Gymnase de Burier

Équations du deuxième degré - Corrigé

1 C

Duy Nhien Lam Binh

(Mai 2026)

Exercice 10.1

Résoudre sans formule les équations suivantes.

a) $x^2 = 1$

b) $x^2 = 4$

c) $x^2 = 10$

d) $x^2 = 25$

e) $x^2 = 100$

f) $x^2 = 169$

g) $x^2 = 625$

h) $x^2 = -4$

i) $x^2 = -25$

j) $x^2 = 0$

a) $x^2 = 1$
$x = \pm\sqrt{1}$
$x = \pm 1$
$S = \{-1\ ;1\}$

b) $x^2 = 4$
$x = \pm\sqrt{4}$
$x = \pm 2$
$S = \{-2\ ;2\}$

c) $x^2 = 10$
$x = \pm\sqrt{10}$
$S = \left\{-\sqrt{10}\ ;\sqrt{10}\right\}$

d) $x^2 = 25$
$x = \pm\sqrt{25}$
$x = \pm 5$
$S = \{-5\ ;5\}$

e) $x^2 = 100$
$x = \pm\sqrt{100}$
$x = \pm 10$
$S = \{-10\ ;10\}$

f) $x^2 = 169$
$x = \pm\sqrt{169}$
$x = \pm 13$
$S = \{-13\ ;13\}$

g) $x^2 = 625$
$x = \pm\sqrt{625}$
$x = \pm 25$
$S = \{-25\ ;25\}$

h) $x^2 = -4$
Impossible !
$S = \varnothing$

i) $x^2 = -25$
Impossible !
$S = \varnothing$

j) $x^2 = 0$
$x = \pm\sqrt{0}$
$x = \pm 0$
$x = 0$
$S = \{0\}$

Exercice 10.2

Résoudre sans formule les équations suivantes.

a) $5x^2 - 80 = 0$

b) $x^2 + 5x = 0$

c) $(x+4)^2 = 0$

d) $5x^2 + 5 = 0$

e) $(x-2)^2 = 25$

f) $12x^2 = 0$

g) $(x+1)^2 + 9 = 0$

h) $x^2 + 5x + 4 = 0$

a) $5x^2 - 80 = 0$
$5x^2 = 80$
$x^2 = 16$
$x = \pm 4$
$S = \{-4\ ;4\}$

b) $x^2 + 5x = 0$ | Mise en évidence
$x(x+5) = 0$
$x = 0$ ou $x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$
$S = \{-5\ ;0\}$

c) $(x+4)^2 = 0$
$x + 4 = \pm 0$
$x + 4 = 0$
$x = -4$
$S = \{-4\}$

d) $5x^2 + 5 = 0$
$5x^2 = -5$
$x^2 = -1$
Impossible !
$S = \varnothing$

e) $(x-2)^2 = 25$
$x - 2 = \pm 5$
Si $x - 2 = 5 \Rightarrow x = 7$
Si $x - 2 = -5 \Rightarrow x = -3$
$S = \{-3\ ; 7\}$

f) $12x^2 = 0$
$x^2 = 0$
$x = 0$
$S = \{0\}$

g) $(x+1)^2 + 9 = 0$
$(x+1)^2 = -9$
Impossible !
$S = \varnothing$

h) $x^2+5x+4 = 0$ | Trinôme unitaire
$\alpha \cdot \beta = 4$ et $\alpha + \beta = 5$
$\alpha = 1$, $\beta = 4$
$(x+1)(x+4) = 0$
$x = -1$ ou $x = -4$
$S = \{-4\ ; -1\}$

Exercice 10.3

Résoudre sans formule les équations suivantes.

a) $3x^2 = 3072$
b) $3x^2 + 4x = 0$
c) $5x^2 = 2x$
d) $x(x+1) = 2(x+1)$
e) $x^2 - 36 = 0$
f) $(x+1)^2 = 4$
g) $(x-3)^2 = 9$
h) $(x-2)^2 = -25$
i) $(5x+7)^2 = 0$
j) $9(x-4)^2 = 49$

a) $3x^2 = 3072$
$x^2 = 1024$
$x = \pm 32$
$S = \{-32\ ; 32\}$

b) $3x^2 + 4x = 0$ | Mise en évidence
$x(3x+4) = 0$
$x = 0$ ou $3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{4}{3}$
$S = \left\{-\dfrac{4}{3}\ ; 0\right\}$

c) $5x^2 = 2x$
$5x^2 - 2x = 0$ | Mise en évidence
$x(5x-2) = 0$
$x = 0$ ou $5x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{5}$
$S = \left\{0\ ; \dfrac{2}{5}\right\}$

d) $x(x+1) = 2(x+1)$

$x = 2$ ou $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$
$S = \{-1\ ; 2\}$

e) $x^2 - 36 = 0$
$x^2 = 36$
$x = \pm 6$
$S = \{-6\ ; 6\}$

f) $(x+1)^2 = 4$
$x+1 = \pm 2$
Si $x+1 = 2 \Rightarrow x = 1$
Si $x+1 = -2 \Rightarrow x = -3$
$S = \{-3\ ; 1\}$

g) $(x-3)^2 = 9$
$x-3 = \pm 3$
Si $x-3 = 3 \Rightarrow x = 6$
Si $x-3 = -3 \Rightarrow x = 0$
$S = \{0\ ; 6\}$

h) $(x-2)^2 = -25$
Impossible !
$S = \varnothing$

i) $(5x+7)^2 = 0$
$5x+7 = 0$
$x = -\dfrac{7}{5}$
$S = \left\{-\dfrac{7}{5}\right\}$

j) $9(x-4)^2 = 49$
$3(x-4) = \pm 7$
$3x-12 = \pm 7$
Si $3x-12 = 7 \Rightarrow 3x = 19 \Rightarrow x = \dfrac{19}{3}$
Si $3x-12 = -7 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \dfrac{5}{3}$
$S = \left\{\dfrac{5}{3}\ ; \dfrac{19}{3}\right\}$

10.1 Résolution par factorisation

Exercice 10.4

Résoudre les équations suivantes par mise en évidence.

a) $x^2 + 7x = 0$

b) $x^2 = 13x$

c) $3x^2 - 24x = 0$

d) $20x = -8x^2$

e) $\dfrac{10x^2}{3} = 11x$

f) $\dfrac{1}{4}x^2 = \dfrac{7}{5}x$

g) $\dfrac{3x}{10}x + \dfrac{10x}{3} = 0$

h) $4x^2 + 2x - 5 = 5\left(x^2 - 1\right)$

a) $x^2 + 7x = 0$
$x(x+7) = 0$
$x = 0$ ou $x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = -7$
$S = \{-7\ ; 0\}$

b) $x^2 = 13x$
$x^2 - 13x = 0$
$x(x-13) = 0$
$x = 0$ ou $x - 13 = 0 \Leftrightarrow x = 13$
$S = \{0\ ; 13\}$

c) $3x^2 - 24x = 0$
$3x(x-8) = 0$
$3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 8$
$S = \{0\ ; 8\}$

d) $20x = -8x^2$
$8x^2 + 20x = 0$
$2x^2 + 5x = 0$
$x(2x+5) = 0$
$x = 0$ ou $2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{2}$
$S = \left\{-\dfrac{5}{2}\ ; 0\right\}$

e) $\dfrac{10x^2}{3} = 11x$
$10x^2 = 33x$
$10x^2 - 33x = 0$
$x(10x - 33) = 0$
$x = 0$ ou $10x - 33 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{33}{10}$
$S = \left\{0\ ; \dfrac{33}{10}\right\}$

f) $\dfrac{1}{4}x^2 = \dfrac{7}{5}x$
$\dfrac{x^2}{4} = \dfrac{7x}{5}$
$\dfrac{5 \cdot x^2}{20} = \dfrac{4 \cdot 7x}{20}$
$5x^2 = 28x$
$5x^2 - 28x = 0$
$x(5x - 28) = 0$
$x = 0$ ou $5x - 28 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{28}{5}$
$S = \left\{0\ ; \dfrac{28}{5}\right\}$

g) $\dfrac{3x}{10}x + \dfrac{10x}{3} = 0$
$\dfrac{3x^2}{10} + \dfrac{10x}{3} = 0$
$\dfrac{3 \cdot 3x^2}{30} + \dfrac{10 \cdot 10x}{30} = 0$

$9x^2 + 100x = 0$
$x(9x + 100) = 0$
$x = 0 \text{ ou } 9x + 100 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{100}{9}$
$S = \left\{-\dfrac{100}{9}\ ; 0\right\}$

h) $4x^2 + 2x - 5 = 5\left(x^2 - 1\right)$

$4x^2 + 2x - 5 = 5x^2 - 5$
$-x^2 + 2x = 0$
$x^2 - 2x = 0$
$x(x - 2) = 0$
$x = 0 \text{ ou } x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
$S = \{0\ ; 2\}$

Exercice 10.5

Résoudre les équations suivantes à l'aide de la factorisation des trinômes unitaires.

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$

b) $x^2 - 5x + 6 = 0$

c) $x^2 - x - 6 = 0$

d) $x^2 + x - 6 = 0$

e) $x^2 + 3x + 2 = 0$

f) $x^2 + 2x - 3 = 0$

g) $y^2 + 7y + 12 = 0$

h) $y^2 + 15y + 56 = 0$

i) $x^2 + x - 56 = 0$

j) $x^2 - 18x + 81 = 0$

k) $a^2 + 3a - 54 = 0$

l) $a^2 - 10a + 21 = 0$

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$
$\alpha \cdot \beta = 6$ et $\alpha + \beta = 5$
$\alpha = 2$, $\beta = 3$
$(x + 2)(x + 3) = 0$
$x = -2$ ou $x = -3$
$S = \{-3 ; -2\}$

b) $x^2 - 5x + 6 = 0$
$\alpha \cdot \beta = 6$ et $\alpha + \beta = -5$
$\alpha = -2$, $\beta = -3$
$(x - 2)(x - 3) = 0$
$x = 2$ ou $x = 3$
$S = \{2 ; 3\}$

c) $x^2 - x - 6 = 0$
$\alpha \cdot \beta = -6$ et $\alpha + \beta = -1$
$\alpha = -3$, $\beta = 2$
$(x - 3)(x + 2) = 0$
$x = 3$ ou $x = -2$
$S = \{-2 ; 3\}$

d) $x^2 + x - 6 = 0$
$\alpha \cdot \beta = -6$ et $\alpha + \beta = 1$
$\alpha = 3$, $\beta = -2$
$(x + 3)(x - 2) = 0$
$x = -3$ ou $x = 2$
$S = \{-3 ; 2\}$

e) $x^2 + 3x + 2 = 0$
$\alpha \cdot \beta = 2$ et $\alpha + \beta = 3$
$\alpha = 1$, $\beta = 2$
$(x + 1)(x + 2) = 0$
$x = -1$ ou $x = -2$
$S = \{-2 ; -1\}$

f) $x^2 + 2x - 3 = 0$
$\alpha \cdot \beta = -3$ et $\alpha + \beta = 2$
$\alpha = 3$, $\beta = -1$
$(x + 3)(x - 1) = 0$
$x = -3$ ou $x = 1$
$S = \{-3 ; 1\}$

g) $y^2 + 7y + 12 = 0$
$\alpha \cdot \beta = 12$ et $\alpha + \beta = 7$
$\alpha = 3$, $\beta = 4$
$(y + 3)(y + 4) = 0$
$y = -3$ ou $y = -4$
$S = \{-4\ ;-3\}$

h) $y^2 + 15y + 56 = 0$
$\alpha \cdot \beta = 56$ et $\alpha + \beta = 15$
$\alpha = 8$, $\beta = 7$
$(y + 8)(y + 7) = 0$
$y = -8$ ou $y = -7$
$S = \{-8\ ;-7\}$

i) $x^2 + x - 56 = 0$
$\alpha \cdot \beta = -56$ et $\alpha + \beta = 1$
$\alpha = 8$, $\beta = -7$
$(x + 8)(x - 7) = 0$
$x = -8$ ou $x = 7$
$S = \{-8\ ;7\}$

j) $x^2 - 18x + 81 = 0$ ou $(x - 9)^2 = 0$
$\alpha \cdot \beta = 81$ et $\alpha + \beta = -18$
$\alpha = -9$, $\beta = -9$
$(x - 9)(x - 9) = 0$
$x = 9$ ou $x = 9$
$S = \{9\}$

k) $a^2 + 3a - 54 = 0$
$\alpha \cdot \beta = -54$ et $\alpha + \beta = 3$
$\alpha = 9$, $\beta = -6$
$(a + 9)(a - 6) = 0$
$a = -9$ ou $a = 6$
$S = \{-9\ ;6\}$

l) $a^2 - 10a + 21 = 0$
$\alpha \cdot \beta = 21$ et $\alpha + \beta = -10$
$\alpha = -3$, $\beta = -7$
$(a - 3)(a - 7) = 0$
$a = 3$ ou $a = 7$
$S = \{3\ ;7\}$

Exercice 10.6

Résoudre les équations suivantes à l'aide de la factorisation des trinômes unitaires.

a) $2x^2 - 30x + 88 = 0$

b) $3x = 10 - x^2$

c) $\frac{1}{5}x^2 + 4x = -20$

d) $(x + 7)(x + 3) = 12$

e) $5x^2 - 7x + 24 = 4x^2 + 4x - 4$

f) $\frac{x^2 - 23}{8} = \frac{11x + 3}{8}$

a) $2x^2 - 30x + 88 = 0$
$x^2 - 15x + 44 = 0$
$\alpha \cdot \beta = 44$ et $\alpha + \beta = -15$
$\alpha = -11$, $\beta = -4$
$(x - 11)(x - 4) = 0$
$x = 11$ ou $x = 4$
$S = \{4\ ;11\}$

b) $3x = 10 - x^2$
$x^2 + 3x - 10 = 0$
$\alpha \cdot \beta = -10$ et $\alpha + \beta = 3$
$\alpha = 5$, $\beta = -2$
$(x + 5)(x - 2) = 0$
$x = -5$ ou $x = 2$
$S = \{-5\ ;2\}$

c) $\frac{1}{5}x^2 + 4x = -20$
$x^2 + 20x = -100$
$x^2+20x+100 = 0$ ou $(x+10)^2 = 0$
$\alpha \cdot \beta = 100$ et $\alpha + \beta = 20$
$\alpha = 10$, $\beta = 10$
$(x + 10)(x + 10) = 0$
$x = -10$ ou $x = -10$
$S = \{-10\}$

d) $(x + 7)(x + 3) = 12$
$x^2 + 3x + 7x + 21 = 12$
$x^2 + 10x + 9 = 0$
$\alpha \cdot \beta = 9$ et $\alpha + \beta = 10$
$\alpha = 1$, $\beta = 9$
$(x + 1)(x + 9) = 0$
$x = -1$ ou $x = -9$
$S = \{-9 ; -1\}$

e) $5x^2 - 7x + 24 = 4x^2 + 4x - 4$
$x^2 - 11x + 28 = 0$
$\alpha \cdot \beta = 28$ et $\alpha + \beta = -11$
$\alpha = -4$, $\beta = -7$
$(x - 4)(x - 7) = 0$
$x = 4$ ou $x = 7$
$S = \{4 ; 7\}$

f) $\dfrac{x^2 - 23}{8} = \dfrac{11x + 3}{8}$
$x^2 - 23 = 11x + 3$
$x^2 - 11x - 26 = 0$
$\alpha \cdot \beta = -26$ et $\alpha + \beta = -11$
$\alpha = -13$, $\beta = 2$
$(x - 13)(x + 2) = 0$
$x = 13$ ou $x = -2$
$S = \{-2 ; 13\}$

Exercice 10.7

Résoudre les équations suivantes par factorisation.

a) $(x-1)^2 = 6x+1$

b) $7x^2 + 9x = x^2 - 9x + 60$

c) $\frac{5}{2}\left(x^2+5x\right) + 5x + 30 = 0$

d) $\frac{x^2-3}{7} - \frac{x-6}{14} = 0$

e) $\frac{x^2-11}{5} + 3 = x$

f) $\frac{1}{9}x^2 + 4x - 3 = 3(x-1)$

a) $(x-1)^2 = 6x+1$
$x^2 - 2x + 1 = 6x + 1$
$x^2 - 8x = 0$ | Mise en évidence
$x(x-8) = 0$
$x = 0$ ou $x = 8$
$S = \{0\ ;8\}$

b) $7x^2 + 9x = x^2 - 9x + 60$
$6x^2 + 18x - 60 = 0$
$x^2 + 3x - 10 = 0$ | Trinôme unitaire
$\alpha \cdot \beta = -10$ et $\alpha + \beta = 3$
$\alpha = 5$, $\beta = -2$
$(x+5)(x-2) = 0$
$x = -5$ ou $x = 2$
$S = \{-5\ ;2\}$

c) $\frac{5}{2}\left(x^2+5x\right) + 5x + 30 = 0$
$5(x^2+5x) + 10x + 60 = 0$
$5x^2 + 25x + 10x + 60 = 0$
$5x^2 + 35x + 60 = 0$
$x^2 + 7x + 12 = 0$ | Trinôme unitaire
$\alpha \cdot \beta = 12$ et $\alpha + \beta = 7$
$\alpha = 3$, $\beta = 4$
$(x+3)(x+4) = 0$
$x = -3$ ou $x = -4$
$S = \{-4\ ;-3\}$

d) $\dfrac{x^2-3}{7}-\dfrac{x-6}{14}=0$

$\dfrac{2(x^2-3)}{14}-\dfrac{x-6}{14}=0$

$2(x^2-3)-(x-6)=0$

$2x^2-6-x+6=0$

$2x^2-x=0$ | Mise en évidence

$x(2x-1)=0$

$x=0$ ou $2x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

$S=\left\{0\ ;\dfrac{1}{2}\right\}$

e) $\dfrac{x^2-11}{5}+3=x$

$\dfrac{x^2-11}{5}+\dfrac{15}{5}=\dfrac{5x}{5}$

$x^2-11+15=5x$

$x^2-5x+4=0$ | Trinôme unitaire

$\alpha\cdot\beta=4$ et $\alpha+\beta=-5$

$\alpha=-1,\ \beta=-4$

$(x-1)(x-4)=0$

$x=1$ ou $x=4$

$S=\{1\ ;4\}$

f) $\dfrac{1}{9}x^2+4x-3=3(x-1)$

$\dfrac{1}{9}x^2+4x-3=3x-3$

$\dfrac{1}{9}x^2+x=0$

$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{9x}{9}=0$

$x^2+9x=0$ | Mise en évidence

$x(x+9)=0$

$x=0$ ou $x+9=0 \Leftrightarrow x=-9$

$S=\{-9\ ;0\}$

10.2 Résolution par la formule générale

Exercice 10.8

Résoudre les équations suivantes à l'aide de la formule générale.

a) $x^2 + 12x + 35 = 0$

b) $12x^2 - 60x + 75 = 0$

c) $-x^2 - 3 + 2x = 0$

d) $10y^2 + 31y - 14 = 0$

e) $x^2 + 6x + 9 = 0$

f) $25x - 25 - 6x^2 = 0$

g) $7x^2 - 252 = 0$

h) $7x^2 + 252 = 0$

i) $4x^2 = 0$

j) $2x^2 - 3x + 2 = 0$

k) $2x^2 - 3x - 2 = 0$

l) $9t^2 + 48t + 64 = 0$

m) $-72 + 26x - 2x^2 = 0$

n) $3x^2 + 3x - 6 = 0$

o) $3x^2 + 3x + 6 = 0$

p) $20x^2 + 15x = 0$

q) $x^2 + 4 = 0$

r) $z^2 - 14z + 49 = 0$

s) $z^2 - 14z - 49 = 0$

t) $-8x^2 + x + 3 = 0$

a) $x^2 + 12x + 35 = 0$

$a = 1 \quad b = 12 \quad c = 35$

$\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 35 = 144 - 140 = 4$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-12 \pm 2}{2 \cdot 1} = \frac{-12 \pm 2}{2} = \begin{array}{l} / \ \dfrac{-12+2}{2} = \dfrac{-10}{2} = -5 \\ \backslash \ \dfrac{-12-2}{2} = \dfrac{-14}{2} = -7 \end{array}$$

$S = \{-7\ ; -5\}$

Variante :

$x^2 + 12x + 35 = 0 \qquad |$ Trinôme unitaire

$\alpha \cdot \beta = 35$ et $\alpha + \beta = 12$

$\alpha = 5,\ \beta = 7$

$(x+5)(x+7)=0$
$x=-5$ ou $x=-7$
$S=\{-7\,;-5\}$

b) $12x^2-60x+75=0$
$4x^2-20x+25=0$

$a=4 \quad b=-20 \quad c=25$

$\Delta=b^2-4ac=(-20)^2-4\cdot4\cdot25=400-400=0$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{0}=0$

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{20\pm0}{2\cdot4}=\dfrac{20}{8}=\dfrac{5}{2}=2{,}5 \qquad \left(\text{ou }\ x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-20}{2\cdot4}=\dfrac{20}{8}=\dfrac{5}{2}\right)$

$S=\left\{\dfrac{5}{2}\right\}$

Variante :

$4x^2-20x+25=0 \qquad \mid (A-B)^2=A^2-2AB+B^2$
$(2x-5)^2=0$
$2x-5=0$
$x=\dfrac{5}{2}$
$S=\left\{\dfrac{5}{2}\right\}$

c) $-x^2 - 3 + 2x = 0$
$x^2 - 2x + 3 = 0$
$a = 1 \quad b = -2 \quad c = 3$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8$

$S = \varnothing$

d) $10y^2 + 31y - 14 = 0$
$a = 10 \quad b = 31 \quad c = -14$

$\Delta = b^2 - 4ac = 31^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-14) = 961 + 560 = 1521$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{1521} = 39$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-31 \pm 39}{2 \cdot 10} = \frac{-31 \pm 39}{20} = \begin{array}{l} / \ \dfrac{-31 + 39}{20} = \dfrac{8}{20} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4 \\ \backslash \ \dfrac{-31 - 39}{20} = \dfrac{-70}{20} = -\dfrac{7}{2} = -3{,}5 \end{array}$$

$S = \left\{ -\frac{7}{2} \,;\, \frac{2}{5} \right\}$

e) $x^2 + 6x + 9 = 0$
$a = 1 \quad b = 6 \quad c = 9$

$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{0} = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 \pm 0}{2 \cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3 \qquad \left(\text{ou } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot 1} = -\frac{6}{2} = -3\right)$$

$S = \{-3\}$

Variante :

$x^2 + 6x + 9 = 0 \qquad \mid (A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
$(x + 3)^2 = 0$
$x + 3 = 0$

$x = -3$

$S = \{-3\}$

f) $25x - 25 - 6x^2 = 0$
$6x^2 - 25x + 25 = 0$
$a = 6 \quad b = -25 \quad c = 25$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-25)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 25 = 625 - 600 = 25$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{25 \pm 5}{2 \cdot 6} = \frac{25 \pm 5}{12} = \begin{array}{l} / \; \dfrac{25+5}{12} = \dfrac{30}{12} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5 \\ \backslash \; \dfrac{25-5}{12} = \dfrac{20}{12} = \dfrac{5}{3} = 1{,}\overline{6} \end{array}$$

$S = \left\{\frac{5}{3} \, ; \frac{5}{2}\right\}$

Variante :

$25x - 25 - 6x^2 = 0$
$-6x^2 + 25x - 25 = 0$
$a = -6 \quad b = 25 \quad c = -25$

$\Delta = b^2 - 4ac = 25^2 - 4 \cdot (-6) \cdot (-25) = 625 - 600 = 25$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-25 \pm 5}{2 \cdot (-6)} = \frac{-25 \pm 5}{-12} = \begin{array}{l} / \; \dfrac{-25+5}{-12} = \dfrac{-20}{-12} = \dfrac{5}{3} \\ \backslash \; \dfrac{-25-5}{-12} = \dfrac{-30}{-12} = \dfrac{5}{2} \end{array}$$

$S = \left\{\frac{5}{3} \, ; \frac{5}{2}\right\}$

g) $7x^2 - 252 = 0$

$x^2 - 36 = 0$

$a = 1 \quad b = 0 \quad c = -36$

$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36) = 0 + 144 = 144$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{144} = 12$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0 \pm 12}{2 \cdot 1} = \frac{\pm 12}{2} = \begin{array}{l} / \ \frac{12}{2} = 6 \\ \backslash \ \frac{-12}{2} = -6 \end{array}$$

$S = \{-6\ ; 6\}$

Variante 1 :

$7x^2 - 252 = 0$

$a = 7 \quad b = 0 \quad c = -252$

$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-252) = 0 + 7056 = 7056$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{7056} = 84$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0 \pm 84}{2 \cdot 7} = \frac{\pm 84}{14} = \begin{array}{l} / \ \frac{84}{14} = 6 \\ \backslash \ \frac{-84}{14} = -6 \end{array}$$

$S = \{-6\ ; 6\}$

Variante 2 :

$7x^2 - 252 = 0$

$x^2 - 36 = 0$

$x^2 = 36$

$x = \pm 6$

$S = \{-6\ ; 6\}$

Variante 3 :

$7x^2 - 252 = 0$

$x^2 - 36 = 0 \qquad | \ A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$

$(x+6)(x-6) = 0$

$x = -6$ ou $x = 6$

$S = \{-6\ ; 6\}$

h) $7x^2 + 252 = 0$
$x^2 + 36 = 0$
$a = 1 \quad b = 0 \quad c = 36$

$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 0 - 144 = -144$

$S = \varnothing$

Variante 1 :

$7x^2 + 252 = 0$
$a = 7 \quad b = 0 \quad c = 252$

$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 7 \cdot 252 = 0 - 7056 = -7056$

$S = \varnothing$

Variante 2 :

$7x^2 + 252 = 0$
$x^2 + 36 = 0$
$x^2 = -36$
Impossible !
$S = \varnothing$

i) $4x^2 = 0$

$x^2 = 0$

$a = 1 \quad b = 0 \quad c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 0 - 0 = 0$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{0} = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0 \pm 0}{2 \cdot 1} = \frac{0}{2} = 0 \qquad \left(\text{ou } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \cdot 1} = -\frac{0}{2} = -0 = 0\right)$$

$S = \{0\}$

Variante 1 :

$4x^2 = 0$

$a = 4 \quad b = 0 \quad c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 4 \cdot 0 = 0 - 0 = 0$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{0} = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0 \pm 0}{2 \cdot 4} = \frac{0}{8} = 0 \qquad \left(\text{ou } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \cdot 4} = -\frac{0}{8} = -0 = 0\right)$$

$S = \{0\}$

Variante 2 :

$4x^2 = 0$

$x^2 = 0$

$x = 0$

$S = \{0\}$

j) $2x^2 - 3x + 2 = 0$

$a = 2 \quad b = -3 \quad c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9 - 16 = -7$

$S = \varnothing$

k) $2x^2 - 3x - 2 = 0$

$a = 2 \quad b = -3 \quad c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \dfrac{3+5}{4} = \dfrac{8}{4} = 2 \\ \dfrac{3-5}{4} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$S = \left\{-\dfrac{1}{2}\,;2\right\}$

l) $9t^2 + 48t + 64 = 0$

$a = 9 \quad b = 48 \quad c = 64$

$\Delta = b^2 - 4ac = 48^2 - 4 \cdot 9 \cdot 64 = 2304 - 2304 = 0$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{0} = 0$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-48 \pm 0}{2 \cdot 9} = \frac{-48}{18} = -\frac{8}{3} \qquad \left(\text{ou } t = -\frac{b}{2a} = -\frac{48}{2 \cdot 9} = -\frac{48}{18} = -\frac{8}{3}\right)$$

$S = \left\{-\dfrac{8}{3}\right\}$

Variante :

$9t^2 + 48t + 64 = 0 \qquad | \ (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$(3t + 8)^2 = 0$

$3t + 8 = 0$

$t = -\dfrac{8}{3}$

$S = \left\{-\dfrac{8}{3}\right\}$

m) $-72+26x-2x^2=0$

$2x^2-26x+72=0$

$x^2-13x+36=0$

$a=1 \quad b=-13 \quad c=36$

$\Delta=b^2-4ac=(-13)^2-4\cdot1\cdot36=169-144=25$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{25}=5$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{13\pm5}{2\cdot1}=\frac{13\pm5}{2}=\begin{array}{l} / \ \dfrac{13+5}{2}=\dfrac{18}{2}=9 \\ \backslash \ \dfrac{13-5}{2}=\dfrac{8}{2}=4 \end{array}$$

$S=\{4\,;9\}$

Variante 1 :

$-72+26x-2x^2=0$

$-2x^2+26x-72=0$

$a=-2 \quad b=26 \quad c=-72$

$\Delta=b^2-4ac=26^2-4\cdot(-2)\cdot(-72)=676-576=100$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{100}=10$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-26\pm10}{2\cdot(-2)}=\frac{-26\pm10}{-4}=\begin{array}{l} / \ \dfrac{-26+10}{-4}=\dfrac{-16}{-4}=4 \\ \backslash \ \dfrac{-26-10}{-4}=\dfrac{-36}{-4}=9 \end{array}$$

$S=\{4\,;9\}$

Variante 2 :

$x^2-13x+36=0 \qquad |$ Trinôme unitaire

$\alpha\cdot\beta=36$ et $\alpha+\beta=-13$

$\alpha=-9,\ \beta=-4$

$(x-9)(x-4)=0$

$x=9$ ou $x=4$

$S=\{4\,;9\}$

n) $3x^2 + 3x - 6 = 0$
$x^2 + x - 2 = 0$
$a = 1 \quad b = 1 \quad c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm 3}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{array}{l} / \ \dfrac{-1+3}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ \backslash \ \dfrac{-1-3}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \end{array}$$

$S = \{-2\ ; 1\}$

Variante 1 :

$3x^2 + 3x - 6 = 0$
$a = 3 \quad b = 3 \quad c = -6$

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6) = 9 + 72 = 81$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{81} = 9$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm 9}{2 \cdot 3} = \frac{-3 \pm 9}{6} = \begin{array}{l} / \ \dfrac{-3+9}{6} = \dfrac{6}{6} = 1 \\ \backslash \ \dfrac{-3-9}{6} = \dfrac{-12}{6} = -2 \end{array}$$

$S = \{-2\ ; 1\}$

Variante 2 :

$x^2 + x - 2 = 0 \qquad |$ Trinôme unitaire
$\alpha \cdot \beta = -2$ et $\alpha + \beta = 1$
$\alpha = 2, \beta = -1$
$(x + 2)(x - 1) = 0$
$x = -2$ ou $x = 1$
$S = \{-2\ ; 1\}$

o) $3x^2+3x+6=0$
$x^2+x+2=0$
$a=1 \quad b=1 \quad c=2$

$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\cdot 1\cdot 2=1-8=-7$

$S=\varnothing$

Variante :

$3x^2+3x+6=0$
$a=3 \quad b=3 \quad c=6$

$\Delta=b^2-4ac=3^2-4\cdot 3\cdot 6=9-72=-63$

$S=\varnothing$

p) $20x^2+15x=0$
$4x^2+3x=0$
$a=4 \quad b=3 \quad c=0$

$\Delta=b^2-4ac=3^2-4\cdot 4\cdot 0=9-0=9$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{9}=3$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3\pm 3}{2\cdot 4}=\frac{-3\pm 3}{8}=\begin{array}{l} / \ \dfrac{-3+3}{8}=\dfrac{0}{8}=0 \\ \backslash \ \dfrac{-3-3}{8}=\dfrac{-6}{8}=-\dfrac{3}{4}=-0{,}75 \end{array}$$

$S=\left\{-\frac{3}{4}\,;0\right\}$

Variante 1 :

$20x^2+15x=0$
$a=20 \quad b=15 \quad c=0$

$\Delta=b^2-4ac=15^2-4\cdot 20\cdot 0=225-0=225$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{225}=15$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-15\pm 15}{2\cdot 20}=\frac{-15\pm 15}{40}=\begin{array}{l} / \ \dfrac{-15+15}{40}=\dfrac{0}{40}=0 \\ \backslash \ \dfrac{-15-15}{40}=\dfrac{-30}{40}=-\dfrac{3}{4}=-0{,}75 \end{array}$$

$S=\left\{-\frac{3}{4}\,;0\right\}$

Variante 2 :

$4x^2+3x=0 \qquad |$ Mise en évidence
$x(4x+3)=0$
$x=0$ ou $4x+3=0 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{4}$
$S=\left\{-\frac{3}{4}\,;0\right\}$

q) $x^2 + 4 = 0$

$a = 1 \quad b = 0 \quad c = 4$

$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0 - 16 = -16$

$S = \varnothing$

Variante :

$x^2 = -4$

Impossible !

$S = \varnothing$

r) $z^2 - 14z + 49 = 0$

$a = 1 \quad b = -14 \quad c = 49$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 49 = 196 - 196 = 0$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{0} = 0$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{14 \pm 0}{2 \cdot 1} = \frac{14}{2} = 7 \qquad \left(\text{ou } z = -\frac{b}{2a} = -\frac{-14}{2 \cdot 1} = \frac{14}{2} = 7\right)$$

$S = \{7\}$

Variante :

$z^2 - 14z + 49 = 0 \qquad | \ (A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

$(z - 7)^2 = 0$

$z - 7 = 0$

$z = 7$

$S = \{7\}$

s) $z^2 - 14z - 49 = 0$

$a = 1 \quad b = -14 \quad c = -49$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-49) = 196 + 196 = 392$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{392} = \sqrt{4 \cdot 98} = \sqrt{4 \cdot 2 \cdot 49} = \sqrt{4}\sqrt{2}\sqrt{49} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 7 = 14\sqrt{2}$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{14 \pm 14\sqrt{2}}{2 \cdot 1} = \frac{14 \pm 14\sqrt{2}}{2} = \frac{2(7 \pm 7\sqrt{2})}{2} = 7 \pm 7\sqrt{2} = \begin{array}{l} / \ 7 + 7\sqrt{2} \\ \backslash \ 7 - 7\sqrt{2} \end{array}$$

$S = \left\{7 - 7\sqrt{2}\,;7 + 7\sqrt{2}\right\}$

t) $-8x^2 + x + 3 = 0$

$8x^2 - x - 3 = 0$

$a = 8 \quad b = -1 \quad c = -3$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-3) = 1 + 96 = 97$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{97}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{97}}{2 \cdot 8} = \frac{1 \pm \sqrt{97}}{16} = \begin{array}{l} / \ \dfrac{1+\sqrt{97}}{16} \\ \backslash \ \dfrac{1-\sqrt{97}}{16} \end{array}$$

$$S = \left\{ \frac{1-\sqrt{97}}{16} \, ; \frac{1+\sqrt{97}}{16} \right\}$$

Variante :

$-8x^2 + x + 3 = 0$

$a = -8 \quad b = 1 \quad c = 3$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot (-8) \cdot 3 = 1 + 96 = 97$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{97}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{97}}{2 \cdot (-8)} = \frac{-1 \pm \sqrt{97}}{-16} = \begin{array}{l} / \ \dfrac{-1+\sqrt{97}}{-16} = \dfrac{-\left(1-\sqrt{97}\right)}{-16} = \dfrac{1-\sqrt{97}}{16} \\ \backslash \ \dfrac{-1-\sqrt{97}}{-16} = \dfrac{-\left(1+\sqrt{97}\right)}{-16} = \dfrac{1+\sqrt{97}}{16} \end{array}$$

$$S = \left\{ \frac{1-\sqrt{97}}{16} \, ; \frac{1+\sqrt{97}}{16} \right\}$$

Exercice 10.9

Résoudre les équations suivantes avec la formule générale.

a) $x^2 + 10x + 25 = 0$

b) $6x^2 - x = 2$

c) $5x^2 + 13x = 6$

d) $\frac{3}{2}x^2 - 4x - 14 = 0$

e) $24x + 9 = -16x^2$

f) $4x^2 + 81 = 24x$

g) $x^2 - 5x + 2 = 0$

h) $x^2 + 4x + 2 = 0$

a) $x^2 + 10x + 25 = 0$

$a = 1 \quad b = 10 \quad c = 25$

$\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 100 - 100 = 0$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{0} = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 \pm 0}{2 \cdot 1} = \frac{-10}{2} = -5 \qquad \left(\text{ou } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{2 \cdot 1} = -\frac{10}{2} = -5\right)$$

$S = \{-5\}$

Variante :

$x^2 + 10x + 25 = 0 \qquad | \ (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$(x+5)^2 = 0$

$x + 5 = 0$

$x = -5$

$S = \{-5\}$

b) $6x^2 - x = 2$

$6x^2 - x - 2 = 0$

$a = 6 \quad b = -1 \quad c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2) = 1 + 48 = 49$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm 7}{2 \cdot 6} = \frac{1 \pm 7}{12} = \begin{cases} \frac{1+7}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} = 0{,}\overline{6} \\ \frac{1-7}{12} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2} = -0{,}5 \end{cases}$$

$S = \left\{-\frac{1}{2} \ ; \frac{2}{3}\right\}$

c) $5x^2 + 13x = 6$

$5x^2 + 13x - 6 = 0$

$a = 5 \quad b = 13 \quad c = -6$

$\Delta = b^2 - 4ac = 13^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-6) = 169 + 120 = 289$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{289} = 17$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-13 \pm 17}{2 \cdot 5} = \frac{-13 \pm 17}{10} = \begin{array}{l} \diagup \ \dfrac{-13+17}{10} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4 \\ \diagdown \ \dfrac{-13-17}{10} = \dfrac{-30}{10} = -3 \end{array}$$

$S = \left\{-3 \ ; \frac{2}{5}\right\}$

d) $\dfrac{3}{2}x^2 - 4x - 14 = 0$

$3x^2 - 8x - 28 = 0$

$a = 3 \quad b = -8 \quad c = -28$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-28) = 64 + 336 = 400$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{400} = 20$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 \pm 20}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm 20}{6} = \begin{cases} \dfrac{8+20}{6} = \dfrac{28}{6} = \dfrac{14}{3} = 4{,}\overline{6} \\ \dfrac{8-20}{6} = \dfrac{-12}{6} = -2 \end{cases}$$

$S = \left\{-2\,;\,\dfrac{14}{3}\right\}$

Variante :

$\dfrac{3}{2}x^2 - 4x - 14 = 0$

$a = \dfrac{3}{2} \quad b = -4 \quad c = -14$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot \dfrac{3}{2} \cdot (-14) = 16 + 84 = 100$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{100} = 10$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm 10}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{4 \pm 10}{3} = \begin{cases} \dfrac{4+10}{3} = \dfrac{14}{3} = 4{,}\overline{6} \\ \dfrac{4-10}{3} = \dfrac{-6}{3} = -2 \end{cases}$$

$S = \left\{-2\,;\,\dfrac{14}{3}\right\}$

e) $24x + 9 = -16x^2$

$16x^2 + 24x + 9 = 0$

$a = 16 \quad b = 24 \quad c = 9$

$\Delta = b^2 - 4ac = 24^2 - 4 \cdot 16 \cdot 9 = 576 - 576 = 0$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{0} = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-24 \pm 0}{2 \cdot 16} = \frac{-24}{32} = -\frac{3}{4} = -0{,}75 \qquad \left(\text{ou } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{24}{2 \cdot 16} = -\frac{24}{32} = -\frac{3}{4}\right)$$

$S = \left\{-\dfrac{3}{4}\right\}$

Variante :

$16x^2 + 24x + 9 = 0 \qquad | \ (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$(4x+3)^2 = 0$

$4x + 3 = 0$

$x = -\dfrac{3}{4}$

$S = \left\{-\dfrac{3}{4}\right\}$

f) $4x^2 + 81 = 24x$
$4x^2 - 24x + 81 = 0$
$a = 4 \quad b = -24 \quad c = 81$
$\Delta = b^2 - 4ac = (-24)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 81 = 576 - 1296 = -720$
$S = \varnothing$

g) $x^2 - 5x + 2 = 0$
$a = 1 \quad b = -5 \quad c = 2$
$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 25 - 8 = 17$
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{17}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2} = \begin{array}{l} / \ \dfrac{5 + \sqrt{17}}{2} \\ \backslash \ \dfrac{5 - \sqrt{17}}{2} \end{array}$$

$$S = \left\{ \frac{5 - \sqrt{17}}{2} \, ; \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \right\}$$

h) $x^2 + 4x + 2 = 0$
$a = 1 \quad b = 4 \quad c = 2$
$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 16 - 8 = 8$
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(-2 \pm \sqrt{2})}{2} = -2 \pm \sqrt{2} = \begin{array}{l} / \ -2 + \sqrt{2} \\ \backslash \ -2 - \sqrt{2} \end{array}$$

$$S = \left\{ -2 - \sqrt{2} \, ; -2 + \sqrt{2} \right\}$$

Exercice 10.10
Résoudre les équations suivantes.

a) $(x+1)(x-3) = 2(23-x)$

b) $(x-2)^2 - 2x(x-3) = 3x - 26$

c) $x^2 + (x+2)^2 = (2x+1)^2 - x(x+2)$

d) $\dfrac{5-4x}{2} + \dfrac{3x^2-1}{3} = \dfrac{2x^2+5}{6}$

e) $\dfrac{15x^2}{4} - \dfrac{14}{3} = 2$

f) $\dfrac{5-8x}{2} - \dfrac{8x^2+5}{6} = \dfrac{1-12x^2}{3}$

a) $(x+1)(x-3) = 2(23-x)$
$x^2 - 3x + x - 3 = 46 - 2x$
$x^2 - 2x - 3 = 46 - 2x$
$x^2 - 49 = 0$
$x^2 = 49$
$x = \pm 7$
$S = \{-7\ ; 7\}$

Variante :

$x^2 - 49 = 0 \qquad | \ A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$
$(x+7)(x-7) = 0$
$x = -7$ ou $x = 7$
$S = \{-7\ ; 7\}$

b) $(x-2)^2 - 2x(x-3) = 3x - 26$
$x^2 - 4x + 4 - 2x^2 + 6x = 3x - 26$
$-x^2 + 2x + 4 = 3x - 26$
$-x^2 - x + 30 = 0$
$x^2 + x - 30 = 0$
$a = 1 \quad b = 1 \quad c = 30$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30) = 1 + 120 = 121$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{121} = 11$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm 11}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 11}{2} = \begin{array}{l} / \ \dfrac{-1+11}{2} = \dfrac{10}{2} = 5 \\ \backslash \ \dfrac{-1-11}{2} = \dfrac{-12}{2} = -6 \end{array}$$

$S = \{-6\,;5\}$

Variante :

$x^2 + x - 30 = 0 \qquad |$ Trinôme unitaire
$\alpha \cdot \beta = -30$ et $\alpha + \beta = 1$
$\alpha = 6,\ \beta = -5$
$(x+6)(x-5) = 0$
$x = -6$ ou $x = 5$
$S = \{-6\,;5\}$

c) $x^2 + (x+2)^2 = (2x+1)^2 - x(x+2)$
$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 4x^2 + 4x + 1 - x^2 - 2x$
$2x^2 + 4x + 4 = 3x^2 + 2x + 1$
$-x^2 + 2x + 3 = 0$
$x^2 - 2x - 3 = 0$
$a = 1 \quad b = -2 \quad c = -3$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm 4}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{array}{l} / \ \dfrac{2+4}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ \backslash \ \dfrac{2-4}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{array}$$

$S = \{-1\,;3\}$

Variante :

$x^2 - 2x - 3 = 0 \qquad |$ Trinôme unitaire
$\alpha \cdot \beta = -3$ et $\alpha + \beta = -2$
$\alpha = -3,\ \beta = 1$
$(x-3)(x+1) = 0$
$x = 3$ ou $x = -1$
$S = \{-1\,;3\}$

d) $\dfrac{5-4x}{2}+\dfrac{3x^2-1}{3}=\dfrac{2x^2+5}{6}$

$\dfrac{3(5-4x)}{6}+\dfrac{2(3x^2-1)}{6}=\dfrac{2x^2+5}{6}$

$3(5-4x)+2(3x^2-1)=2x^2+5$

$15-12x+6x^2-2=2x^2+5$

$6x^2-12x+13=2x^2+5$

$4x^2-12x+8=0$

$x^2-3x+2=0$

$a=1 \quad b=-3 \quad c=2$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2=9-8=1$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{1}=1$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3\pm 1}{2\cdot 1}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}\dfrac{3+1}{2}=\dfrac{4}{2}=2\\[2mm]\dfrac{3-1}{2}=\dfrac{2}{2}=1\end{cases}$$

$S=\{1\,;2\}$

Variante :

$x^2-3x+2=0 \qquad |$ Trinôme unitaire

$\alpha\cdot\beta=2$ et $\alpha+\beta=-3$

$\alpha=-1,\ \beta=-2$

$(x-1)(x-2)=0$

$x=1$ ou $x=2$

$S=\{1\,;2\}$

e) $\dfrac{15x^2}{4} - \dfrac{14}{3} = 2$

$\dfrac{3 \cdot 15x^2}{12} - \dfrac{4 \cdot 14}{12} = \dfrac{24}{12}$

$3 \cdot 15x^2 - 4 \cdot 14 = 24$

$45x^2 - 56 = 24$

$45x^2 - 80 = 0$

$9x^2 - 16 = 0$

$9x^2 = 16$

$x^2 = \dfrac{16}{9}$

$x = \pm\sqrt{\dfrac{16}{9}} = \pm\dfrac{4}{3}$

$S = \left\{-\dfrac{4}{3}\ ;\dfrac{4}{3}\right\}$

Variante :

$9x^2 - 16 = 0 \qquad | \ A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$

$(3x+4)(3x-4) = 0$

$x = -\dfrac{4}{3}$ ou $x = \dfrac{4}{3}$

$S = \left\{-\dfrac{4}{3}\ ;\dfrac{4}{3}\right\}$

f) $\dfrac{5-8x}{2} - \dfrac{8x^2+5}{6} = \dfrac{1-12x^2}{3}$

$\dfrac{3(5-8x)}{6} - \dfrac{8x^2+5}{6} = \dfrac{2(1-12x^2)}{6}$

$3(5-8x) - (8x^2+5) = 2(1-12x^2)$

$15 - 24x - 8x^2 - 5 = 2 - 24x^2$

$-8x^2 - 24x + 10 = -24x^2 + 2$

$16x^2 - 24x + 8 = 0$

$2x^2 - 3x + 1 = 0$

$a = 2 \quad b = -3 \quad c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3 \pm 1}{2 \cdot 2} = \dfrac{3 \pm 1}{4} = \begin{array}{l} / \ \dfrac{3+1}{4} = \dfrac{4}{4} = 1 \\ \backslash \ \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5 \end{array}$

$S = \left\{\dfrac{1}{2}\ ;1\right\}$

Exercice 10.11

Résoudre les équations suivantes.

a) $\dfrac{3x-7}{5}+\dfrac{x^2-9}{7}=2$

b) $\dfrac{1-8x}{2}-\dfrac{x^2-7}{4}+2x=0$

c) $\dfrac{x^2-3}{2}-\dfrac{x^2+1}{3}=\dfrac{x^2-11}{6}$

d) $\dfrac{3x+1}{8}-\dfrac{x^2+5}{4}=\dfrac{55}{2}$

e) $\dfrac{2x^2}{3}+\dfrac{7}{2}=\dfrac{x}{2}+8$

f) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{4x}{5}-19=\dfrac{76}{5}$

g) $\dfrac{5-4x}{2}+\dfrac{3x^2-1}{3}=\dfrac{2x^2+5}{6}$

h) $\dfrac{x^2-10}{9}-\dfrac{3(4-x)}{4}=\dfrac{2(x-3)}{3}$

a) $\dfrac{3x-7}{5}+\dfrac{x^2-9}{7}=2$

$\dfrac{7(3x-7)}{35}+\dfrac{5(x^2-9)}{35}=\dfrac{70}{35}$

$7(3x-7)+5(x^2-9)=70$

$21x-49+5x^2-45=70$

$5x^2+21x-94=70$

$5x^2+21x-164=0$

$a=5 \quad b=21 \quad c=-164$

$\Delta=b^2-4ac=21^2-4\cdot 5\cdot(-164)=441+3280=3721$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{3721}=61$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-21\pm 61}{2\cdot 5}=\frac{-21\pm 61}{10}=\begin{cases}\dfrac{-21+61}{10}=\dfrac{40}{10}=4\\[2mm] \dfrac{-21-61}{10}=\dfrac{-82}{10}=-\dfrac{41}{5}=-8{,}2\end{cases}$$

$S=\left\{-\dfrac{41}{5}\ ;4\right\}$

b) $\dfrac{1-8x}{2}-\dfrac{x^2-7}{4}+2x=0$

$\dfrac{2(1-8x)}{4}-\dfrac{x^2-7}{4}+\dfrac{4\cdot 2x}{4}=0$

$2(1-8x)-(x^2-7)+8x=0$

$2-16x-x^2+7+8x=0$

$-x^2-8x+9=0$

$x^2+8x-9=0$

$a=1 \quad b=8 \quad c=-9$

$\Delta=b^2-4ac=8^2-4\cdot 1\cdot(-9)=64+36=100$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{100} = 10$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8 \pm 10}{2 \cdot 1} = \dfrac{-8 \pm 10}{2} = \begin{array}{l} / \ \dfrac{-8+10}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ \backslash \ \dfrac{-8-10}{2} = \dfrac{-18}{2} = -9 \end{array}$

$S = \{-9\ ;1\}$

Variante :

$x^2 + 8x - 9 = 0$ | Trinôme unitaire

$\alpha \cdot \beta = -9$ et $\alpha + \beta = 8$

$\alpha = 9$, $\beta = -1$

$(x+9)(x-1) = 0$

$x = -9$ ou $x = 1$

$S = \{-9\ ;1\}$

c) $\dfrac{x^2-3}{2}-\dfrac{x^2+1}{3}=\dfrac{x^2-11}{6}$

$\dfrac{3(x^2-3)}{6}-\dfrac{2(x^2+1)}{6}=\dfrac{x^2-11}{6}$

$3(x^2-3)-2(x^2+1)=x^2-11$

$3x^2-9-2x^2-2=x^2-11$

$x^2-11=x^2-11$

$0=0$

$S=\mathbb{R}$

d) $\dfrac{3x+1}{8}-\dfrac{x^2+5}{4}=\dfrac{55}{2}$

$\dfrac{3x+1}{8}-\dfrac{2(x^2+5)}{8}=\dfrac{4\cdot 55}{8}$

$3x+1-2(x^2+5)=220$

$3x+1-2x^2-10=220$

$-2x^2+3x-9=220$

$-2x^2+3x-229=0$

$2x^2-3x+229=0$

$a=2 \quad b=-3 \quad c=229$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot 2\cdot 229=9-1832=-1823$

$S=\varnothing$

e) $\dfrac{2x^2}{3}+\dfrac{7}{2}=\dfrac{x}{2}+8$

$\dfrac{2\cdot 2x^2}{6}+\dfrac{3\cdot 7}{6}=\dfrac{3\cdot x}{6}+\dfrac{6\cdot 8}{6}$

$4x^2+21=3x+48$

$4x^2-3x-27=0$

$a=4 \quad b=-3 \quad c=-27$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot 4\cdot(-27)=9+432=441$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{441}=21$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3\pm 21}{2\cdot 4}=\frac{3\pm 21}{8}=\begin{cases}\dfrac{3+21}{8}=\dfrac{24}{8}=3\\[2mm] \dfrac{3-21}{8}=\dfrac{-18}{8}=-\dfrac{9}{4}=-2{,}25\end{cases}$$

$S=\left\{-\dfrac{9}{4}\,;3\right\}$

f) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{4x}{5}-19=\dfrac{76}{5}$

$\dfrac{5\cdot x^2}{15}+\dfrac{3\cdot 4x}{15}-\dfrac{15\cdot 19}{15}=\dfrac{3\cdot 76}{15}$

$5x^2+12x-285=228$

$5x^2+12x-513=0$

$a=5 \quad b=12 \quad c=-513$

$\Delta=b^2-4ac=12^2-4\cdot 5\cdot(-513)=144+10260=10404$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{10404}=102$

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-12\pm 102}{2\cdot 5}=\dfrac{-12\pm 102}{10}= \begin{array}{l} / \ \dfrac{-12+102}{10}=\dfrac{90}{10}=9 \\ \backslash \ \dfrac{-12-102}{10}=\dfrac{-114}{10}=-\dfrac{57}{5}=-11{,}4 \end{array}$

$S=\left\{-\dfrac{57}{5}\ ;9\right\}$

g) $\dfrac{5-4x}{2}+\dfrac{3x^2-1}{3}=\dfrac{2x^2+5}{6}$

$\dfrac{3(5-4x)}{6}+\dfrac{2(3x^2-1)}{6}=\dfrac{2x^2+5}{6}$

$3(5-4x)+2(3x^2-1)=2x^2+5$

$15-12x+6x^2-2=2x^2+5$

$6x^2-12x+13=2x^2+5$

$4x^2-12x+8=0$

$x^2-3x+2=0$

$a=1 \quad b=-3 \quad c=2$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2=9-8=1$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{1}=1$

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{3\pm 1}{2\cdot 1}=\dfrac{3\pm 1}{2}= \begin{array}{l} / \ \dfrac{3+1}{2}=\dfrac{4}{2}=2 \\ \backslash \ \dfrac{3-1}{2}=\dfrac{2}{2}=1 \end{array}$

$S=\{1\ ;2\}$

Variante :

$x^2-3x+2=0$ | Trinôme unitaire

$\alpha\cdot\beta=2$ et $\alpha+\beta=-3$

$\alpha=-1,\ \beta=-2$

$(x-1)(x-2)=0$

$x=1$ ou $x=2$

$S=\{1\ ;2\}$

h) $\dfrac{x^2-10}{9}-\dfrac{3(4-x)}{4}=\dfrac{2(x-3)}{3}$

$\dfrac{x^2-10}{9}-\dfrac{12-3x}{4}=\dfrac{2x-6}{3}$

$\dfrac{4(x^2-10)}{36}-\dfrac{9(12-3x)}{36}=\dfrac{12(2x-6)}{36}$

$4(x^2-10)-9(12-3x)=12(2x-6)$

$4x^2-40-108+27x=24x-72$

$4x^2+27x-148=24x-72$

$4x^2+3x-76=0$

$a=4 \quad b=3 \quad c=-76$

$\Delta=b^2-4ac=3^2-4\cdot4\cdot(-76)=9+1216=1225$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{1225}=35$

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-3\pm35}{2\cdot4}=\dfrac{-3\pm35}{8}=\begin{array}{l} \diagup\ \dfrac{-3+35}{8}=\dfrac{32}{8}=4 \\ \diagdown\ \dfrac{-3-35}{8}=\dfrac{-38}{8}=-\dfrac{19}{4}=-4{,}75 \end{array}$

$S=\left\{-\dfrac{19}{4}\ ;4\right\}$

10.3 Problèmes du 2^{ème} degré

Exercice 10.12

La différence entre le carré d'un nombre et le nombre lui-même vaut 182.

Quel est ce nombre ?

$x =$ le nombre cherché

$x^2 - x = 182$

$x^2 - x - 182 = 0$

$a = 1 \quad b = -1 \quad c = -182$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-182) = 1 + 728 = 729$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{729} = 27$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm 27}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 27}{2} = \begin{array}{l} / \ \dfrac{1+27}{2} = \dfrac{28}{2} = 14 \\ \backslash \ \dfrac{1-27}{2} = \dfrac{-26}{2} = -13 \end{array}$$

Variante :

$x^2 - x - 182 = 0 \qquad |$ Trinôme unitaire

$\alpha \cdot \beta = -182$ et $\alpha + \beta = -1$

$\alpha = -14$, $\beta = 13$

$(x - 14)(x + 13) = 0$

$x = 14$ ou $x = -13$

Le nombre cherché est 14 ou -13.

Vérification :

$14^2 - 14 = 196 - 14 = 182$ ✓

$(-13)^2 - (-13) = 169 + 13 = 182$ ✓

Exercice 10.13

La somme des carrés de trois nombres entiers pairs consécutifs est égale à 776.

Quels sont ces trois nombres ?

x = le plus petit des trois nombres pairs cherchés
$x + 2$ = le 2e nombre pair cherché
$x + 4$ = le 3e nombre pair cherché

$x^2 + (x+2)^2 + (x+4)^2 = 776$
$x^2 + x^2 + 4x + 4 + x^2 + 8x + 16 = 776$
$3x^2 + 12x + 20 = 776$
$3x^2 + 12x - 756 = 0$
$x^2 + 4x - 252 = 0$
$a = 1 \quad b = 4 \quad c = -252$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-252) = 16 + 1008 = 1024$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{1024} = 32$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm 32}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 32}{2} = \begin{array}{l} / \ \dfrac{-4+32}{2} = \dfrac{28}{2} = 14 \\ \backslash \ \dfrac{-4-32}{2} = \dfrac{-36}{2} = -18 \end{array}$$

Variante :

$x^2 + 4x - 252 = 0 \qquad |$ Trinôme unitaire
$\alpha \cdot \beta = -252$ et $\alpha + \beta = 4$
$\alpha = 18$, $\beta = -14$
$(x+18)(x-14) = 0$
$x = -18$ ou $x = 14$

Si $x = 14 \Rightarrow x + 2 = 16$ et $x + 4 = 18$
Si $x = -18 \Rightarrow x + 2 = -16$ et $x + 4 = -14$

Les trois nombres pairs cherchés sont 14, 16, et 18 ou −18, −16, et −14.

Vérification :

$14^2 + 16^2 + 18^2 = 196 + 256 + 324 = 776$ ✓
$(-18)^2 + (-16)^2 + (-14)^2 = 324 + 256 + 196 = 776$ ✓

Exercice 10.14
La somme des carrés de trois entiers naturels impairs consécutifs est égale à 1883.

Déterminer de manière algébrique ces trois nombres.

$x =$ le plus petit des trois nombres naturels impairs cherchés
$x + 2 =$ le 2e nombre naturel impair cherché
$x + 4 =$ le 3e nombre naturel impair cherché

$x^2 + (x+2)^2 + (x+4)^2 = 1883$
$x^2 + x^2 + 4x + 4 + x^2 + 8x + 16 = 1883$
$3x^2 + 12x + 20 = 1883$
$3x^2 + 12x - 1863 = 0$
$x^2 + 4x - 621 = 0$
$a = 1 \quad b = 4 \quad c = -621$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-621) = 16 + 2484 = 2500$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{2500} = 50$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm 50}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 50}{2} = \begin{cases} \dfrac{-4+50}{2} = \dfrac{46}{2} = 23 \\ \dfrac{-4-50}{2} = \dfrac{-54}{2} = -27 \end{cases}$$

Attention : -27 n'est pas naturel ($-27 \notin \mathbb{N}$) ! Il faut donc l'éliminer.

Variante :

$x^2 + 4x - 621 = 0 \qquad |$ Trinôme unitaire
$\alpha \cdot \beta = -621$ et $\alpha + \beta = 4$
$\alpha = 27, \beta = -23$
$(x + 27)(x - 23) = 0$
$x = -27$ ou $x = 23$

Attention : -27 n'est pas naturel ($-27 \notin \mathbb{N}$) ! Il faut donc l'éliminer.

Si $x = 23 \Rightarrow x + 2 = 25$ et $x + 4 = 27$

Les trois nombres entiers naturels impairs sont 23, 25 et 27.

Vérification :

$23^2 + 25^2 + 27^2 = 529 + 625 + 729 = 1883$ ✓

Exercice 10.15

La somme des carrés de trois multiples de 4 consécutifs est égale à 3920.

Quels sont ces trois nombres ?

$x =$ le plus petit des trois multiples de 4 cherchés
$x+4 =$ le 2^e multiple de 4 cherché
$x+8 =$ le 3^e multiple de 4 cherché

$x^2 + (x+4)^2 + (x+8)^2 = 3920$
$x^2 + x^2 + 8x + 16 + x^2 + 16x + 64 = 3920$
$3x^2 + 24x + 80 = 3920$
$3x^2 + 24x - 3840 = 0$
$x^2 + 8x - 1280 = 0$
$a = 1 \quad b = 8 \quad c = -1280$

$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1280) = 64 + 5120 = 5184$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{5184} = 72$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 \pm 72}{2 \cdot 1} = \frac{-8 \pm 72}{2} = \begin{array}{l} / \ \dfrac{-8+72}{2} = \dfrac{64}{2} = 32 \\ \backslash \ \dfrac{-8-72}{2} = \dfrac{-80}{2} = -40 \end{array}$$

Variante :

$x^2 + 8x - 1280 = 0 \qquad |$ Trinôme unitaire
$\alpha \cdot \beta = -1280$ et $\alpha + \beta = 8$
$\alpha = 40$, $\beta = -32$
$(x+40)(x-32) = 0$
$x = -40$ ou $x = 32$

Si $x = 32 \Rightarrow x + 4 = 36$ et $x + 8 = 40$
Si $x = -40 \Rightarrow x + 4 = -36$ et $x + 8 = -32$

Les trois multiples de 4 sont 32, 36, et 40 ou -40, -36, et -32.

Vérification :

$32^2 + 36^2 + 40^2 = 1024 + 1296 + 1600 = 3920$ ✓
$(-40)^2 + (-36)^2 + (-32)^2 = 1600 + 1296 + 1024 = 3920$ ✓

Exercice 10.16

Le propriétaire d'une usine de forme rectangulaire souhaite doubler la superficie de son usine en augmentant sa largeur et sa longueur du même nombre de mètres.

Déterminer l'augmentation des deux dimensions sachant que l'usine mesure actuellement 40 mètres par 60 mètres.

x = augmentation de la longueur et de la largeur [m]

Aire actuelle : $40 \cdot 60 = 2400$ m^2
Nouvelle aire : $2 \cdot 2400 = 4800$ m^2
Nouvelle longueur : $60 + x$
Nouvelle largeur : $40 + x$
Nouvelle aire : $(60 + x)(40 + x)$

$(60 + x)(40 + x) = 4800$
$2400 + 60x + 40x + x^2 = 4800$
$x^2 + 100x + 2400 = 4800$
$x^2 + 100x - 2400 = 0$
$a = 1 \quad b = 100 \quad c = -2400$

$\Delta = b^2 - 4ac = 100^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2400) = 10'000 + 9'600 = 19'600$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{19'600} = 140$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-100 \pm 140}{2 \cdot 1} = \frac{-100 \pm 140}{2} = \begin{array}{l} / \ \dfrac{-100 + 140}{2} = \dfrac{40}{2} = 20 \\ \backslash \ \dfrac{-100 - 140}{2} = \dfrac{-240}{2} = -120 \end{array}$$

Attention : -120 est à éliminer car x doit être positif !

Variante :

$x^2 + 100x - 2400 = 0 \qquad |$ Trinôme unitaire
$\alpha \cdot \beta = -2400$ et $\alpha + \beta = 100$
$\alpha = 120$, $\beta = -20$
$(x + 120)(x - 20) = 0$
$x = -120$ ou $x = 20$

Attention : -120 est à éliminer car x doit être positif !

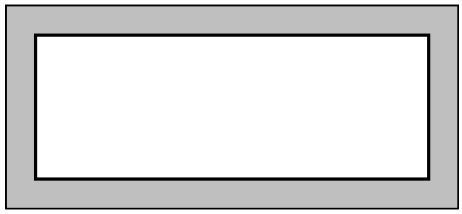
Il faut augmenter la longueur et la largeur de 20 m.

Vérification :

$(60 + 20)(40 + 20) = 80 \cdot 60 = 4800$ m^2 ✓

Exercice 10.17

Une parcelle rectangulaire qui mesure 20 m sur 80 m est complètement entourée d'une bande de terre de largeur constante (voir ci-contre, la bande de terre est grisée).



Sachant que l'aire de la bande de terre vaut 636 m^2, calculer la largeur de la bande de terre.

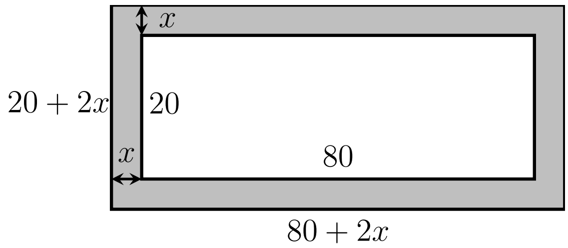
x = largeur de la bande de terre [m]

Aire du terrain : $20 \cdot 80 = 1600$ m^2

Aire du grand rectangle : $1600 + 636 = 2236$ m^2

Longueur du grand rectangle : $80 + 2x$

Largeur du grand rectangle : $20 + 2x$



$(80 + 2x)(20 + 2x) = 2236$

$1600 + 160x + 40x + 4x^2 = 2236$

$4x^2 + 200x + 1600 = 2236$

$4x^2 + 200x - 636 = 0$

$x^2 + 50x - 159 = 0$

Variante :

Aire de la bande = Aire des 4 coins + 2 · 2 bandes =

$= 4x^2 + 2 \cdot (20 \cdot x) + 2 \cdot (80 \cdot x) = 4x^2 + 40x + 160x = 4x^2 + 200x$

$\Rightarrow 4x^2 + 200x = 636$

$4x^2 + 200x - 636 = 0$

$x^2 + 50x - 159 = 0$

$a = 1 \quad b = 50 \quad c = -159$

$\Delta = b^2 - 4ac = 50^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-159) = 2500 + 636 = 3136$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{3136} = 56$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-50 \pm 56}{2 \cdot 1} = \frac{-50 \pm 56}{2} = \begin{array}{l} / \ \dfrac{-50 + 56}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ \backslash \ \dfrac{-50 - 56}{2} = \dfrac{-106}{2} = -53 \end{array}$$

Attention : -53 est à éliminer car x doit être positif !

Variante :

$x^2 + 50x - 159 = 0 \qquad |$ Trinôme unitaire

$\alpha \cdot \beta = -159$ et $\alpha + \beta = 50$

$\alpha = 53$, $\beta = -3$

$(x + 53)(x - 3) = 0$

$x = -53$ ou $x = 3$

Attention : -53 est à éliminer car x doit être positif !

La bande mesure 3 m de large.

Vérification :

$(80 + 2 \cdot 3)(20 + 2 \cdot 3) = 86 \cdot 26 = 2236 \text{ m}^2$ ✓

Exercice 10.18

Un sol est recouvert de 500 dalles carrées. Si l'on avait utilisé des dalles carrées dont le côté mesure 5 cm de plus, il n'aurait fallu que 320 dalles pour recouvrir le même sol.

Quelles sont les dimensions des premières dalles ?

x = côté des dalles initiales [cm]
$x+5$ = côté des nouvelles dalles [cm]
Aire des 500 dalles initiales : $500 \cdot x^2 = 500x^2$
Aire des 320 nouvelles dalles : $320 \cdot (x+5)^2 = 320(x^2+10x+25) = 320x^2+3200x+8000$

$500x^2 = 320x^2 + 3200x + 8000$
$180x^2 - 3200x - 8000 = 0$
$9x^2 - 160x - 400 = 0$
$a = 9 \quad b = -160 \quad c = -400$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-160)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-400) = 25'600 + 14'400 = 40'000$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{40'000} = 200$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{160 \pm 200}{2 \cdot 9} = \frac{160 \pm 200}{18} = \begin{array}{l} / \ \dfrac{160+200}{18} = \dfrac{360}{18} = 20 \\ \backslash \ \dfrac{160-200}{18} = \dfrac{-40}{18} = -\dfrac{20}{9} = -2{,}\overline{2} \end{array}$$

Attention : $-\dfrac{20}{9}$ est à éliminer car x doit être positif !

Les premières dalles mesuraient 20 cm de côté.

Vérification :

$500 \cdot 20^2 = 500 \cdot 400 = 200'000 \text{ cm}^2 = 20 \text{ m}^2$
$320 \cdot 25^2 = 320 \cdot 625 = 200'000 \text{ cm}^2 = 20 \text{ m}^2$ ✓

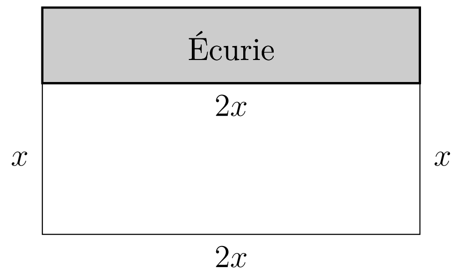
Exercice 10.19

Un fermier projette de clôturer un terrain rectangulaire utilisant son écurie pour border un côté et une barrière pour les trois autres côtés. On sait que le côté parallèle à l'écurie vaut deux fois la longueur d'un des côtés adjacents à l'écurie et que l'aire du terrain mesure 128 m^2.

Calculer la longueur de la barrière que le fermier doit acheter.

x = largeur du terrain [m]
$2x$ = longueur de l'écurie [m]
Aire du terrain : $2x \cdot x = 2x^2$ [m^2]

$2x^2 = 128$
$x^2 = 64$
$x = \pm 8$



Attention : -8 est à éliminer car x doit être positif !

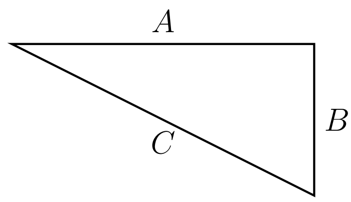
Longueur totale de la barrière : $8 + 16 + 8 = 32$ m.

Exercice 10.20

Deux personnes munies d'émetteurs-récepteurs quittent le même point à 9 heures. L'un marche plein sud à 4 km/h, l'autre marche plein ouest à 3 km/h.

Jusqu'à quelle heure pourront-ils communiquer l'un avec l'autre si chaque radio a une portée maximale de 2 km ?

x = temps de marche [h]
$4x$ = distance parcourue vers le Sud [km]
$3x$ = distance parcourue vers l'Ouest [km]



Pythagore : $A^2 + B^2 = C^2$

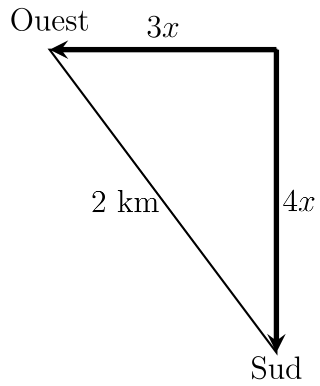
$(3x)^2 + (4x)^2 = 2^2$

$9x^2 + 16x^2 = 4$

$25x^2 = 4$

$x^2 = \frac{4}{25}$

$x = \pm\frac{2}{5}$



Attention :
$-\frac{2}{5}$ est à éliminer car x doit être positif !

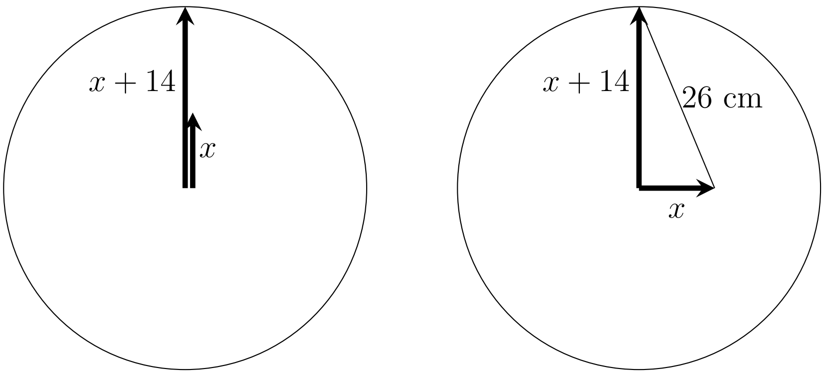
$x = 0{,}4$ heure $= 24$ min

Ils pourront communiquer jusqu'à 9h24.

Exercice 10.21

À midi, la distance entre les pointes des aiguilles d'une horloge est de 14 cm.
À trois heures, cette distance est de 26 cm.

Calculer les longueurs des aiguilles de cette horloge.



x = longueur de la petite aiguille [cm]
$x+14$ = longueur de la grande aiguille [cm]

Pythagore :

$x^2 + (x+14)^2 = 26^2$

$x^2 + x^2 + 28x + 196 = 676$

$2x^2 + 28x - 480 = 0$

$x^2 + 14x - 240 = 0$ | Trinôme unitaire

$(x+24)(x-10) = 0$

$x = -24$ ou $x = 10$

Attention : -24 est à éliminer car x doit être positif !

Si $x = 10 \Rightarrow x + 14 = 24$

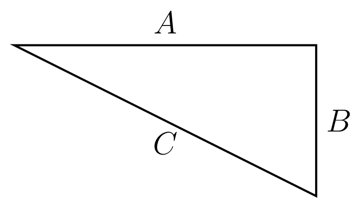
Les aiguilles mesurent 10 cm et 24 cm.

Exercice 10.22

Deux voyageurs partent au même instant du même point et vont l'un vers le sud et l'autre vers l'est. Ils parcourent respectivement 50 km par jour et 120 km par jour.

Après combien de jours seront-ils à 650 km l'un de l'autre ?

x = nombre de jours de marche
$50x$ = distance parcourue vers le Sud [km]
$120x$ = distance parcourue vers l'Est [km]



Pythagore : $A^2 + B^2 = C^2$

$(50x)^2 + (120x)^2 = 650^2$

$2'500x^2 + 14'400x^2 = 422'500$

$16'900x^2 = 422'500$

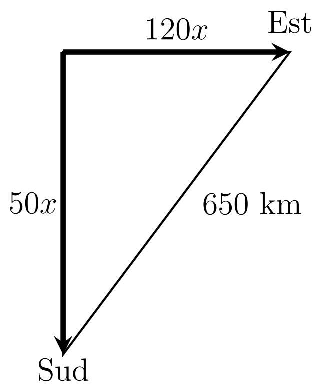
$x^2 = 25$

$x = \pm 5$

Attention :

-5 est à éliminer car x doit être positif !

Après 5 jours, ils seront à 650 km l'un de l'autre.



Exercice 10.23

Un marchand achète des objets, valant tous le même prix, pour un montant total de 672 francs. Si chaque objet avait coûté 4 francs de moins, il aurait pu, avec la même somme, en acheter 3 de plus.

Combien en a-t-il acheté et à quel prix unitaire ?

x = prix unitaire [CHF] $x-4$ = nouveau prix [CHF]

y = nombre d'objets achetés $y+3$ = nouveau nombre d'objets achetés

$$xy = 672 \Rightarrow y = \frac{672}{x}$$

$$(x-4)(y+3) = 672$$

$$xy + 3x - 4y - 12 = 672$$

$$672 + 3x - 4y - 12 = 672$$

$$3x - 4y - 12 = 0$$

$$3x - 4 \cdot \frac{672}{x} - 12 = 0$$

$$3x - \frac{2688}{x} - 12 = 0$$

$$3x^2 - 2688 - 12x = 0$$

$$3x^2 - 12x - 2688 = 0$$

$$x^2 - 4x - 896 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -4 \quad c = -896$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-896) = 16 + 3584 = 3600$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{3600} = 60$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm 60}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 60}{2} = \begin{cases} \frac{4+60}{2} = \frac{64}{2} = 32 \\ \frac{4-60}{2} = \frac{-56}{2} = -28 \end{cases}$$

Attention : -28 est à éliminer car x doit être positif !

Variante :

$x^2 - 4x - 896 = 0$ | Trinôme unitaire

$(x-32)(x+28) = 0$

$x = 32$ ou $x = -28$

Attention : -28 est à éliminer car x doit être positif !

$$\text{Si } x = 32 \Rightarrow y = \frac{672}{32} = 21$$

Il a acheté 21 objets à 32 francs chacun.

Variante :

$x =$ prix unitaire [CHF]

$\dfrac{672}{x} =$ nombre d'objets achetés

$x - 4 =$ nouveau prix [CHF]

$\dfrac{672}{x} + 3 =$ nouveau nombre d'objets achetés

$$(x-4)\left(\frac{672}{x}+3\right) = 672$$

$$x \cdot \frac{672}{x} + 3x - 4 \cdot \frac{672}{x} - 12 = 672$$

$$672 + 3x - \frac{2688}{x} - 12 = 672$$

$$3x - \frac{2688}{x} - 12 = 0$$

$$3x^2 - 2688 - 12x = 0$$

$$3x^2 - 12x - 2688 = 0$$

$x^2 - 4x - 896 = 0$ | Trinôme unitaire
$(x-32)(x+28) = 0$
$x = 32$ ou $x = -28$

Attention : -28 est à éliminer car x doit être positif !

Si $x = 32 \Rightarrow y = \dfrac{672}{32} = 21$

Il a acheté 21 objets à 32 francs chacun.

Variante :

x = nombre d'objets achetés $\quad$ $x+3$ = nouveau nombre d'objets achetés

y = prix unitaire [CHF] $\quad$ $y-4$ = nouveau prix [CHF]

$xy = 672 \Rightarrow y = \dfrac{672}{x}$

$(x+3)(y-4) = 672$

$xy - 4x + 3y - 12 = 672$

$672 - 4x + 3y - 12 = 672$

$-4x + 3y - 12 = 0$

$-4x + 3 \cdot \dfrac{672}{x} - 12 = 0$

$-4x + \dfrac{2016}{x} - 12 = 0$

$-4x^2 + 2016 - 12x = 0$

$-4x^2 - 12x + 2016 = 0$

$x^2 + 3x - 504 = 0$

$a = 1 \quad b = 3 \quad c = -504$

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-504) = 9 + 2016 = 2025$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{2025} = 45$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm 45}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 45}{2} = \begin{cases} \dfrac{-3+45}{2} = \dfrac{42}{2} = 21 \\ \dfrac{-3-45}{2} = \dfrac{-48}{2} = -24 \end{cases}$$

Attention : -24 est à éliminer car x doit être positif !

Variante :

$x^2 + 3x - 504 = 0 \qquad |$ Trinôme unitaire

$(x+24)(x-21) = 0$

$x = -24$ ou $x = 21$

Attention : -24 est à éliminer car x doit être positif !

Si $x = 21 \Rightarrow y = \dfrac{672}{21} = 32$

Il a acheté 21 objets à 32 francs chacun.

Exercice 10.24

Une somme de 400 francs doit être distribuée en parts égales. Au moment du partage, quatre personnes se retirent, ce qui augmente la part des autres de 5 francs.

Combien de personnes y avait-il initialement ?

x = nombre de personnes initialement $x-4$ = nouveau nombre de personnes
y = somme de chacun initialement [CHF] $y+5$ = nouvelle somme de chacun [CHF]

$xy = 400 \Rightarrow y = \dfrac{400}{x}$

$(x-4)(y+5) = 400$

$xy + 5x - 4y - 20 = 400$

$400 + 5x - 4y - 20 = 400$

$5x - 4y - 20 = 0$

$5x - 4 \cdot \dfrac{400}{x} - 20 = 0$

$5x - \dfrac{1600}{x} - 20 = 0$

$5x^2 - 1600 - 20x = 0$

$5x^2 - 20x - 1600 = 0$

$x^2 - 4x - 320 = 0$

$a = 1 \quad b = -4 \quad c = -320$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-320) = 16 + 1280 = 1296$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{1296} = 36$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm 36}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 36}{2} = \begin{cases} \dfrac{4+36}{2} = \dfrac{40}{2} = 20 \\ \dfrac{4-36}{2} = \dfrac{-32}{2} = -16 \end{cases}$$

Attention : -16 est à éliminer car x doit être positif !

Variante :

$x^2 - 4x - 320 = 0 \qquad |$ Trinôme unitaire

$(x-20)(x+16) = 0$

$x = 20$ ou $x = -16$

Attention : -16 est à éliminer car x doit être positif !

Si $x = 20 \Rightarrow y = \dfrac{400}{20} = 20$

Il y avait initialement 20 personnes (et chacune aurait reçu 20 francs).

Variante :

x = nombre de personnes initialement

$x-4$ = nouveau nombre de personnes

$\dfrac{400}{x}$ = somme de chacun initialement [CHF]

$\dfrac{400}{x}+5$ = nouvelle somme de chacun [CHF]

$(x-4)\left(\dfrac{400}{x}+5\right)=400$

$x\cdot\dfrac{400}{x}+5x-4\cdot\dfrac{400}{x}-20=400$

$400+5x-\dfrac{1600}{x}-20=400$

$5x-\dfrac{1600}{x}-20=0$

$5x^2-1600-20x=0$

$5x^2-20x-1600=0$

$x^2-4x-320=0$ | Trinôme unitaire

$(x-20)(x+16)=0$

$x=20$ ou $x=-16$

Attention : -16 est à éliminer car x doit être positif !

Si $x=20 \Rightarrow y=\dfrac{400}{20}=20$

Il y avait initialement 20 personnes (et chacune aurait reçu 20 francs).

Exercice 10.25

Un fermier achète des lapins, valant tous le même prix, pour un montant total de 805 francs. Il les garde trois mois et en perd cinq par maladie. Il vend alors chacun des autres 6 francs de plus qu'il ne lui coûtait. A ce marché il perd 67 francs.

Calculer le nombre de lapins achetés par le fermier et leur prix unitaire.

x = nombre de lapins achetés $\quad$ $x-5$ = nombre de lapins vendus

y = prix d'achat d'un lapin [CHF] $\quad$ $y+6$ = prix de vente d'un lapin [CHF]

$xy = 805 \Rightarrow y = \dfrac{805}{x}$

$(x-5)(y+6) = 805 - 67$

$xy + 6x - 5y - 30 = 738$

$805 + 6x - 5y - 30 = 738$

$6x - 5y + 37 = 0$

$6x - 5 \cdot \dfrac{805}{x} + 37 = 0$

$6x - \dfrac{4025}{x} + 37 = 0$

$6x^2 - 4025 + 37x = 0$

$6x^2 + 37x - 4025 = 0$

$a = 6 \quad b = 37 \quad c = -4025$

$\Delta = b^2 - 4ac = 37^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-4025) = 1'369 + 96'600 = 97'969$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{97'969} = 313$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-37 \pm 313}{2 \cdot 6} = \frac{-37 \pm 313}{12} = \begin{cases} \dfrac{-37+313}{12} = \dfrac{276}{12} = 23 \\[2ex] \dfrac{-37-313}{12} = \dfrac{-350}{12} = -\dfrac{175}{6} = -29{,}1\overline{6} \end{cases}$$

Attention : $-\dfrac{175}{6}$ est à éliminer car x doit être positif !

Si $x = 23 \Rightarrow y = \dfrac{805}{23} = 35$

Il avait acheté 23 lapins à 35 francs chacun.

Variante :

x = nombre de lapins achetés

$x-5$ = nombre de lapins vendus

$\dfrac{805}{x}$ = prix d'achat d'un lapin [CHF]

$\dfrac{805}{x}+6$ = prix de vente d'un lapin [CHF]

$$(x-5)\left(\frac{805}{x}+6\right)=805-67$$

$$x\cdot\frac{805}{x}+6x-5\cdot\frac{805}{x}-30=738$$

$$805+6x-\frac{4025}{x}-30=738$$

$$6x-\frac{4025}{x}+37=0$$

$$6x^2-4025+37x=0$$

$$6x^2+37x-4025=0$$

$a=6 \quad b=37 \quad c=-4025$

$$\Delta=b^2-4ac=37^2-4\cdot 6\cdot(-4025)=1'369+96'600=97'969$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{97'969}=313$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-37\pm 313}{2\cdot 6}=\frac{-37\pm 313}{12}=\begin{cases}\dfrac{-37+313}{12}=\dfrac{276}{12}=23\\[2mm] \dfrac{-37-313}{12}=\dfrac{-350}{12}=-\dfrac{175}{6}=-29{,}1\overline{6}\end{cases}$$

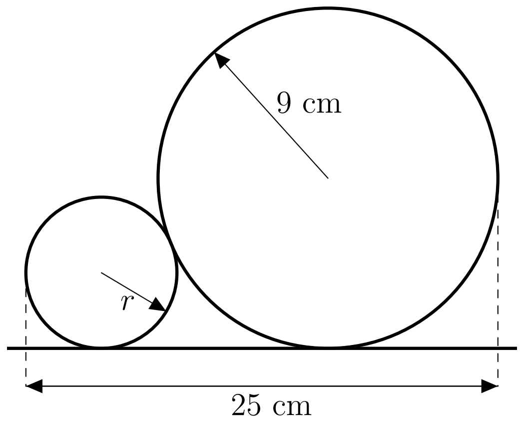
Attention : $-\dfrac{175}{6}$ est à éliminer car x doit être positif !

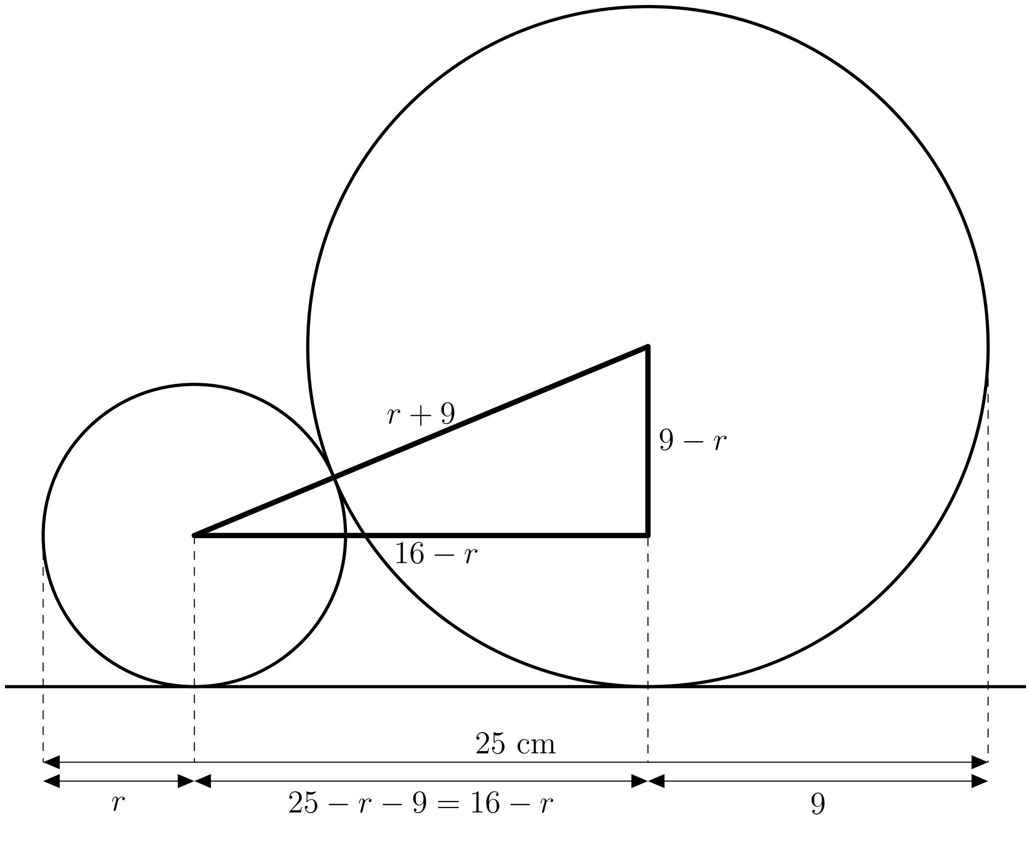
Si $x=23\Rightarrow y=\dfrac{805}{23}=35$

Il avait acheté 23 lapins à 35 francs chacun.

Exercice 10.26

Calculer la longueur du rayon r du petit cercle sachant que les cercles sont tangents entre eux et tangents au sol. (Voir schéma ci-dessous.)





$(16-r)^2+(9-r)^2=(r+9)^2$

$256-32r+r^2+81-18r+r^2=r^2+18r+81$

$2r^2-50r+256=r^2+18r$

$r^2-68r+256=0$

$a = 1 \quad b = -68 \quad c = 256$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-68)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 256 = 4624 - 1024 = 3600$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{3600} = 60$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{68 \pm 60}{2 \cdot 1} = \frac{68 \pm 60}{2} = \begin{array}{l} / \; \dfrac{68+60}{2} = \dfrac{128}{2} = 64 \\ \backslash \; \dfrac{68-60}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \end{array}$$

Attention : $r = 64$ est à éliminer car il est trop grand !

Variante :

$r^2 - 68r + 256 = 0 \qquad |$ Trinôme unitaire
$(r - 64)(r - 4) = 0$
$r = 64$ ou $r = 4$

Attention : $r = 64$ est à éliminer car il est trop grand !

Le rayon est de 4 cm.