Chapitre 4

Manipulation de formules

4.1 Transformation de formules

Exercice 4.2 Soit la formule $C = 2\pi R$

donnant la circonférence C d'un cercle de rayon R.

Résoudre la formule de la circonférence relativement à R, puis déterminer le rayon (en cm, arrondi au mm près) d'un cercle dont la circonférence mesure 20 cm.

$$C = 2\pi R \quad | : 2$$

$$\frac{C}{2} = \frac{2\pi R}{2}$$

$$\frac{C}{2} = \pi R \quad | : \pi$$

$$\frac{C}{2\pi} = \frac{\pi R}{\pi}$$

$$\frac{C}{2\pi} = R$$

$$R = \frac{C}{2\pi}$$

- Si $C = 20\,\text{cm} \Rightarrow R = \frac{20}{2\pi} = \frac{10}{\pi} \cong 3{,}2\,\text{cm}$

Exercice 4.1 Soit la formule des intérêts simples $I = \dfrac{C \cdot t \cdot n}{100}$

où I représente les intérêts, C le capital placé, t le taux annuel (donné en %) et n est le nombre d'années du placement.

a) Résoudre la formule des intérêts simples relativement à C, puis calculer le capital à placer pendant 5 ans pour obtenir 1'200 francs d'intérêts à un taux de 3% :

$= n$ $\quad$ " I $\quad$ $t = 3$ ⚠

$$I = \frac{C \cdot t \cdot n}{100} \quad | \cdot 100$$

$$100\, I = C \cdot t \cdot n \quad | : t \quad | : n$$

$$C = \frac{100\, I}{t \cdot n}$$

$$C = \frac{100 \cdot 1200}{3 \cdot 5} = 8'000.-$$

b) Résoudre la ~~formule~~ I des intérêts simples relativement à t, puis calculer le taux pour obtenir 1'500 francs d'intérêts en plaçant 10'000 francs pendant 4 ans :

" C $\quad$ " n

$$I = \frac{C \cdot t \cdot n}{100} \quad | \cdot 100$$

$$100\, I = C \cdot t \cdot n \quad | : C \quad | : n$$

$$t = \frac{100\, I}{C \cdot n}$$

$$t = \frac{100 \cdot 1'500}{10'000 \cdot 4} = 3{,}75\ \%$$

c) Résoudre la formule des intérêts simples relativement à n, puis déterminer la durée de placement d'un capital de 8'000 francs si l'on obtient 1'200 francs d'intérêts en le plaçant à 2,5 % :

" C $\quad$ " I

$t = 2{,}5$

$$I = \frac{C \cdot t \cdot n}{100} \quad | \cdot 100$$

$$100\, I = C \cdot t \cdot n \quad | : C \quad | : t$$

$$n = \frac{100 \cdot 1'200}{8'000 \cdot 2{,}5} = 6 \text{ ans}$$

$$n = \frac{100\, I}{C \cdot t}$$

Exercice 4.3 Soit la formule $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$

donnant l'aire A d'un triangle en fonction de sa base b et de sa hauteur h.

a) Résoudre la formule de l'aire relativement à b, puis déterminer la longueur de la base d'un triangle d'aire 68 cm^2 et dont la hauteur mesure 8,5 cm :

$\overset{\shortparallel}{A}$ $\overset{\shortparallel}{h}$

$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h \quad | \cdot 2$

$2A = b \cdot h \quad | : h$

$\underline{\underline{b = \frac{2A}{h}}}$

$b = \frac{2 \cdot 68}{8{,}5} = \underline{\underline{16 \text{ cm}}}$

b) Résoudre la formule de l'aire relativement à h, puis déterminer la hauteur d'un triangle d'aire 20 cm^2 et dont la base mesure 3,2 cm :

$\overset{\shortparallel}{A}$ $\overset{\shortparallel}{b}$

$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h \quad | \cdot 2$

$2A = b \cdot h \quad | : b$

$\underline{\underline{h = \frac{2A}{b}}}$

$h = \frac{2 \cdot 20}{3{,}2} = \underline{\underline{12{,}5 \text{ cm}}}$

Exercice 4.4 Soit la formule de la loi d'Ohm $R = \frac{U}{I}$

où R est la résistance (en ohm [Ω]), U la tension (en volt [V]) et I l'intensité d'un courant électrique (en ampère [A]).

a) Exprimer U en fonction de R et I :

$R = \frac{U}{I} \quad | \cdot I$

$\underline{\underline{U = R \cdot I}}$

b) Exprimer I en fonction de R et U :

$U = R \cdot I \quad | : R$

$\underline{\underline{I = \frac{U}{R}}}$

Exercice 4.5 Soit la formule de la loi de gravitation de Newton $\boldsymbol{F = G \cdot \frac{m \cdot M}{d^2}}$ où :

- F est la force de gravitation (en newton [N])
- G la constante gravitationnelle ($G \simeq 6{,}673 \cdot 10^{-11}$ [N · m^2· kg^{-2}])
- m et M les masses (en kilogramme [kg]) des deux corps
- d la distance (en mètre [m]) entre les centres de gravité de ces corps.

a) Exprimer m en fonction de F, G, M et d :

$$F = \frac{G \cdot m \cdot M}{d^2} \qquad | \cdot d^2$$

$$F \cdot d^2 = G \cdot m \cdot M \qquad | : G \quad | : M$$

$$\underline{\underline{m = \frac{F \cdot d^2}{G \cdot M}}}$$

b) Exprimer d en fonction de F, G, m et M :

$$F = \frac{G \cdot m \cdot M}{d^2} \qquad | \cdot d^2$$

$$F \cdot d^2 = G \cdot m \cdot M \qquad | : F$$

$$d^2 = \frac{G \cdot m \cdot M}{F} \qquad | \sqrt{}$$

$$\underline{\underline{d = \sqrt{\frac{G \cdot m \cdot M}{F}}}}$$

Exercice 4.6 Soit la formule $\boldsymbol{d = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t}$

donnant la distance d [m] parcourue par un corps en chute libre en fonction du temps t [s] et de sa vitesse initiale v_0 $[\mathrm{m} \cdot s^{-1}]$.
g est l'accélération gravitationnelle sur Terre ($g \simeq 9{,}81$ $[\mathrm{m} \cdot s^{-2}]$ à notre latitude, au niveau de la mer).

Exprimer v_0 en fonction de d, g et t :

$$d = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \quad | \cdot 2$$

$$2d = g t^2 + 2 \cdot v_0 \cdot t \quad | - g \cdot t^2$$

$$2 \cdot v_0 \cdot t = -g \cdot t^2 + 2d \quad | : 2t$$

$$v_0 = \frac{-g \cdot t^2 + 2d}{2t} = \frac{-gt^2}{2t} + \frac{2d}{2t} = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t + \frac{d}{t}$$

Variante :

$$v_0 \cdot t = d - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_0 = \frac{d}{t} - \frac{\frac{1}{2} g t^2}{t}$$

$$v_0 = \frac{d}{t} - \frac{1}{2} g t$$

Exercice 4.10

On rencontre en mécanique les formules suivantes :

- $E_p = mgh$

  où E_p est l'énergie potentielle (en joule [J]), m la masse [kg], g l'accélération gravitationnelle sur Terre ($g \simeq 9{,}81$ $[\mathrm{m} \cdot s^{-2}]$ à notre latitude, au niveau de la mer) et h l'altitude [m].

- $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

  où E_c est l'énergie cinétique (en joule [J]), m la masse [kg] et v la vitesse $[\mathrm{m} \cdot s^{-1}]$.

Si $E_p = E_c$, exprimer v en fonction de g et h :

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad | : m$$

$$g \cdot h = \frac{1}{2} v^2 \quad | \cdot 2$$

$$2 \cdot g \cdot h = v^2 \quad | \sqrt{}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

4.2 Problèmes

Exercice 4.13 4.13

Un maraîcher demande un prix p (donné en francs) par kilogramme de pommes livrées et un forfait f (donné en francs) pour la livraison. Posons T le prix (donné en francs) pour q kilogrammes de pommes livrées.

a) Donner la formule permettant d'obtenir T en fonction de p, f et q.

b) En utilisant la formule obtenue en a), exprimer f en fonction de T, p et q.

c) En utilisant la formule obtenue en a), exprimer q en fonction de T, p et f.

d) Sachant que le maraîcher facture 80 francs pour 20 kilogrammes de pommes livrées et 115 francs pour 30 kilogrammes de pommes livrées, déterminer p et f.

a) $T = f + p \cdot q \quad | - p \cdot q$

b) $f = T - p \cdot q$

c) $T = f + p \cdot q \quad | - f$

$T - f = p \cdot q \quad | : p$

$q = \frac{T - f}{p}$

d) $\begin{cases} 80 = p \cdot 20 + f & | \cdot (-1) \\ 115 = p \cdot 30 + f & | \cdot 1 \end{cases}$

$-80 = -20p - f$

$+ \; 115 = 30p + f$

$35 = 10p \quad | : 10$

$p = \frac{35}{10} = 3{,}50$ francs/kg

$80 = 20 \cdot 3{,}5 + f$

$80 = 70 + f$

$f = 10$ francs

Exercice 4.9 4.14

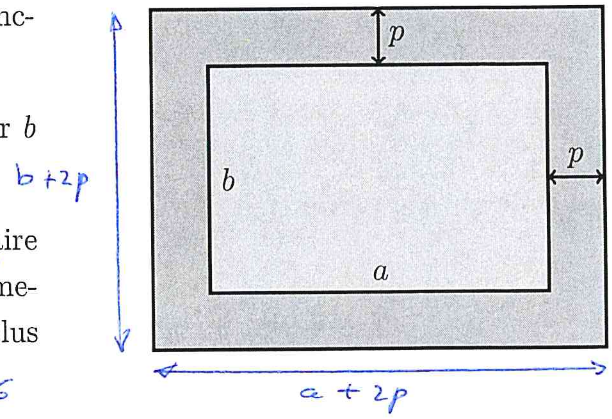
Un terrain rectangulaire de longueur a et de largeur b est entièrement entouré par une bande de largeur p (les grandeurs sont données en mètres). Soit S l'aire de la bande.

a) Donner la formule permettant d'obtenir S en fonction de a, b et p.

b) En utilisant la formule obtenue en a), exprimer b en fonction de S, a et p.

c) Déterminer les dimensions du terrain rectangulaire sachant que la bande a une largeur de 3 m $= p$ et mesure 216 m² $\to S$ et que la longueur mesure 6 m de plus que la largeur.

$a = b + 6$



a)

1ère méthode

Aire petit rectangle : $a \cdot b$

Aire grand " :

$(a+2p)(b+2p) =$

$ab + 2ap + 2bp + 4p^2$

Aire de la bande :

$(ab + 2ap + 2bp + 4p^2) - ab$

$= 2ap + 2bp + 4p^2$

$\Rightarrow \underline{\underline{S = 4p^2 + 2ap + 2bp}}$

2ème méthode

Aire des 4 coins : $4p^2$

Aire 2 bandes horizontales : $2ap$

Aire 2 bandes verticales : $2bp$

$\Rightarrow \underline{\underline{S = 4p^2 + 2ap + 2bp}}$

b) $S - 4p^2 - 2ap = 2bp \quad | : 2p$

$$\underline{\underline{b = \frac{S - 4p^2 - 2ap}{2p}}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\frac{S}{p} - 2p - a}}$$

c) $S = 4p^2 + 2ap + 2bp$

$216 = 4 \cdot 3^2 + 2 \cdot a \cdot 3 + 2 \cdot b \cdot 3$

$216 = 36 + 6a + 6b$

$6a + 6b = 180 \quad | : 6$

$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 30 \\ a = b + 6 \end{cases}$

$2b + 6 = 30$ $\quad \underline{\underline{b = 12 \text{ m}}}$

$\Rightarrow \underline{\underline{a = 18 \text{ m}}}$

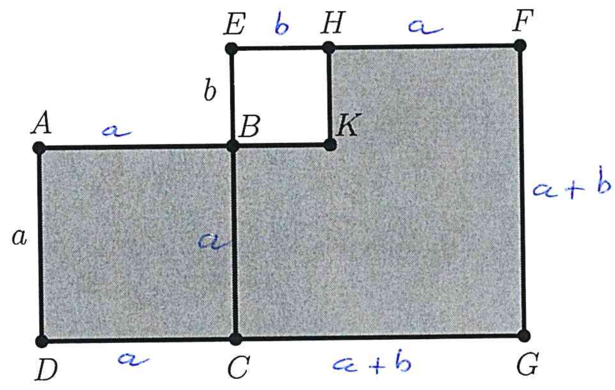
Exercice 4.~~10~~ 4.15

Dans la figure ci-contre, les quadrilatères $ABCD$, $EFGC$ et $EHKB$ sont des carrés. Soit a la longueur (en cm) du côté du carré $ABCD$ et b la longueur (en cm) du côté du carré $EHKB$. Soit S l'aire totale de la surface grisée.

a) Donner la formule permettant d'obtenir S en fonction de a et b.

b) En utilisant la formule obtenue en a), exprimer b en fonction de S et a.

c) Déterminer les longueurs a et b sachant (S) que l'aire totale grisée est de 80 cm^2 et que le côté du carré $EFGC$ mesure 8 cm ($= a+b$).



a) S = aire $ABCD$ + aire $EFGC$ − aire $EHKB$

$S = a^2 + (a+b)^2 - b^2$

$S = a^2 + a^2 + 2ab + b^2 - b^2$

$\underline{\underline{S = 2a^2 + 2ab}}$

b) $S - 2a^2 = 2ab \quad | :2a$

$\underline{\underline{b = \dfrac{S-2a^2}{2a}}} = \underline{\underline{\dfrac{1}{2}\dfrac{S}{a} - a}}$

c) $\begin{cases} 80 = 2a^2 + 2ab \\ a+b = 8 \Rightarrow b = 8-a \end{cases}$

$\Rightarrow 80 = 2a^2 + 2a(8-a)$

$80 = 2a^2 + 16a - 2a^2$

$80 = 16a$

$\underline{\underline{a = 5 \text{ cm}}}$

$b = 8 - a$

$\underline{\underline{b = 3 \text{ cm}}}$