrac{1'500 \cdot 158}{100} = \underline{23'700 \text{ CHF}} = 15'000\ €$

b) $z = \dfrac{100 \cdot 285}{158} \cong \underline{180{,}38\ €} = 285 \text{ CHF}$

$t = \dfrac{9'500 \cdot 100}{158} \cong \underline{6'012{,}66\ €} = 9'500 \text{ CHF}$

Echelle

Exercice 6.6

a) Sur une carte au 1 : 50′000, quelle est la mesure sur la carte (en cm) d'une distance réelle de 18 km ?

b) Quelle est la mesure réelle (en km) entre deux points séparés par 6 cm sur un carte au 1 : 25′000 ?

c) Déterminer l'échelle d'une carte pour laquelle 7 cm correspondent en réalité à 10,5 km.

a) $1\,\text{cm} : \underbrace{50'000\,\text{cm}}_{}$ $\Rightarrow$ $1\,\text{cm} : 0{,}5\,\text{km}$

$\left(\begin{array}{c} 50'000\,\text{cm} \\ \| \\ 500\,\text{m} \\ \| \\ 0{,}5\,\text{km} \end{array} \right)$

$x \to 18\,\text{km}$ $\cdot 36$

$\Rightarrow x = \dfrac{18 \cdot 1}{0{,}5} = \underline{36\,\text{cm}}$

b) $1 : 25'000$

$6 : 150'000\,\text{cm} \Rightarrow \underline{1{,}5\,\text{km}}$

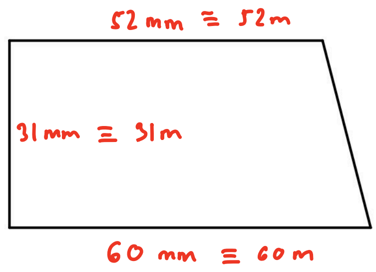
$\left(\begin{array}{c} 150'000\,\text{cm} \\ \| \\ 1'500\,\text{m} \\ \| \\ 1{,}5\,\text{km} \end{array} \right)$

c) $10{,}5\,\text{km} = 1'050'000\,\text{cm} \Rightarrow 7 : 1'050'000$ $:7$

$\underline{1 : 150'000}$

Exercice 6.7

Voici ci-contre un extrait de plan de situation au 1 : 1′000 d'une parcelle à construire (en forme de trapèze rectangle) :



a) Quelle est l'aire réelle de ce terrain ?

b) Quel est le prix de vente de ce terrain s'il est vendu 125 francs le mètre carré ?

1 mm : 1000 mm

$\parallel$

1 m

a) Aire du trapèze = base moyenne · hauteur

$$= \frac{60+52}{2} \cdot 31 = 56 \cdot 31 = \underline{1'736 \text{ m}^2}$$

b) Prix : $1'736 \cdot 125 = \underline{217'000 \text{ francs}}$

Exercice 6.8

Un globule blanc monocyte est considéré comme un disque de 2 μm de diamètre. On souhaite faire un dessin à l'échelle 25′000 : 1.

Quel sera le diamètre (en cm) du monocyte sur le dessin ?

$1\ \mu m$ = 1 micromètre = 1 millionième de m = $\underline{1}$ millième de mm

= 0,001 mm

⇒ $2 \cdot 25'000 = 50'000\ \mu m = 50\ mm = \underline{5\ cm}$

Exercice 6.9

Dans un travail pratique de biologie, on a photographié une mitochondrie au microscope électronique et obtenu un cliché de dimensions 8 cm sur 15 cm. La mitochondrie mesure 7 cm de long sur le cliché.

Sachant que le grossissement du microscope est de $42'500 : 1$, calculer la longueur réelle de la mitochondrie (en μm) et l'aire de la surface photographiée (en μm^2).

Taille réelle (cm)	Agrandie (cm)
1	42'500
x	7
y	8
z	15

$$\Rightarrow x = \frac{7 \cdot 1}{42'500} \cong 0,000165 \text{ cm} \cong 0,00165 \text{ mm} \cong \underline{1,65 \ \mu m}$$

$$\Rightarrow y = \frac{8}{42'500} \cong 0,000188 \text{ cm} \cong \underline{1,88 \ \mu m}$$

$$\Rightarrow z = \frac{15}{42'500} \cong 0,000353 \text{ cm} \cong \underline{3,53 \ \mu m}$$

Aire de la surface photographiée : $1,88 \cdot 3,53 \cong \underline{6,64 \ \mu m^2}$

ou :

$$8 \cdot 15 = 120 \text{ cm}^2 = 12'000 \text{ mm}^2 = 1,2 \cdot 10^9 \ \mu m^2$$

$$\Rightarrow \frac{12 \cdot 10^9}{(42'500)^2} \cong \underline{6,64 \ \mu m^2}$$

Masse volumique

Exercice 6.10

La masse totale d'un jerrican de 20 litres rempli de mazout est de 20 kg.

Sachant que la masse volumique du mazout est de 0,92 kg/dm^3, quelle est la masse du jerrican vide ?

Masse de 20 kg = masse de 20 l de mazout + masse du jerrican vide

Masse du mazout = $20 \cdot 0{,}92 = 18{,}4$ kg

Masse du jerrican vide = $20 - 18{,}4 = \underline{1{,}6 \text{ kg}}$

<u>Ou</u> :

$20\ \ell = 20\ dm^3$

kg	dm^3
0,92	1
x	20

$\Rightarrow x = \dfrac{20 \cdot 0{,}92}{1} = 18{,}4$ kg

$\Rightarrow$ masse du jerrican vide = $20 - 18{,}4 = \underline{1{,}6 \text{ kg}}$

Exercice 6.11

Une bouteille “pèse” 1,1 kg lorsqu’elle est pleine d’eau et 400 g lorsqu’elle est vide.

Quelle est la masse volumique (en g/dm^3) de l’huile d’olive si la même bouteille remplie d’huile d’olive a une masse de 1,044 kg ?

Masse de 1,1 kg = masse d'eau + $\underbrace{0{,}4}_{\text{poids à vide}}$ kg

$\Rightarrow$ Masse d'eau : $1{,}1 - 0{,}4 = 0{,}7$ kg $= 700$ g

On sait que la masse volumique de l'eau : 1 kg / dm^3

$\Rightarrow$ Volume de la bouteille $= 0{,}7$ l $= 0{,}7$ dm^3

Masse huile d'olive : $1{,}044 - 0{,}400 = 0{,}644$ kg $= 644$ g

$\Rightarrow$ Masse volumique de l'huile : $\dfrac{644}{0{,}7} = \underline{920 \text{ g / dm}^3}$

Exercice 6.12

Un bidon vide “pèse” 300 g. On le remplit de miel, puis on le pose sur une balance et elle indique 3 kg.

Quelle est la capacité (en litres) du bidon si la masse volumique du miel vaut 1,5 g/cm^3 ?

$300\,g = 0{,}3\,kg$

$\Rightarrow$ bidon de $3\,kg = 0{,}3\,kg +$ Poids de miel

$\Rightarrow$ Masse de miel $= 3 - 0{,}3 = 2{,}7\,kg = 2'700\,g$

$\Rightarrow$ Capacité du bidon $= \dfrac{2700}{1{,}5} = 1'800\,cm^3 = 1{,}8\,dm^3 = \underline{1{,}8\,\ell}$

<u>Ou</u> :

g	cm^3
1,5	1
2700	x

$\Rightarrow x = \dfrac{2700 \cdot 1}{1{,}5} = 1'800\,cm^3 = \underline{1{,}8\,\ell}$

Unité de mesure

Exercice 6.13

Trois amis, Ibrahim, Julien et Dylan pèsent respectivement 64 kg, 101 kg et 75 kg. Ils veulent se partager une bouteille de jus d'orange de 1,5 litres proportionnellement à leur poids respectifs.

Calculer la quantité de jus d'orange bue par chacun d'entre-eux.

Masse Totale $= 64 + 101 + 75 = 240$ kg

Masse (kg)	Jus d'orange (l)
240	1,5
64	I
101	J
75	D

$\Rightarrow$ Ibrahim $= \dfrac{64 \cdot 1{,}5}{240} = \underline{0{,}4 \ l}$

$\Rightarrow$ Julien $= \dfrac{101 \cdot 1{,}5}{240} \cong \underline{0{,}63 \ l}$

$\Rightarrow$ Dylan $= \dfrac{75 \cdot 1{,}5}{240} \cong \underline{0{,}47 \ l}$

Exercice 6.14

On a payé 15.75 CHF un rôti de 750 grammes. → 0,75 kg

Quel est le prix du kilogramme ?

CHF	kg
15,75	0,75
x	1

$$\Rightarrow x = \frac{15{,}75 \cdot 1}{0{,}75} = 21 \text{ CHF}$$

⇒ Le prix du kilogramme est de 21 CHF

Exercice 6.15

Au Canada, une amie à qui je demandai quelle était la consommation moyenne de sa voiture me répondit : “20 milles au gallon”.

Perplexe, je consultai mon guide de voyage :

Gallon : unité de capacité équivalant à 4,54 litres
Mille : unité de longueur équivalent à $1'609$ mètres

Combien de litres d'essence utiliserais-je pour faire une excursion de 500 kilomètres avec cette voiture ?

1 mille $\hat{=}$ 1'609 m

20 milles $\hat{=}$ 32'180 m $\quad \cdot 20$

$= 32{,}18$ km

$\Rightarrow$ La voiture peut rouler 32,18 km avec 1 gallon

$\Rightarrow$ " " " avec 4,54 l

km	l
32,18	4,54
500	x

$\Rightarrow x = \dfrac{500 \cdot 4{,}54}{32{,}18} \cong 70{,}54\ \ell$

= consommation pour 500 km

En plus : $\dfrac{70{,}54}{5} = 14{,}1\ \ell/100\,\text{km}$ $\Rightarrow$ c'est beaucoup !

Pente

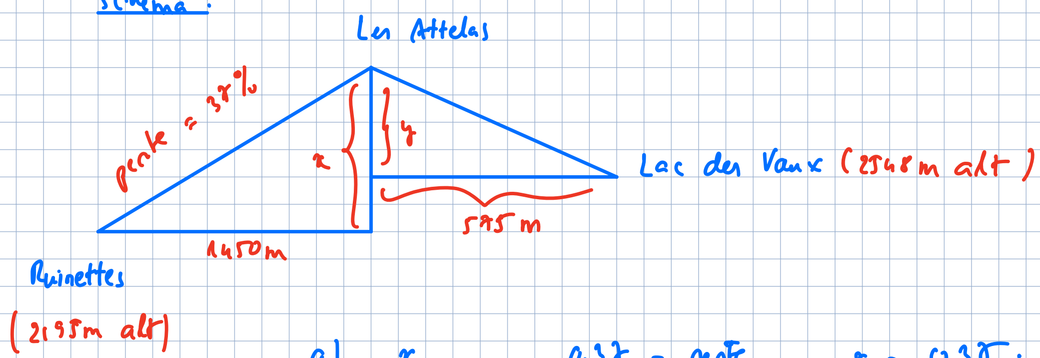
Exercice 6.16

A Verbier, la station des Ruinettes est située à 2′195 mètres d'altitude. Il en part un téléphérique qui monte aux Attelas. Par ailleurs, un téléski arrive aux Attelas par l'autre face de la montagne. Il part du lac des Vaux, à 2′548 mètres d'altitude. Sur une carte au 1 : 25′000, la distance (horizontale) des Ruinettes aux Attelas mesure 5,8 cm, alors que la distance entre le lac des Vaux et les Attelas est de 2,3 cm. La pente moyenne du téléphérique est de 37 %.

a) Quelle est l'altitude de la station des Attelas ?

b) Quelle est la pente du téléski du lac des Vaux ? (en % arrondis à 2 décimales)

Schéma :



a) $\dfrac{x}{1450} = 0{,}37 = \text{pente} \Rightarrow x = 0{,}37 \cdot 1450 = 536{,}5\text{m}$

$\Rightarrow$ Altitude des Attelas $= 2'195 + 536{,}5 = 2'731{,}50$ m

b) $y = 2'731{,}50 - 2'548 = 183{,}50$ m

$\Rightarrow \text{pente} = \dfrac{183{,}50}{575} \cong 31{,}9\ \%$

Pourcentage

Exercice 6.17

Paul achète un appareil électrique. Le commerçant lui accorde une réduction de 10 %. Il paye 540 francs.

Quel était le prix initial ?

Ici 540 Frs = 90% du prix

Donc

CHF	%
540	90
x	100

$$\Rightarrow x = \frac{100 \cdot 540}{90} = \underline{600.-}$$ c'est le prix initial

Exercice 6.18

Les frais de chauffage d'un immeuble sont répartis entre les locataires proportionnellement au volume de leur appartement. La famille Berger loue un appartement de 6 pièces, ce qui représente les 2,4 % du volume total. Le propriétaire a reçu une facture globale de 38′565 francs.

a) Combien paiera la famille Berger ?

b) En considérant que toutes les pièces de tous les appartements de l'immeuble sont de taille identique, combien de pièces comporte cet immeuble ?

a) $38'565 \cdot \frac{2{,}4}{100} = \underline{925{,}56} \Rightarrow$ Les Berger paieront 925,56 CHF

b)

Pièces	%
6	2,4
x	100

$\Rightarrow x = \frac{100 \cdot 6}{2{,}4} = \underline{250 \text{ pièces}}$ = nombre de pièces dans l'immeuble

Exercice 6.19

Un vigneron vend à un premier acheteur la moitié de sa production annuelle de vin. Il vend ensuite les 80 % de ce qu'il lui reste à un deuxième acheteur. Après le passage des deux acheteurs, il lui reste en cave 12′000 litres.

Quelle était (en litres) sa production annuelle ?

On pose x : production annuelle (litres)

$\Rightarrow$ 1ère vente : $\frac{x}{2}$ $\Rightarrow$ solde $= \frac{x}{2} = 0{,}5x$

$\Rightarrow$ 2ème vente : $0{,}8 \cdot 0{,}5x = 0{,}4x$

$\Rightarrow$ solde : $0{,}5x - 0{,}4x = 0{,}1x = 10\%$ de x

$\Rightarrow$ on a : $0{,}1x = 12'000$

$\Rightarrow x = \underline{120'000 \text{ litres}}$ = production annuelle

Exercice 6.20

Un antiquaire déclare : « J'ai vendu ce matin un vase chinois 2'000 francs en perdant 20 % sur le prix d'achat. Mais l'après-midi, j'ai vendu un autre vase 2'000 francs en gagnant 25 % sur le prix d'achat. C'est donc finalement une bonne journée ! »

Êtes-vous d'accord avec l'antiquaire ?

* Le matin :

Prix de vente = 2000.– = 80% du prix d'achat = 0,8 · prix d'achat

$\Rightarrow$ prix d'achat : $\dfrac{2000}{0{,}8}$ = 2'500 frs

$\Rightarrow$ Perte : 2'500 − 2'000 = 500 frs

* L'après-midi :

Prix de vente = 2'000.– = 125 % du prix d'achat

= 1,25 · prix d'achat

$\Rightarrow$ prix d'achat : $\dfrac{2000}{1{,}25}$ = 1'600 frs

donc Gain : 2'000 − 1'600 = 400 frs

Alors le bilan est : − 500 + 400 = −100 $\Rightarrow$ Je ne suis pas d'accord avec l'antiquaire !

$\Rightarrow$ Il a perdu 100 francs !

Exercice 6.21

On a demandé un devis à 4 entreprises et toutes prévoient le même montant de 7'000 CHF pour effectuer les travaux prévus.

Ensuite, l'entreprise A décide d'augmenter le prix une première fois de 5 % puis, une deuxième fois de 3 %.
L'entreprise B augmente le prix une première fois de 3 % puis, une deuxième fois de 5 %.
L'entreprise C augmente le prix d'abord de 4 % puis, de nouveau de 4 %.
L'entreprise D ne fait qu'une seule augmentation de 8 %.

a) Quelle serait l'entreprise la plus avantageuse après les augmentations ?

b) Quelle est, en %, l'augmentation totale de chaque entreprise ?

a) * A : Première fois : ↗ 5 % ; Deuxième fois : ↗ 3 %

Montant	%
7'000	100
x	5

$x = \frac{5 \cdot 7'000}{100} = 350$ frs

Montant	%
7'350	100
y	3

$y = \frac{3 \cdot 7'350}{100} = 220,5$ frs

$\Rightarrow$ A : augmentation de 350 frs + 220,5 frs = 570,5 frs

* B : Première fois : ↗ 3 % ; Deuxième fois : ↗ 5 %

Montant	%
7'000	100
x	3

$x = \frac{3 \cdot 7'000}{100} = 210$ frs

Montant	%
7'210	100
y	5

$y = \frac{5 \cdot 7'210}{100} = 360,5$ frs

$\Rightarrow$ B : augmentation de 210 frs + 360,5 frs = 570,5 frs

* C : Première fois : ↗ 3% ; Deuxième fois : ↗ 5%

Montant	%
7'000	100
x	4

$$x = \frac{4 \cdot 7'000}{100} = 280 \text{ frs}$$

Montant	%
7'280	100
y	4

$$y = \frac{4 \cdot 7'280}{100} = 291{,}2 \text{ frs}$$

=> C : augmentation de 280 frs + 291,2 frs = 571,2 frs

* D : Première fois : ↗ 3% ; Deuxième fois : ↗ 5%

Montant	%
7'000	100
x	8

$$x = \frac{8 \cdot 7'000}{100} = 560 \text{ frs}$$

=> C : augmentation de 560 frs

=> L'entreprise D

b) * A : augmentation de 570,5 frs

Montant	%
7'000	100
570,5	x

$$\Rightarrow x = \frac{570{,}5 \cdot 100}{7'000} = 8{,}15\%$$

* B : également 8,15 % d'augmentation

* C :

Montant	%
7'000	100
571,2	x

$\Rightarrow x = \dfrac{571{,}2 \cdot 100}{7'000} = 8{,}16\ \%$

* D :

Montant	%
7'000	100
560	x

$\Rightarrow x = \dfrac{560 \cdot 100}{7'000} = 8\ \%$

Vitesse, débit

Exercice 6.22

Une voiture roulant à vitesse constante, a parcouru 105 km en 1h20.

Combien de temps lui faudrait-il pour parcourir 189 km à cette même vitesse ?

On a : 1h 20 mn = 60 mn + 20mn = 80 mn

km	mn
105	80
189	x

$$\Rightarrow x = \frac{189 \cdot 80}{105} = 144 \text{ mn} = 120 \text{ mn} + 24 \text{ mn}$$

$$= \underline{2h\,24mn}$$

Exercice 6.23

Une infirmière doit régler le débit d'un goutte-à-goutte de sorte que les 50 cl de liquide pénètrent dans le corps du malade en 3 heures et 20 minutes.
Après 2 heures, le médecin ordonne de diminuer le débit de 0,05 cl par minute.

a) Quel était le débit, en cl/min du goutte-à-goutte avant l'intervention du médecin ?

b) Jusqu'à l'intervention du médecin, quelle quantité de liquide s'est-elle écoulée ?

c) Quelle est la durée totale du traitement ?

a) 3h 20 mn = 180 mn + 20 mn = 200 mn

$\Rightarrow$ Débit $= \dfrac{50}{200} = \underline{0{,}25 \text{ cl/mn}}$

b) 2h = 120 mn

$\Rightarrow$ Quantité écoulée : $120 \cdot 0{,}25 = \underline{30 \text{ cl}}$

c) Liquide restant : $50 - 30 = 20$ cl

$\Rightarrow$ nouveau débit : $0{,}25 - 0{,}05 = 0{,}2$ cl/mn

temps restant : $\dfrac{20}{0{,}2} = 100$ mn $= 60$ mn $+ 40$ mn $= 1$h 40 mn

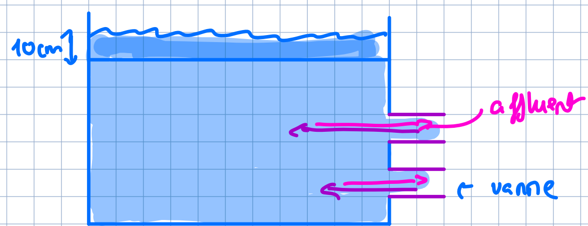
$\Rightarrow$ Durée totale : 2h + 1h 40 mn = $\underline{3\text{h } 40 \text{ mn}}$

Exercice 6.24

La superficie du lac de Gruyère, à sa cote maximale, est de 10 km^2. Lorsque l'on ouvre les vannes au barrage de Rossens, 150 m^3 d'eau s'écoulent chaque seconde. L'altitude du lac est de 677 m.

Quelle durée théorique faudrait-il pour abaisser de 10 cm le niveau du lac sachant que ses divers affluents débitent 45 m^3 par seconde ?

* Affluent : cours d'eau qui se jette dans un autre



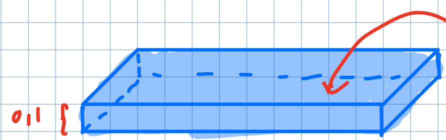
Superficie du lac : 10 km^2 = 10'000'000 m^2

Hauteur d'eau : 10 cm = 0,1 m

* Remarque :

On admettra que les bords du lac sont verticaux

=> Volume d'eau à vider : 10'000'000 · 0,1 = 1'000'000 m^3



$V = B \cdot h$ → hauteur

B ↓ superficie

=> Débit réel : 150 - 45 = 105 m^3/s

=> Alors le temps pour abaisser de 10cm = 0,1m le niveau du lac est :

$$\text{Temps} = \frac{1'000'000}{105} \cong 9'523,8''$$

$$\cong 2,6455\,h \cong \underline{2h\ 39mn}$$

(Convertir 9'523,8'' en heure = 2,6455h ≅ 2h + 0,6455h ≅ 2h + 0,6455·60 mn
≅ 2h 39 mn)

Exercice 6.25

Aux jeux olympiques de Séoul en 1988, l'Américaine Florence Griffith s'est adjugée la médaille d'or du 200 mètres en établissant un nouveau record du monde dans le temps de 21,34 secondes. (Record féminin encore valable en juin 2016).

1) Quelle a été sa vitesse moyenne en km/h ?

Le record du monde masculin est détenu par le Jamaïcain Usain Bolt depuis le 20 août 2009. Ce jour-là à Berlin, il courut le 200 mètres en 19,19 secondes.

2) Quelle fut sa vitesse moyenne en km/h ?

1) $V = \frac{200}{21{,}34} \cong 9{,}37 \text{ m/s} \Rightarrow 9{,}37 \cdot \underbrace{3{,}6}_{\text{(convertir en km/h)}} \cong \underline{33{,}74 \text{ km/h}}$

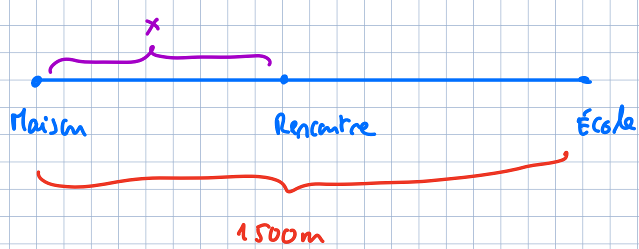
2) $V = \frac{200}{19{,}19} \cong 10{,}42 \text{ m/s} \Rightarrow 10{,}42 \cdot 3{,}6 \cong \underline{37{,}52 \text{ km/h}}$

Exercice 6.26

René quitte à pied la maison à 13h00 pour se rendre à l'école, située à 1'500 mètres de la maison ; il marche à 4,5 km/h. Son frère Marc constate que René a oublié un livre et prend son vélomoteur pour le lui apporter ; il part à 13h10 et roule à 27 km/h (René continue à marcher en direction de l'école sans savoir que son frère lui apporte son livre).

a) A quelle heure et à quelle distance de la maison, Marc rejoint-il son frère René ?

b) Lorsque Marc rejoint son frère, ils s'arrêtent 2 minutes pour discuter avant que René reparte à pied pour l'école et que Marc rentre à la maison. A quelle heure René arrive-t-il à l'école ?



t_1 : Temps mis par René avant la rencontre (en mn)

$\Rightarrow t_2 = t_1 - 10$ = temps mis par Marc avant la rencontre (en mn)

x = distance Maison – Rencontre (en km)

$\Rightarrow x = 4{,}5 \cdot \dfrac{t_1}{60}$ pour René

et $x = 27 \cdot \dfrac{t_2}{60}$ pour Marc

donc $4{,}5 \cdot \dfrac{t_1}{60} = 27 \cdot \dfrac{t_2}{60} \Rightarrow 4{,}5 \cdot \dfrac{t_1}{60} = 27 \cdot \dfrac{t_1 - 10}{60}$

$\Rightarrow 4{,}5 t_1 = 27 \cdot (t_1 - 10) \Rightarrow 4{,}5 t_1 = 27 t_1 - 270 \Rightarrow 22{,}5 t_1 = 270$

$\Rightarrow t_1 = 12 \text{ mn} = 0{,}2 \text{ h}$

$\Rightarrow$ a) à 13h 12mn

b) $t_{\text{René}} = \dfrac{1{,}5}{4{,}5} = \dfrac{1}{3} \text{ h} = 20 \text{ mn} \Rightarrow$ plus 2 mn de pause

$\Rightarrow$ 22 mn

donc à 13h 22mn

6.2 Grandeurs inversement proportionnelles

Exercice 6.27

Parmi les tableaux suivants, indiquer ceux qui correspondent à des situations de proportionnalité inverse :

Nº 1

Grandeur A	5	10	15
Grandeur B	21	10,5	7

Nº 3

Grandeur E	1	2	3
Grandeur F	66	33	21

Nº 2

Grandeur C	3	6	18
Grandeur D	15	30	90

Nº 4

Grandeur G	13	7	25
Grandeur H	70	130	36,4

* N°1 :

$5 \cdot 21 = 105 = 10 \cdot 10{,}5 = 15 \cdot 7 \Rightarrow$ Produit constant

$\Rightarrow$ Oui !

* N°2 :

$3 \cdot 15 = 45 \neq 6 \cdot 30 = 180 \Rightarrow$ NON !

(c'est une proportionalité directe)

* N°3 :

$1 \cdot 66 = 66 = 2 \cdot 33 = 3 \cdot 21 \Rightarrow$ Oui !

* N°4 :

$13 \cdot 70 = 910$

$7 \cdot 130 = 910 \Rightarrow$ Oui !

$25 \cdot 36{,}4 = 910$

Exercice 6.28

30 ouvriers ont creusé une tranchée en 96 heures.

Combien de temps 24 de ces ouvriers auraient-ils mis pour effectuer le même travail ?

30 ouvriers $\rightarrow$ 96 h

1 ouvrier $\rightarrow$ $96 \cdot 30 = 2'880$ h

$\Rightarrow$ 24 ouvrier $\Rightarrow$ $\dfrac{2'880}{24} = \underline{120 \text{ h}}$

ou : Autre méthode

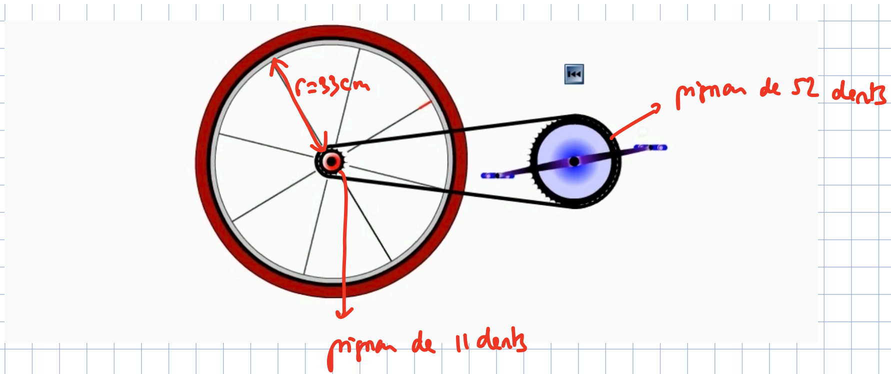
Ouvriers	Temps (h)
30	$\rightarrow$ 96
24	$\rightarrow$ x

$\Rightarrow x = \dfrac{96 \cdot 30}{24} = \underline{120 \text{ h}}$

Exercice 6.29

Un coureur cycliste effectuant une course contre la montre pédale avec un braquet de 52/11 (il a donc un pignon de 52 dents au pédalier avant et un pignon de 11 dents au moyeu arrière) et une cadence de 95 tours par minute.

Sachant que le rayon de la roue arrière mesure 33 cm, calculer la vitesse (en km/h) du cycliste.



Le braquet est de vélo est le rapport entre le nombre de dents du plateau (avant) et celui du pignon (arrière), déterminant la distance parcourue à chaque coup de pédale.

On a : $r = 33 \text{ cm} = 0{,}33 \text{ m}$

$\Rightarrow$ le périmètre de la roue est : $2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 0{,}33 = 0{,}66\,\pi \text{ m}$

autrement dit, le vélo avance de cette longueur à chaque tour de roue.

On sait que le braquet est $\frac{52}{11}$ $\Rightarrow$ c-à-d quand le pédalier fait un tour, la roue fait $\frac{52}{11}$ tours et le vélo avance $\frac{52}{11} \cdot 0{,}66\,\pi \text{ m}$

$\Rightarrow$ cette longueur est le développement du vélo

* On va calculer la vitesse en mètres par minute :

=> Vitesse (m/mn) = Développement x cadence = $\frac{52}{11} \cdot 0{,}66\pi \cdot 95$ m/mn

* Convertir la vitesse en km/h :

$$\text{Vitesse (km/h)} = \left(\frac{52}{11} \cdot 0{,}66\pi \cdot 95 \,\frac{m}{mn} \cdot 60 \,\frac{mn}{h}\right) : 1000 \,\frac{m}{km}$$

$$\simeq \underline{55{,}87 \text{ km/h}}$$

Exercice 6.30

Un paysan possède un troupeau de 50 vaches. Il sait qu'il a, avec ce troupeau, du fourrage pour 54 jours d'hiver. Il décide de vendre 5 vaches ; pour le reste du troupeau, quel est le nombre de jours que durera le fourrage du paysan ?

50 vaches → 54 jours

⇒ 1 vache → $54 \cdot 50 = 2'700$ jours

Alors 45 vaches → $\frac{2'700}{45} = \underline{60 \text{ jours}}$

<u>ou</u> : Autre méthode

Vaches	Fourrage (jours)
50	→ 54
45	→ x

$$\Rightarrow x = \frac{50 \cdot 54}{45} = \underline{60 \text{ jours}}$$

6.3 Mélange

Exercice 6.31

Pour chaque situation, déterminer s'il s'agit de proportionnalité directe ou inverse, puis répondre à la question.

a) Quatre secrétaires ont mis 8 heures pour dactylographier un rapport de 160 pages. Combien de temps mettraient six secrétaires pour taper ce même rapport ?

b) Un robinet qui débite 18 litres à la minute met 28 heures pour remplir un bassin. Quel temps mettrait-il si son débit était de 42 litres à la minute ?

c) Une imprimante a un débit de 8 pages par minute. En combien de temps imprimera-t-elle un document de 360 pages ?

d) Dans un magasin, pour 3 kg de pommes, on paie 10.50 CHF. Que payerait-on pour 4 kg ?

e) A la vitesse moyenne de 85,5 km/h, un train met 3h15 pour rallier deux villes. Combien de temps durera ce trajet si l'on augmente la vitesse moyenne de ce train de 12 km/h ?

a) plus il y a de secrétaires, moins il faut de temps

$\Rightarrow$ proportionnalité inverse

4 secrétaires $\to$ 8 h

1 secrétaire $\to$ $8 \cdot 4 = 32$ h

$\Rightarrow$ 6 secrétaires $\to$ $\frac{32}{6} \cong 5{,}\overline{3}$ h $=$ 5h20mn

ou : Autre méthode

Secrétaires	Temps (h)
4	8
6	x

$\Rightarrow x = \frac{4 \cdot 8}{6} = 5.\overline{3}$ h $=$ 5h20mn

b) plus le débit est grand, moins il faut de temps

$\Rightarrow$ proportionnalité inverse

On a : 18 l/mn $\rightarrow$ $28 \cdot 60 = 1'680$ mn

1 l/mn $\rightarrow$ $28 \cdot 60 \cdot 18 = 30'240$ mn

(volume bassin = 30'240 l)

42 l/mn $\rightarrow$ $\frac{30'240}{42} = 720\text{mn} = 12\text{h}$

ou : Autre méthode

Débit (l/mn)	Temps (h)
18	$\rightarrow$ 28
42	$\rightarrow$ x

$$\Rightarrow x = \frac{18 \cdot 28}{42} = 12\text{h}$$

c) Si le débit est fixé à 8 pages/mn, plus il y a de pages, plus il faut de temps $\Rightarrow$ proportionnalité directe

(si le nombre de pages est fixe, plus le débit est grand, moins il faut de temps $\Rightarrow$ proportionnalité inverse)

$\Rightarrow$ Temps : $\frac{360}{8} = 45\text{mn} = \frac{3}{4}\text{h}$

ou : Autre méthode

Pages	Temps
8	1
360	x

$$\Rightarrow x = \frac{360 \cdot 1}{8} = 45\text{mn} = \frac{3}{4}\text{h}$$

d) Plus on prend de kg, plus c'est cher

=> proportionnalité directe

=>

Kg	CHF
3	10,50
4	x

$\Rightarrow x = \dfrac{4 \cdot 10{,}50}{3} = 14$ francs

e) Plus le train est rapide, moins il faut de temps

=> proportionnalité inverse

On a : 3h 15 = 180 mn + 15 mn = 195 mn

et 3h15 = 3h $\frac{1}{4}$ h = 3,25 h

=> Distance entre les deux villes : $85{,}5 \cdot 3{,}25 = 277{,}875$ km

=> Nouvelle vitesse = $85{,}5 + 12 = 97{,}5$ km/h

=> Nouveau temps = $\dfrac{277{,}875}{97{,}5} = 2{,}85$ h $= 2$h $+ 0{,}85 \cdot 60$

= 2h 51 mn

ou : Autre méthode

Vitesse	Temps
85,5	3,25
97,5	x

$\rightarrow x = \dfrac{85{,}5 \cdot 3{,}25}{97{,}5} = 2{,}85$h = 2h 51mn