LES GUIDES MANGAS

ANALYSE

Auteur	HIROYUKI KOJIMA	enseignant-chercheur
Dessins	SHIN TOGAMI	dessinateur
Scénario	SHINJIRO NISHIDA	scénariste
	EIJI SHIMADA	scénariste
Studio	BECOM	
Traduction	VINCENT BECK	enseignant-chercheur
	CÉLINE CHEVALIER	enseignant-chercheur
	SÉBASTIEN DESREUX	docteur en algorithmique
	KEVIN DESTAGNOL	docteur en mathématiques
	TRISTAN POULLAOUEC	enseignant en classe prépa
Harmonisation	VINCENT BECK	enseignant-chercheur
Révision de la traduction	JEAN-YVES FÉVRIER	agrégé d'économie

Ohmsha
no starch press
H&K

Préface

— Certaines aventures ne peuvent réussir que grâce au manga —

Puisque vous feuilletez ce livre, vous aimez les mangas ou vous espérez faire des progrès en analyse (ou les deux !).

Si vous aimez les mangas, si vous vous dites « L'analyse sous forme de manga ? Génial ! », vous pouvez aller directement à la caisse, vous ne serez pas déçu. Ce manga est vraiment réussi, et ce n'est pas un hasard : les dessins sont de Shin Togami, un auteur de mangas reconnu, et le scénario a été écrit par Becom, un vrai studio de mangas.

Mais vous vous dites peut-être que « Les mangas sur les mathématiques sont toujours loupés… » C'est vrai. D'ailleurs, quand un éditeur chez Ohmsha m'a proposé d'écrire ce livre, j'ai bien failli refuser – et laisser passer une belle occasion. Les soi-disant « mangas éducatifs » sont vraiment décevants. Ils ont certes des illustrations, de grandes images, mais ils n'ont ni une vraie histoire, ni des personnages attachants. Ce n'est qu'après avoir lu un extrait d'un autre titre (le *Guide manga des statistiques*) que j'ai changé d'avis. Contrairement aux autres mangas éducatifs, celui-ci était très bien conçu, très bien réalisé ; il donnait vraiment envie de le lire. L'éditeur m'a promis que le mien serait aussi bon, alors j'ai accepté. Je m'étais souvent dit que les mangas pourraient me permettre de mieux enseigner les mathématiques, et c'était l'occasion de mettre l'idée en pratique. Je vous garantis que plus vous aimez les mangas, plus vous aimerez ce livre.

Vous pouvez aussi avoir ouvert ce livre en vous disant « Je n'aime pas beaucoup l'analyse, ça passera peut-être mieux avec du manga. » Dans ce cas, c'est vraiment le livre qu'il vous faut. Il aidera ceux qui se sont blessés avec l'analyse à faire leur rééducation. Car il ne se contente pas d'expliquer l'analyse via le manga, il la présente aussi d'une manière qui est fondamentalement différente de celle que l'on trouve dans les manuels traditionnels. D'abord, il montre par des exemples issus de la physique, des statistiques et de l'économie, à quoi l'analyse sert en pratique, ce que l'on ne peut pas comprendre avec des méthodes d'enseignement qui se cantonnent aux limites ou aux ε–δ. Sans une idée claire de ce qu'est l'analyse et de la manière dont elle est mise en œuvre dans le monde réel, on ne peut pas vraiment comprendre le sujet ni l'utiliser avec confiance ; l'analyse se réduit alors à la mémorisation de formules et de règles. Grâce à cette approche, vous ne verrez plus l'analyse comme une épreuve mais comme un outil.

Ensuite, ce livre explique toutes les formules au moyen d'*approximations au premier ordre*, ce qui aide à se représenter ce qu'elles veulent dire et à les comprendre facilement. Grâce à cette méthode d'enseignement géniale, on passe rapidement et aisément de la dérivation à l'intégration par exemple.

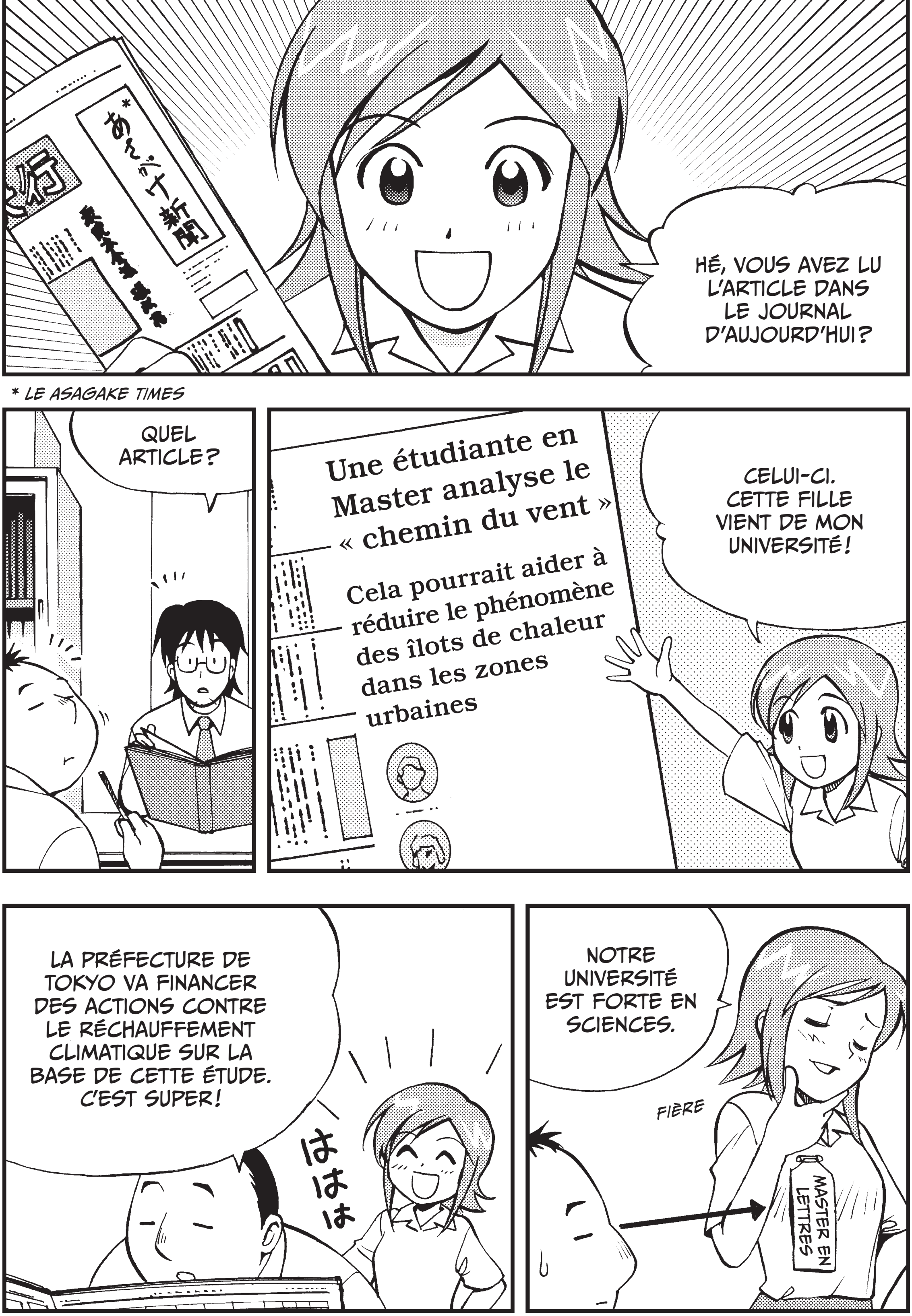
Ce livre va aussi plus loin que les autres mangas consacrés à l'analyse. Il ne recule ni devant les développements de Taylor, ni devant les dérivées partielles.

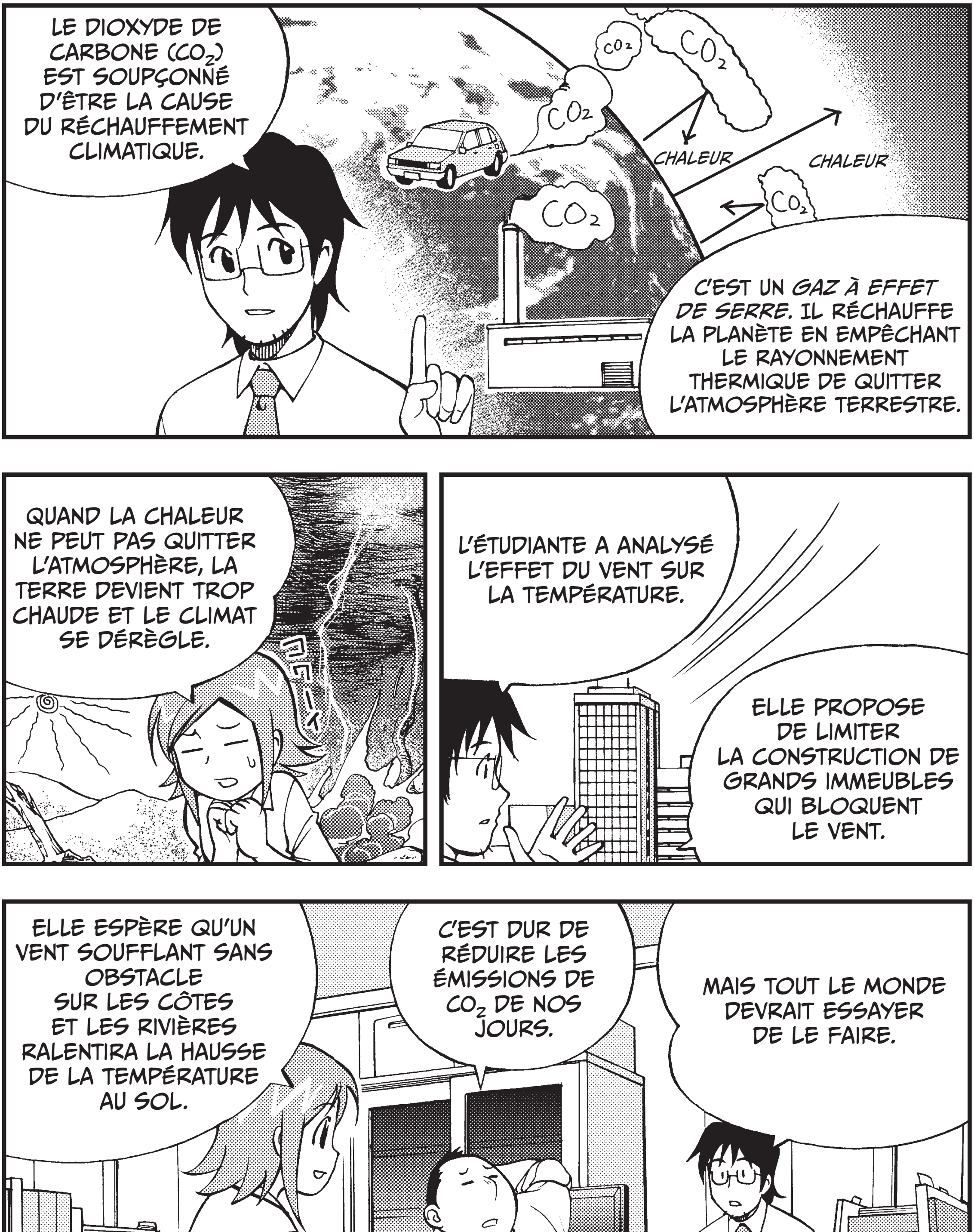
Tout ceci n'a été rendu possible que par le manga. Pourquoi apprend-on mieux avec un manga qu'avec un livre de cours ? Parce que le manga est une information visuelle, enrobée dans une histoire. Il parle aux sens et au cœur. En plus, l'analyse est particulièrement adaptée au manga car elle est la branche des mathématiques qui décrit les phénomènes dynamiques.

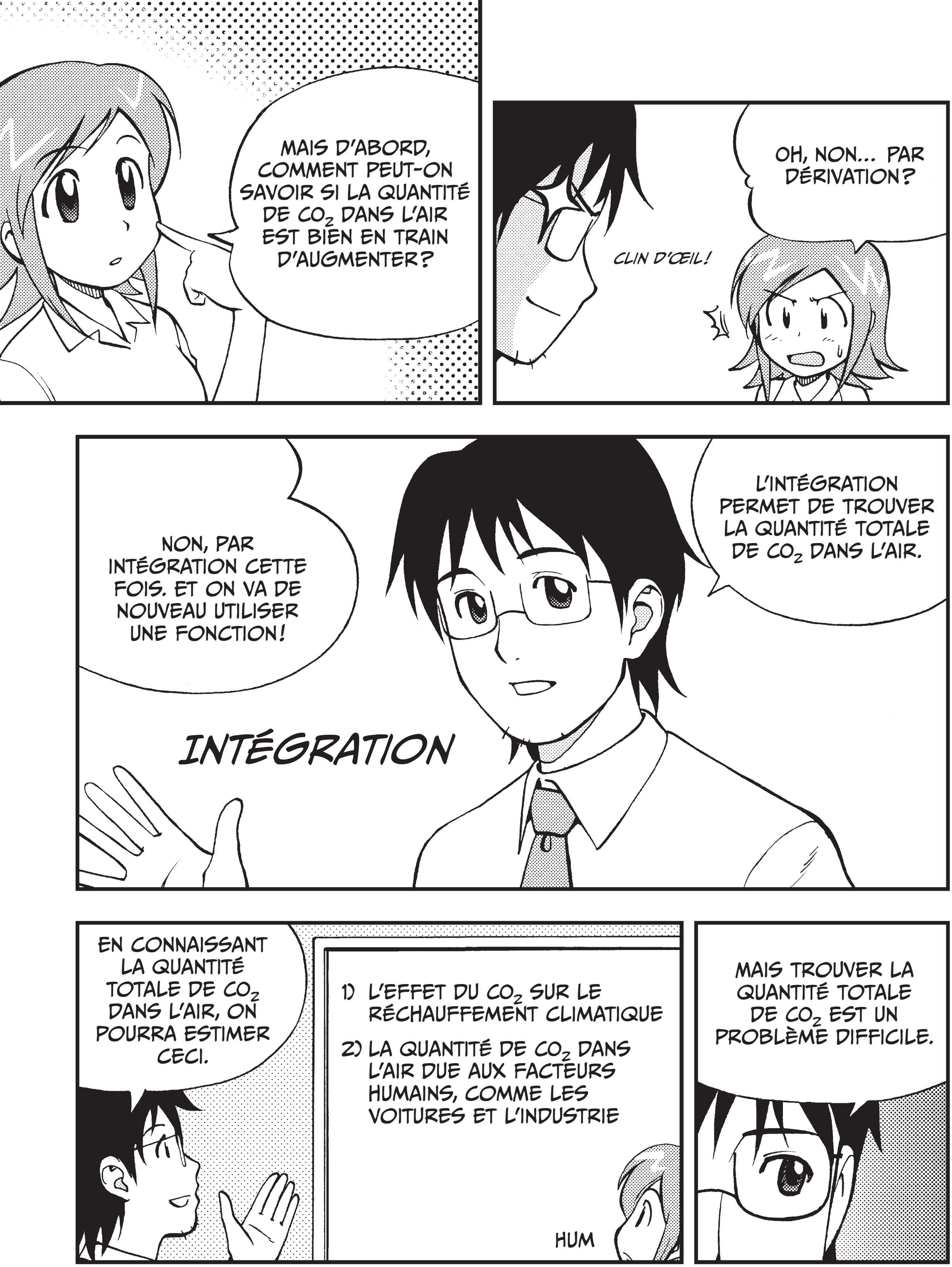
Je vous invite maintenant à tourner la page et à profiter d'un délicieux cocktail de manga et de mathématiques.

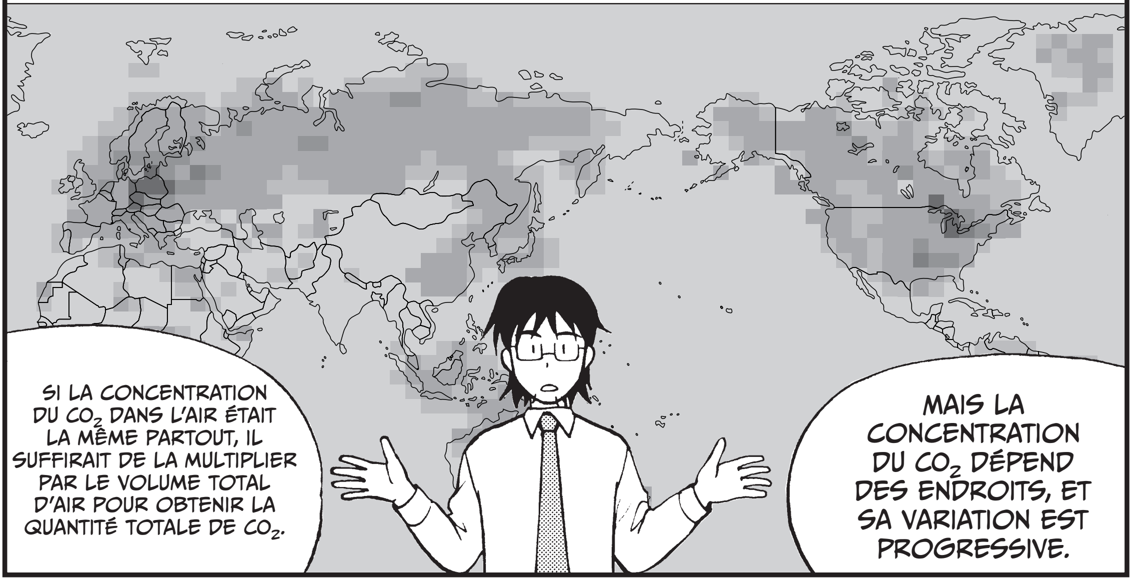
Hiroyuki Kojima

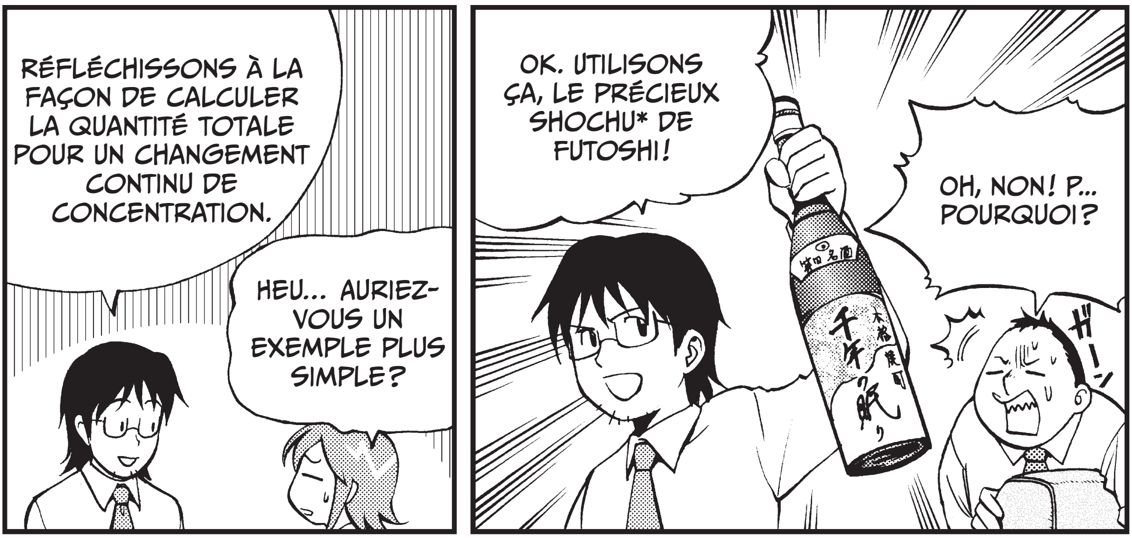
Table des matières


HÉ, VOUS AVEZ LU L'ARTICLE DANS LE JOURNAL D'AUJOURD'HUI ?
* LE ASAGAKE TIMES
QUEL ARTICLE ?
Une étudiante en Master analyse le « chemin du vent »
Cela pourrait aider à réduire le phénomène des îlots de chaleur dans les zones urbaines
CELUI-CI. CETTE FILLE VIENT DE MON UNIVERSITÉ !
LA PRÉFECTURE DE TOKYO VA FINANCER DES ACTIONS CONTRE LE RÉCHAUFFEMENT CLIMATIQUE SUR LA BASE DE CETTE ÉTUDE. C'EST SUPER !
ははは
NOTRE UNIVERSITÉ EST FORTE EN SCIENCES.
FIÈRE
MASTER EN LETTRES


LE DIOXYDE DE CARBONE (CO_2) EST SOUPÇONNÉ D'ÊTRE LA CAUSE DU RÉCHAUFFEMENT CLIMATIQUE.
CO_2
CO_2
CO_2
CO_2
CO_2
CHALEUR
CHALEUR
C'EST UN *GAZ À EFFET DE SERRE*. IL RÉCHAUFFE LA PLANÈTE EN EMPÊCHANT LE RAYONNEMENT THERMIQUE DE QUITTER L'ATMOSPHÈRE TERRESTRE.
QUAND LA CHALEUR NE PEUT PAS QUITTER L'ATMOSPHÈRE, LA TERRE DEVIENT TROP CHAUDE ET LE CLIMAT SE DÉRÈGLE.
L'ÉTUDIANTE A ANALYSÉ L'EFFET DU VENT SUR LA TEMPÉRATURE.
ELLE PROPOSE DE LIMITER LA CONSTRUCTION DE GRANDS IMMEUBLES QUI BLOQUENT LE VENT.
ELLE ESPÈRE QU'UN VENT SOUFFLANT SANS OBSTACLE SUR LES CÔTES ET LES RIVIÈRES RALENTIRA LA HAUSSE DE LA TEMPÉRATURE AU SOL.
C'EST DUR DE RÉDUIRE LES ÉMISSIONS DE CO_2 DE NOS JOURS.
MAIS TOUT LE MONDE DEVRAIT ESSAYER DE LE FAIRE.

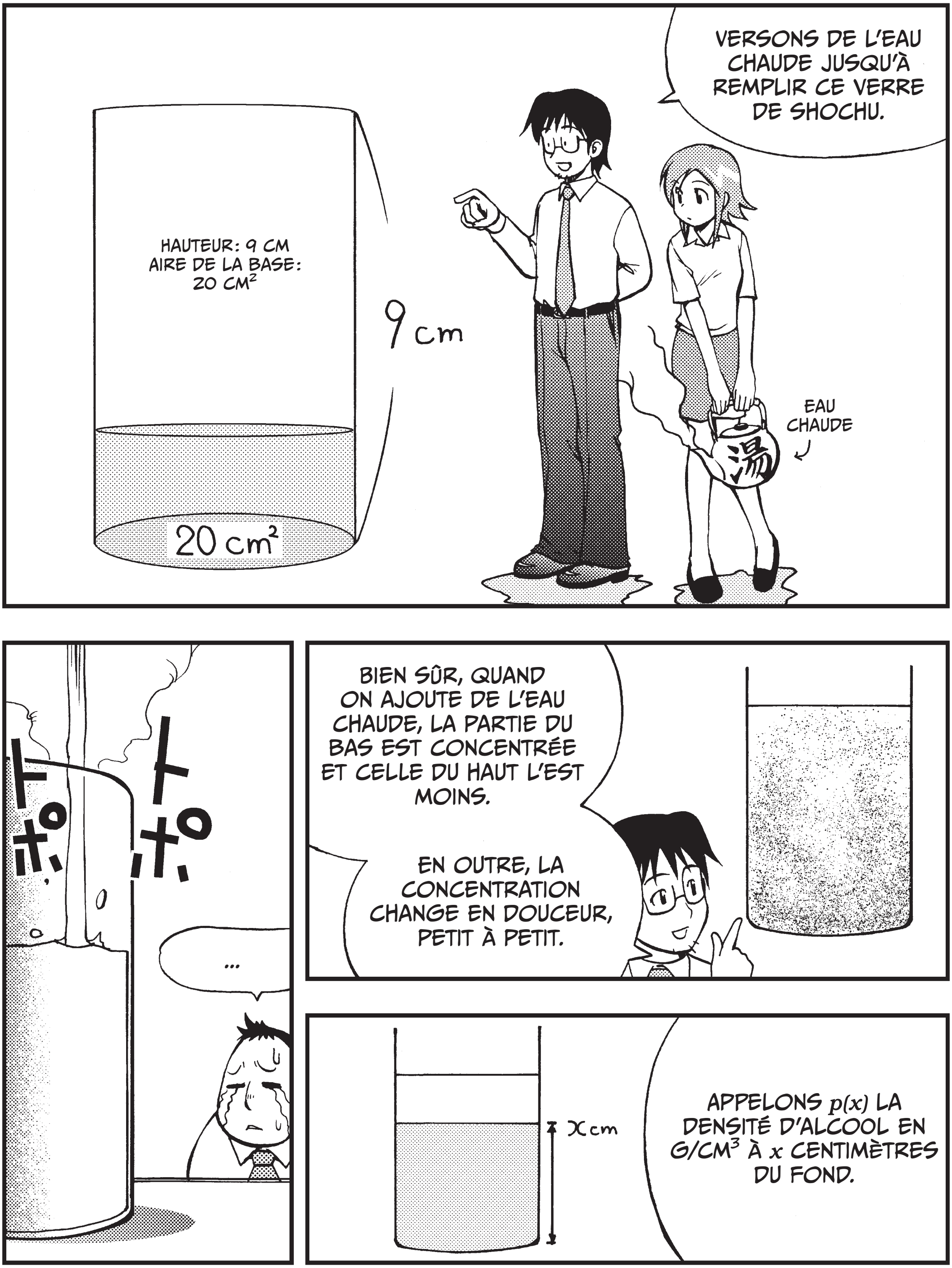

MAIS D'ABORD, COMMENT PEUT-ON SAVOIR SI LA QUANTITÉ DE CO_2 DANS L'AIR EST BIEN EN TRAIN D'AUGMENTER?
OH, NON... PAR DÉRIVATION?
CLIN D'ŒIL!
NON, PAR INTÉGRATION CETTE FOIS. ET ON VA DE NOUVEAU UTILISER UNE FONCTION!
L'INTÉGRATION PERMET DE TROUVER LA QUANTITÉ TOTALE DE CO_2 DANS L'AIR.
INTÉGRATION
EN CONNAISSANT LA QUANTITÉ TOTALE DE CO_2 DANS L'AIR, ON POURRA ESTIMER CECI.
1) L'EFFET DU CO_2 SUR LE RÉCHAUFFEMENT CLIMATIQUE
2) LA QUANTITÉ DE CO_2 DANS L'AIR DUE AUX FACTEURS HUMAINS, COMME LES VOITURES ET L'INDUSTRIE
HUM
MAIS TROUVER LA QUANTITÉ TOTALE DE CO_2 EST UN PROBLÈME DIFFICILE.

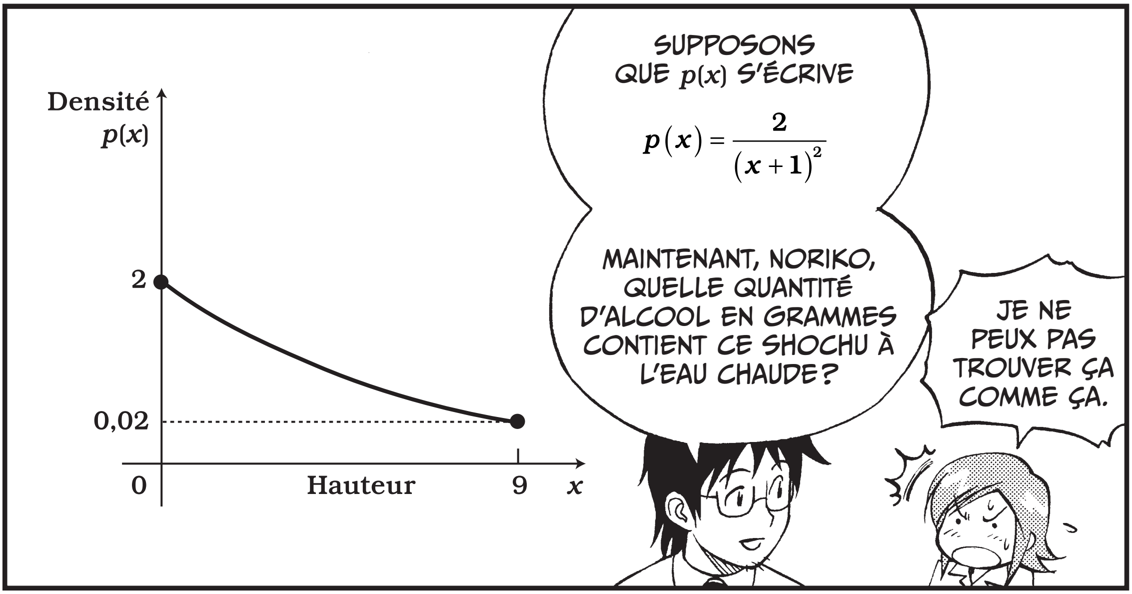


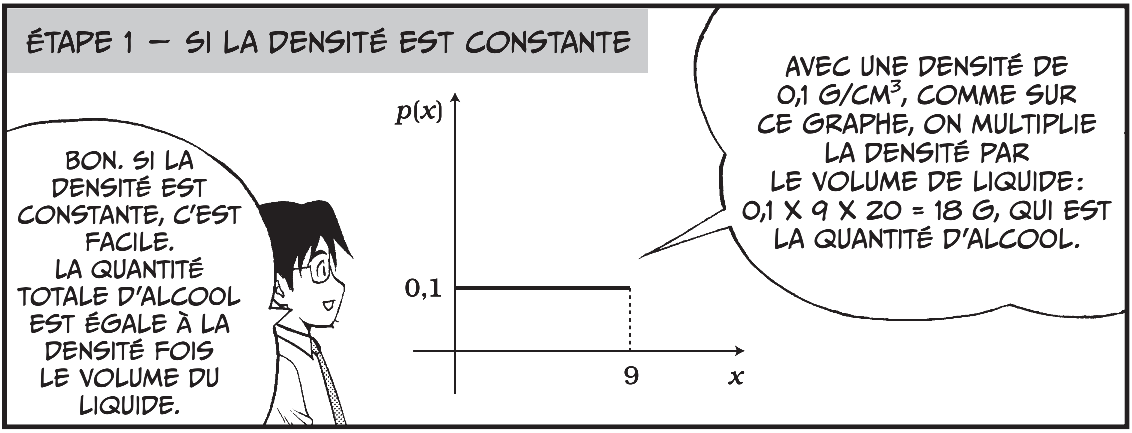


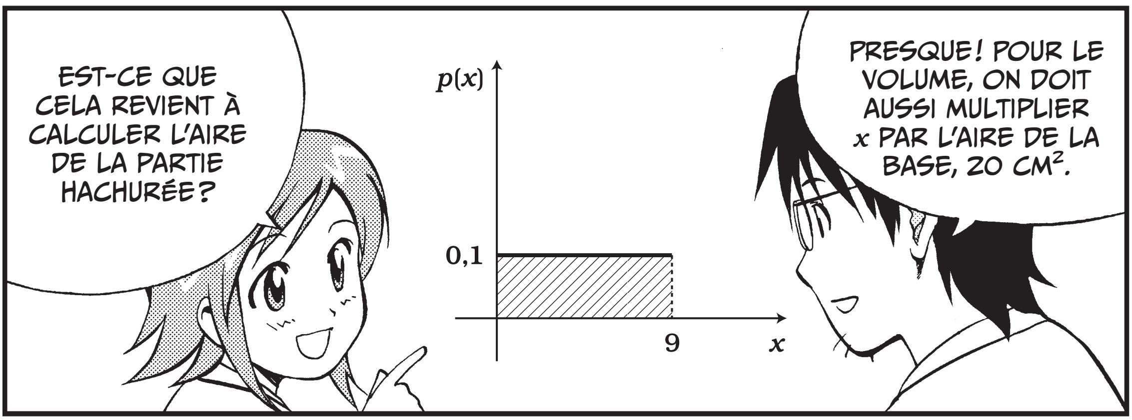
* UNE EAU-DE-VIE JAPONAISE

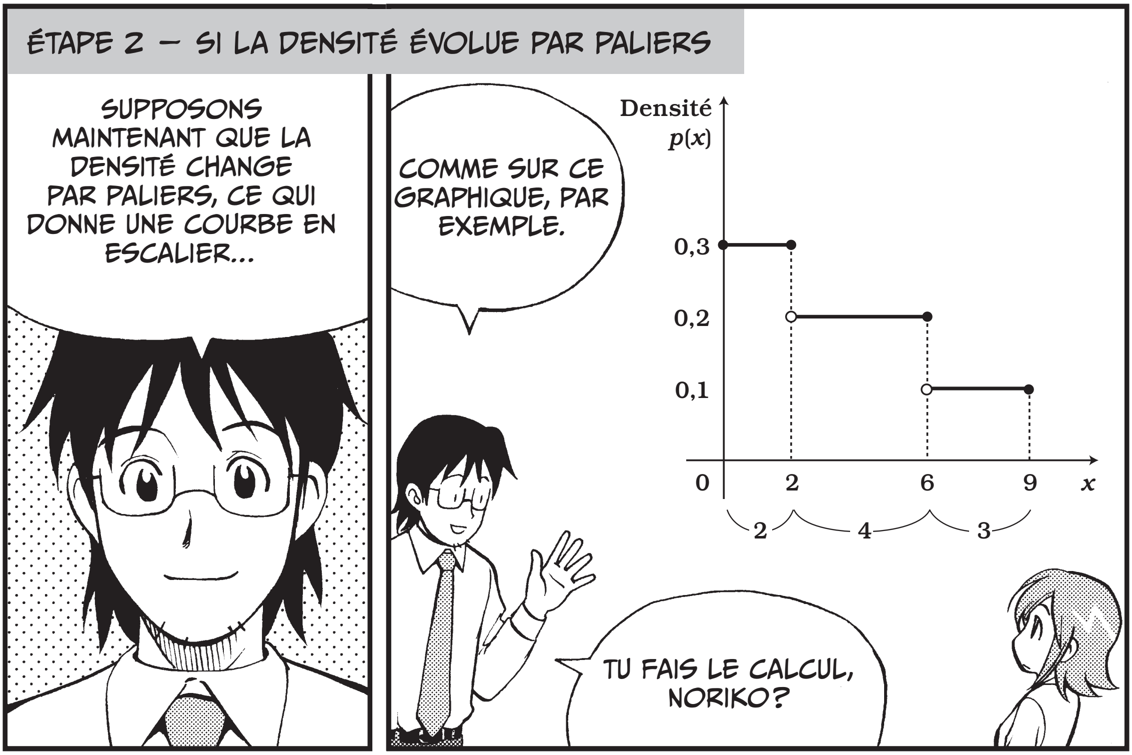
1 Illustration du théorème fondamental de l'analyse

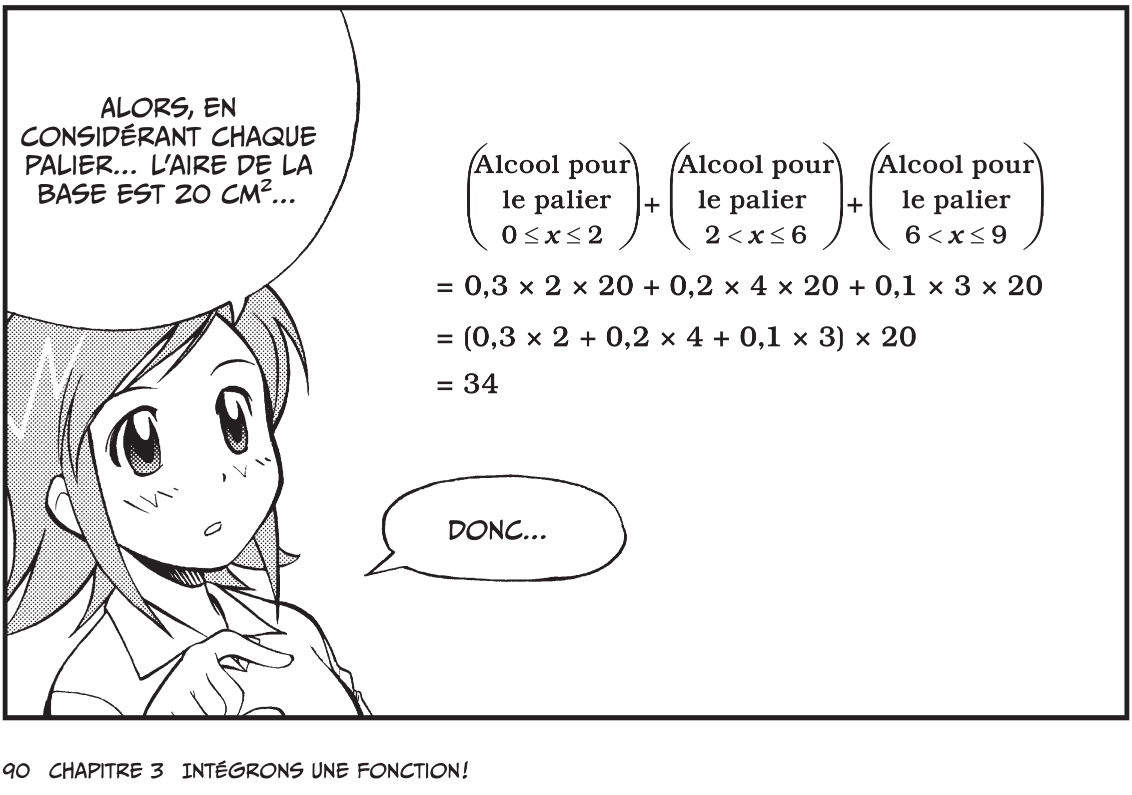


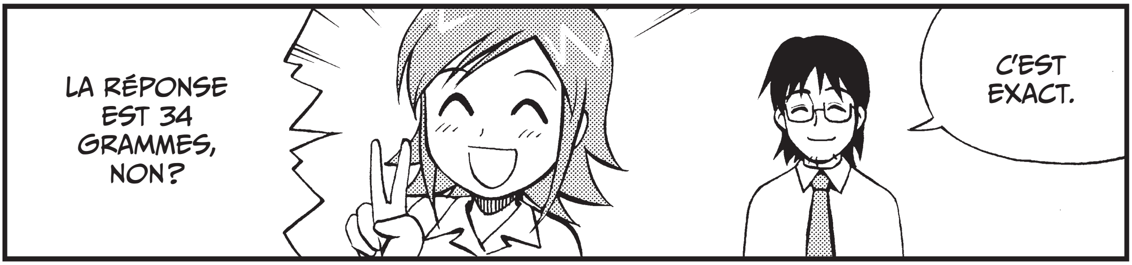

Densité
p(x)
2
0,02
0
Hauteur
9
x
SUPPOSONS QUE p(x) S'ÉCRIVE
$$p(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$
MAINTENANT, NORIKO, QUELLE QUANTITÉ D'ALCOOL EN GRAMMES CONTIENT CE SHOCHU À L'EAU CHAUDE ?
JE NE PEUX PAS TROUVER ÇA COMME ÇA.

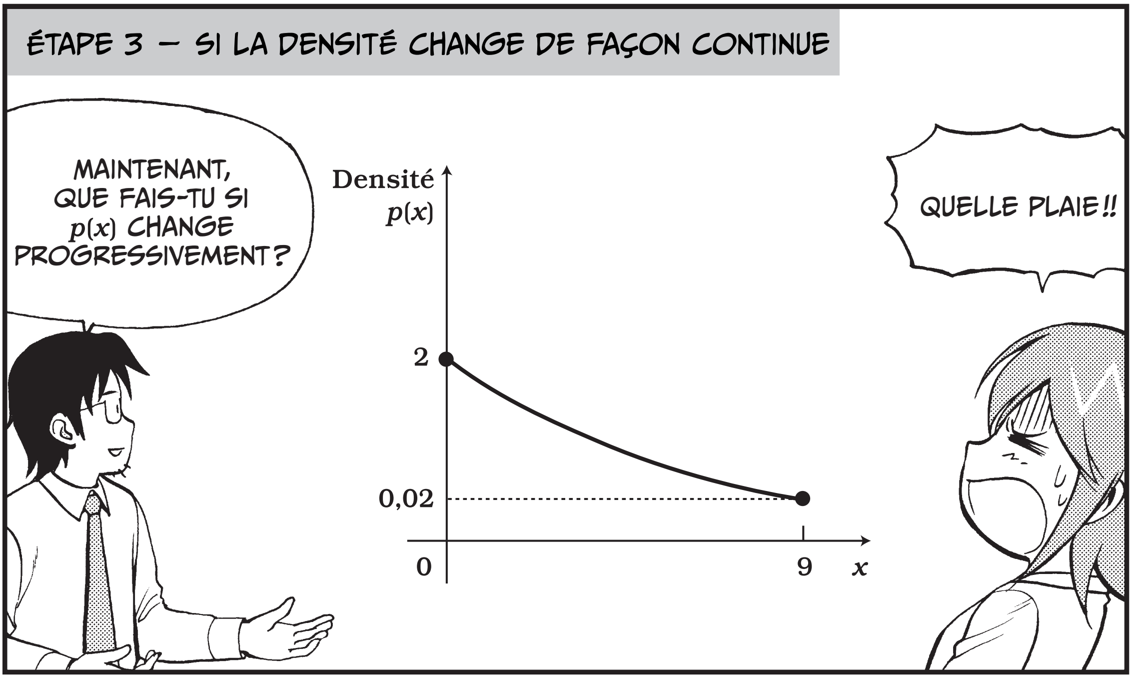

ÉTAPE 1 — SI LA DENSITÉ EST CONSTANTE
BON. SI LA DENSITÉ EST CONSTANTE, C'EST FACILE. LA QUANTITÉ TOTALE D'ALCOOL EST ÉGALE À LA DENSITÉ FOIS LE VOLUME DU LIQUIDE.
p(x)
0,1
9
x
AVEC UNE DENSITÉ DE 0,1 G/CM^3, COMME SUR CE GRAPHE, ON MULTIPLIE LA DENSITÉ PAR LE VOLUME DE LIQUIDE : 0,1 X 9 X 20 = 18 G, QUI EST LA QUANTITÉ D'ALCOOL.

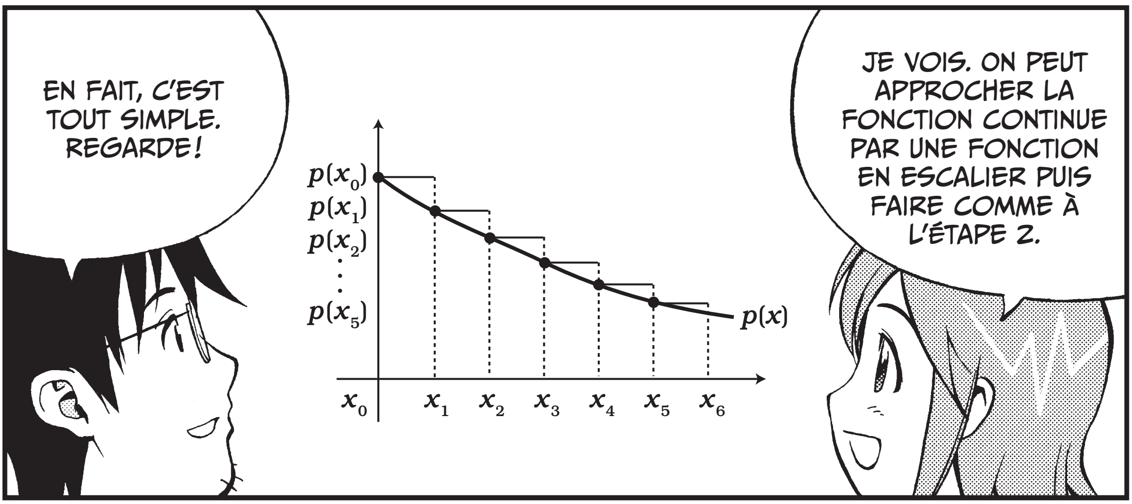

EST-CE QUE CELA REVIENT À CALCULER L'AIRE DE LA PARTIE HACHURÉE ?
p(x)
0,1
9
x
PRESQUE ! POUR LE VOLUME, ON DOIT AUSSI MULTIPLIER x PAR L'AIRE DE LA BASE, 20 CM^2.

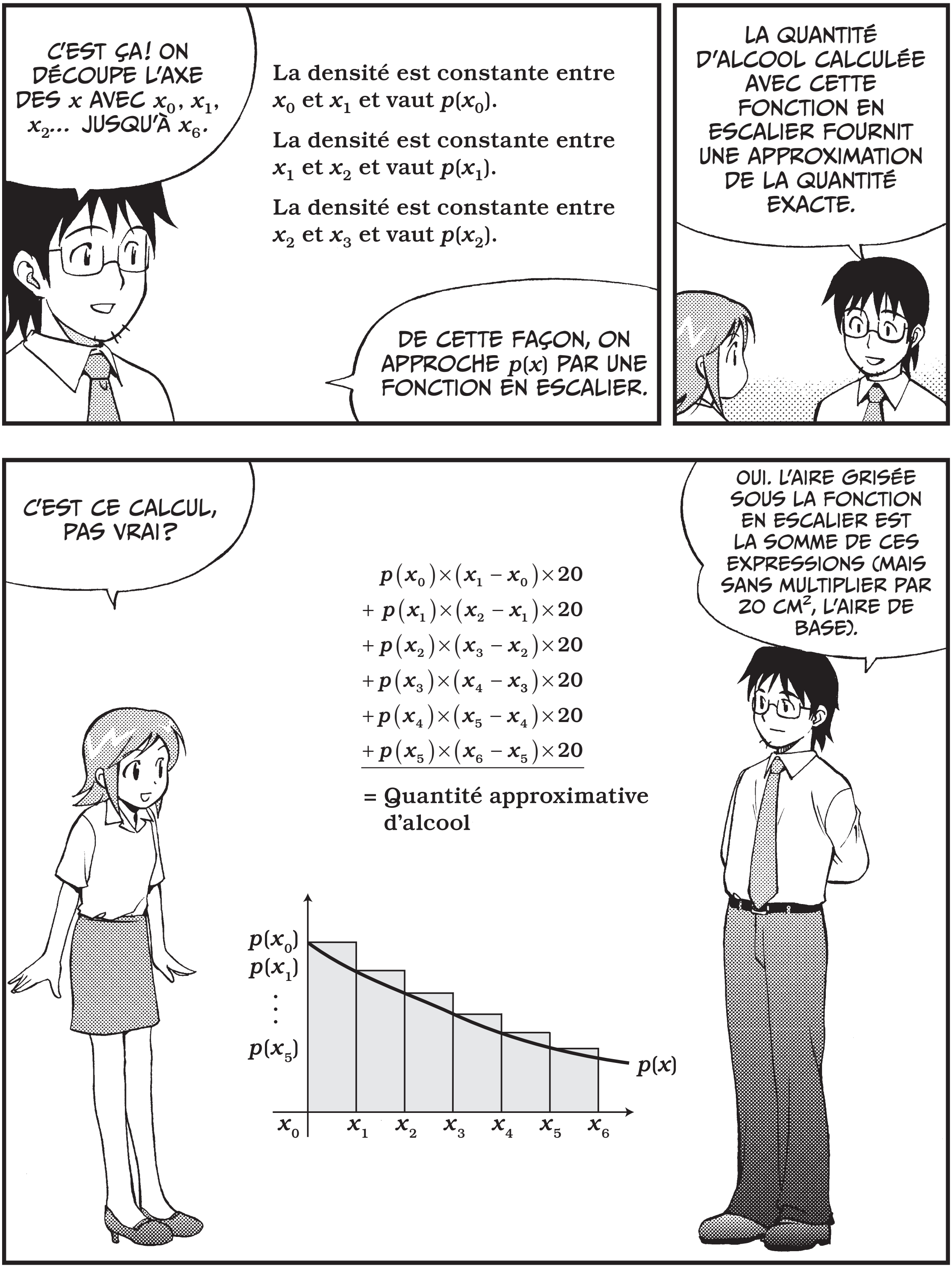

ÉTAPE 2 — SI LA DENSITÉ ÉVOLUE PAR PALIERS
SUPPOSONS MAINTENANT QUE LA DENSITÉ CHANGE PAR PALIERS, CE QUI DONNE UNE COURBE EN ESCALIER...
COMME SUR CE GRAPHIQUE, PAR EXEMPLE.
Densité $p(x)$
0,3
0,2
0,1
0
2
6
9
x
2
4
3
TU FAIS LE CALCUL, NORIKO?


ALORS, EN CONSIDÉRANT CHAQUE PALIER... L'AIRE DE LA BASE EST 20 CM²...
$\begin{pmatrix}\text{Alcool pour}\\ \text{le palier}\\ 0 \le x \le 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Alcool pour}\\ \text{le palier}\\ 2 < x \le 6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Alcool pour}\\ \text{le palier}\\ 6 < x \le 9\end{pmatrix}$
$= 0{,}3 \times 2 \times 20 + 0{,}2 \times 4 \times 20 + 0{,}1 \times 3 \times 20$
$= (0{,}3 \times 2 + 0{,}2 \times 4 + 0{,}1 \times 3) \times 20$
$= 34$
DONC...


LA RÉPONSE EST 34 GRAMMES, NON ?
C'EST EXACT.


ÉTAPE 3 — SI LA DENSITÉ CHANGE DE FAÇON CONTINUE
MAINTENANT, QUE FAIS-TU SI $p(x)$ CHANGE PROGRESSIVEMENT ?
Densité $p(x)$
2
0,02
0
9
x
QUELLE PLAIE !!


EN FAIT, C'EST TOUT SIMPLE. REGARDE !
$p(x_0)$
$p(x_1)$
$p(x_2)$
$p(x_5)$
$p(x)$
x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6
JE VOIS. ON PEUT APPROCHER LA FONCTION CONTINUE PAR UNE FONCTION EN ESCALIER PUIS FAIRE COMME À L'ÉTAPE 2.


C'EST ÇA! ON DÉCOUPE L'AXE DES x AVEC x_0, x_1, x_2… JUSQU'À x_6.
La densité est constante entre x_0 et x_1 et vaut $p(x_0)$.
La densité est constante entre x_1 et x_2 et vaut $p(x_1)$.
La densité est constante entre x_2 et x_3 et vaut $p(x_2)$.
DE CETTE FAÇON, ON APPROCHE $p(x)$ PAR UNE FONCTION EN ESCALIER.
LA QUANTITÉ D'ALCOOL CALCULÉE AVEC CETTE FONCTION EN ESCALIER FOURNIT UNE APPROXIMATION DE LA QUANTITÉ EXACTE.
C'EST CE CALCUL, PAS VRAI?
$p(x_0)\times(x_1-x_0)\times 20$
$+\,p(x_1)\times(x_2-x_1)\times 20$
$+\,p(x_2)\times(x_3-x_2)\times 20$
$+\,p(x_3)\times(x_4-x_3)\times 20$
$+\,p(x_4)\times(x_5-x_4)\times 20$
$+\,p(x_5)\times(x_6-x_5)\times 20$
= Quantité approximative d'alcool
$p(x_0)$
$p(x_1)$
$p(x_5)$
$p(x)$
x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6
OUI. L'AIRE GRISÉE SOUS LA FONCTION EN ESCALIER EST LA SOMME DE CES EXPRESSIONS (MAIS SANS MULTIPLIER PAR 20 CM^2, L'AIRE DE BASE).


ET DONC, SI L'ON REND CETTE DIVISION INFINIMENT FINE, ON OBTIENT LA QUANTITÉ EXACTE D'ALCOOL, N'EST-CE PAS?
EH BIEN, C'EST VRAI, MAIS CE N'EST PAS RÉALISTE.
たん
たん
たん
TU DEVRAIS ADDITIONNER UN NOMBRE INFINI DE TRANCHES INFINIMENT FINES.
JE... JE VOIS.
REGARDE CETTE EXPRESSION. ÇA NE TE RAPPELLE RIEN?
$p(x_3)\times(x_4 - x_3)$
AH!
ON DIRAIT UNE APPROXIMATION PAR UNE FONCTION AFFINE!

ÉTAPE 4 – APPROXIMATION PAR UNE FONCTION AFFINE

En notant $f'(x)$ la dérivée de $f(x)$, on a $f(x) \approx f'(a)\ (x - a) + f(a)$ près de $x = a$.

En soustrayant $f(a)$ des deux côtés, on obtient

❶ $f(x) - f(a) \approx f'(a)(x - a)$

soit (Variation de f) ≈ (Dérivée de f) × (Variation de x)

L'expression ci-dessus n'est valable que si x est proche de a. On suppose désormais que l'intervalle entre les valeurs x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_6 est petit : x_1 est proche de x_0, x_2 est proche de x_1, et ainsi de suite.

À présent, introduisons une nouvelle fonction, $q(x)$, dont la dérivée est $p(x)$. Ceci s'écrit $q'(x) = p(x)$.

Utilisons ❶ pour cette fonction $q(x)$:

(Variation de q) ≈ (Dérivée de q) × (Variation de x)

$$q(x_1) - q(x_0) \approx p(x_0)(x_1 - x_0)$$

$$q(x_2) - q(x_1) \approx p(x_1)(x_2 - x_1)$$

La somme des termes de droite de ces expressions est approximativement égale à la somme des termes de gauche.

Or certains termes se compensent :

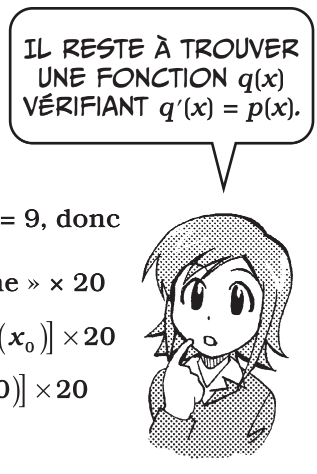
$$\begin{array}{rl}
& \cancel{q(x_1)} - q(x_0) \approx p(x_0)(x_1 - x_0) \\
& \cancel{q(x_2)} - \cancel{q(x_1)} \approx p(x_1)(x_2 - x_1) \\
& \cancel{q(x_3)} - \cancel{q(x_2)} \approx p(x_2)(x_3 - x_2) \\
& \cancel{q(x_4)} - \cancel{q(x_3)} \approx p(x_3)(x_4 - x_3) \\
& \cancel{q(x_5)} - \cancel{q(x_4)} \approx p(x_4)(x_5 - x_4) \\
+ & q(x_6) - \cancel{q(x_5)} \approx p(x_5)(x_6 - x_5) \\
\hline
& q(x_6) - q(x_0) \approx \text{« la somme »}
\end{array}$$

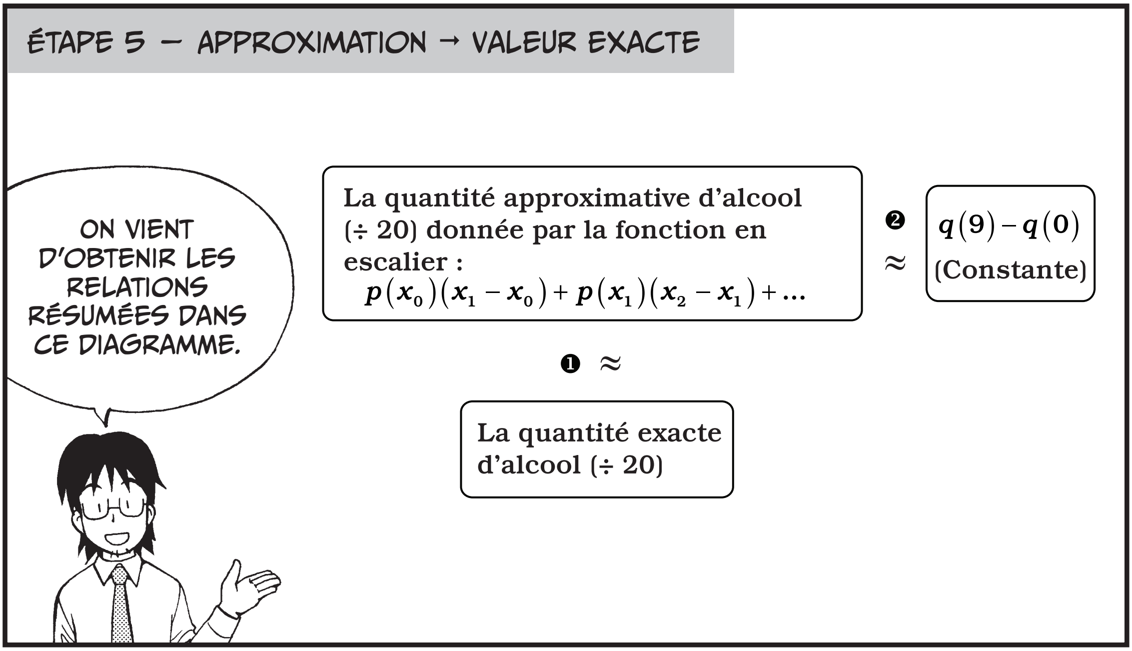
Compte tenu des dimensions du verre, $x_0 = 0$ et $x_6 = 9$, donc

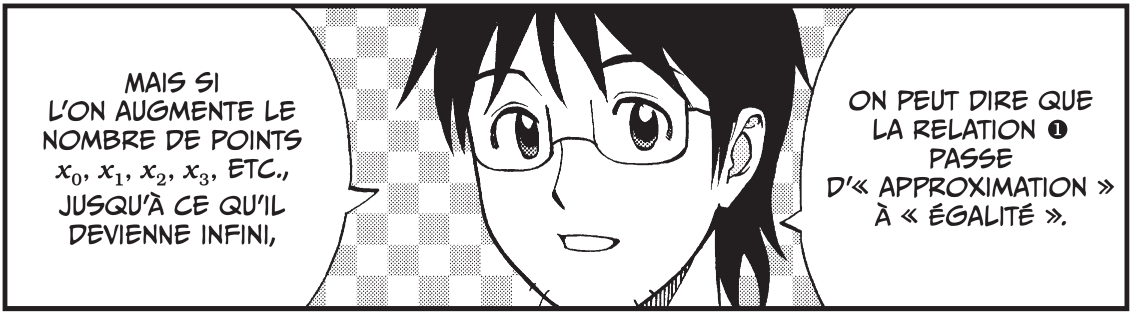
La quantité approximative d'alcool = « la somme » × 20

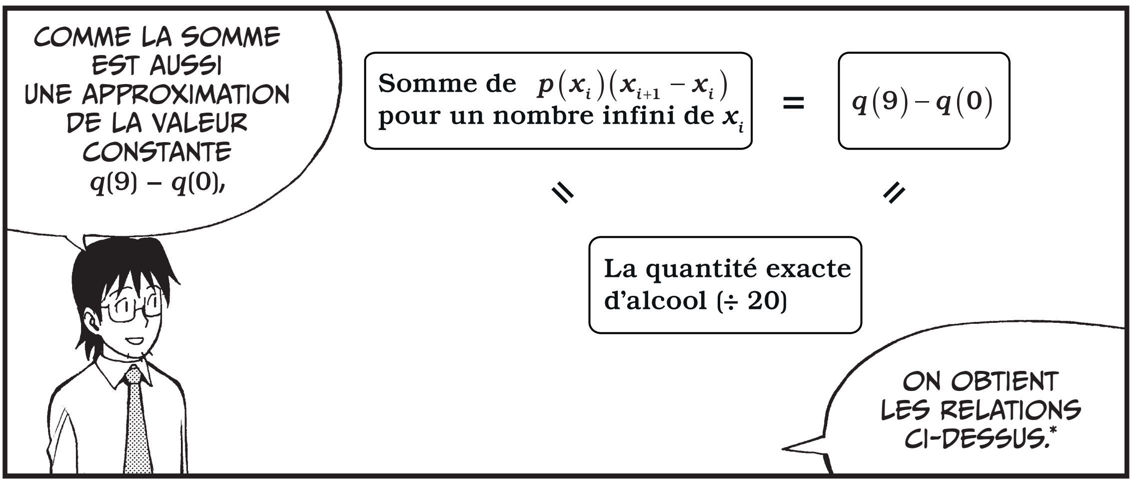
$$= [q(x_6) - q(x_0)] \times 20$$

$$= [q(9) - q(0)] \times 20$$



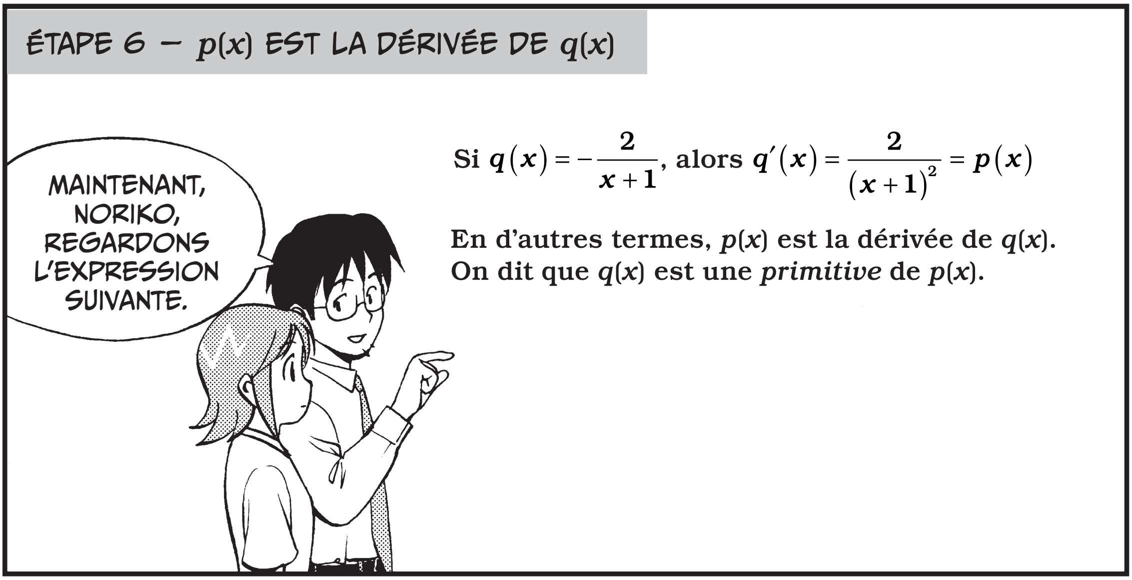






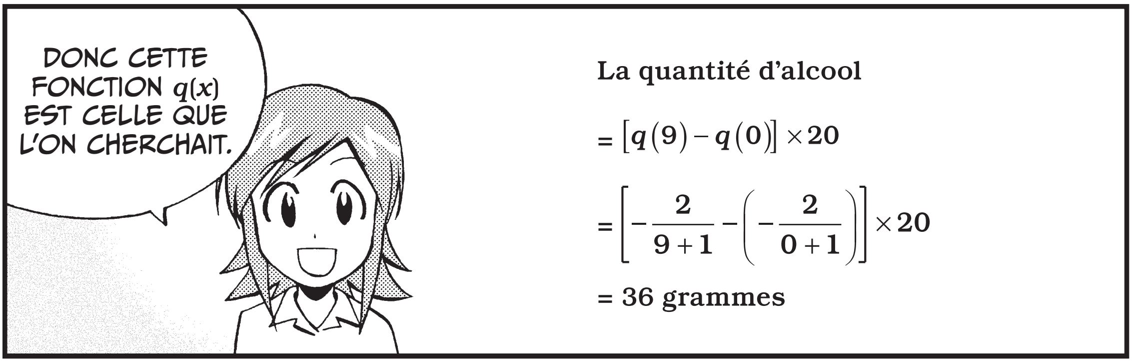
* Une preuve plus rigoureuse sera donnée page 100.

ÉTAPE 6 — $p(x)$ EST LA DÉRIVÉE DE $q(x)$



Si $q(x) = -\dfrac{2}{x+1}$, alors $q'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2} = p(x)$

En d'autres termes, $p(x)$ est la dérivée de $q(x)$.
On dit que $q(x)$ est une *primitive* de $p(x)$.

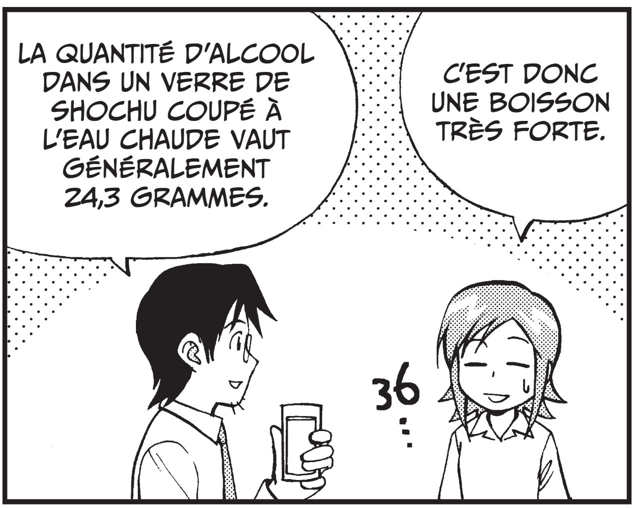


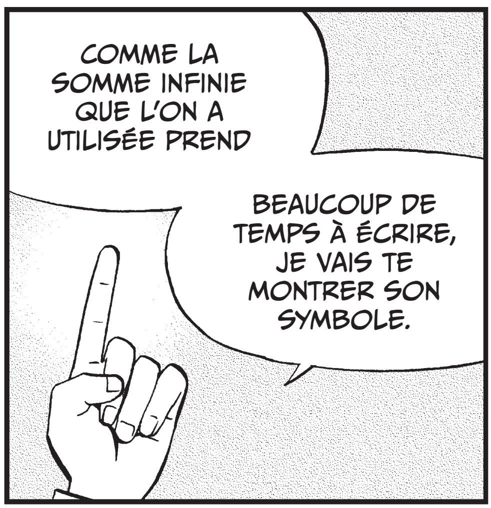
La quantité d'alcool

$$= [q(9) - q(0)] \times 20$$

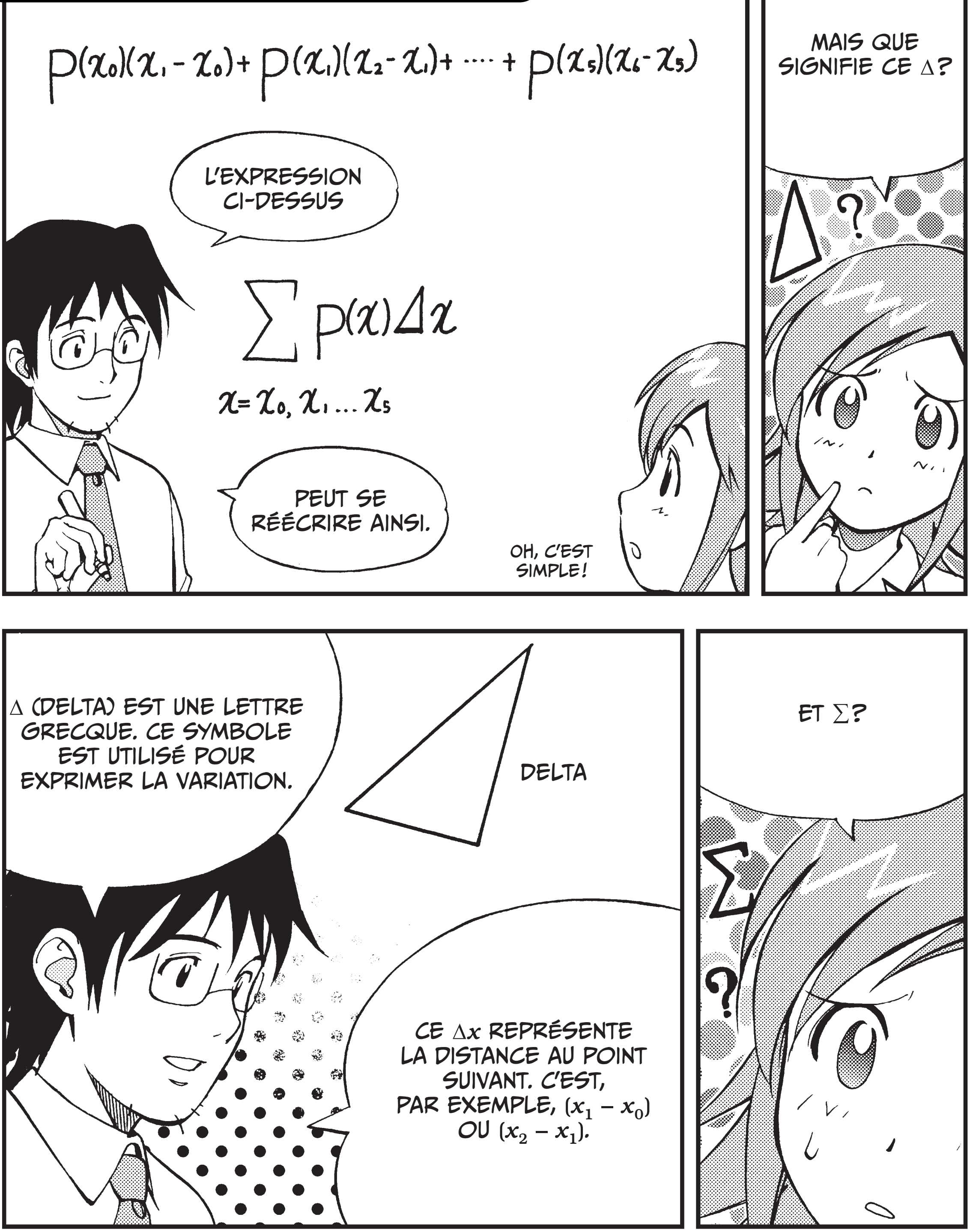
$$= \left[-\frac{2}{9+1} - \left(-\frac{2}{0+1}\right)\right] \times 20$$

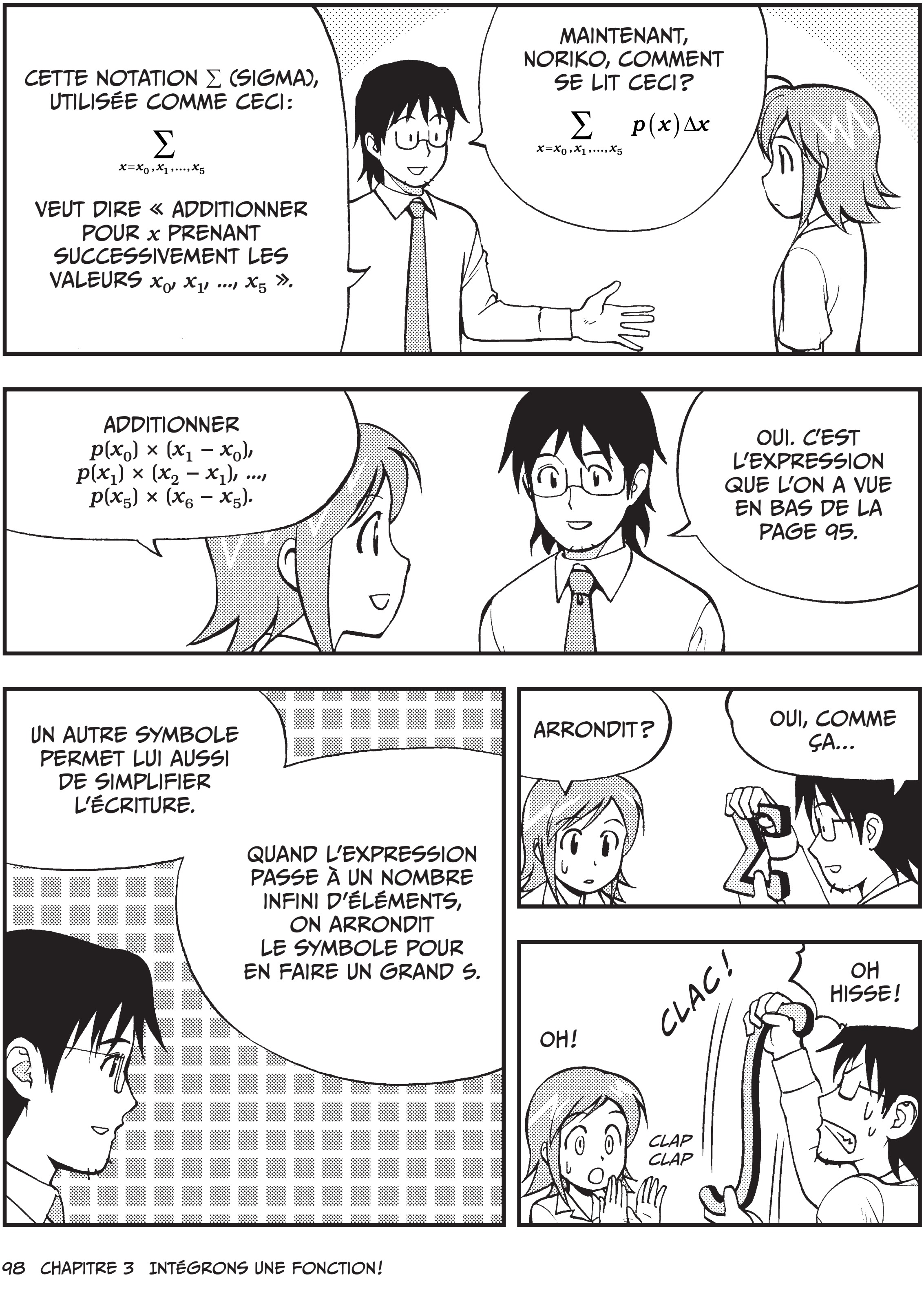
= 36 grammes

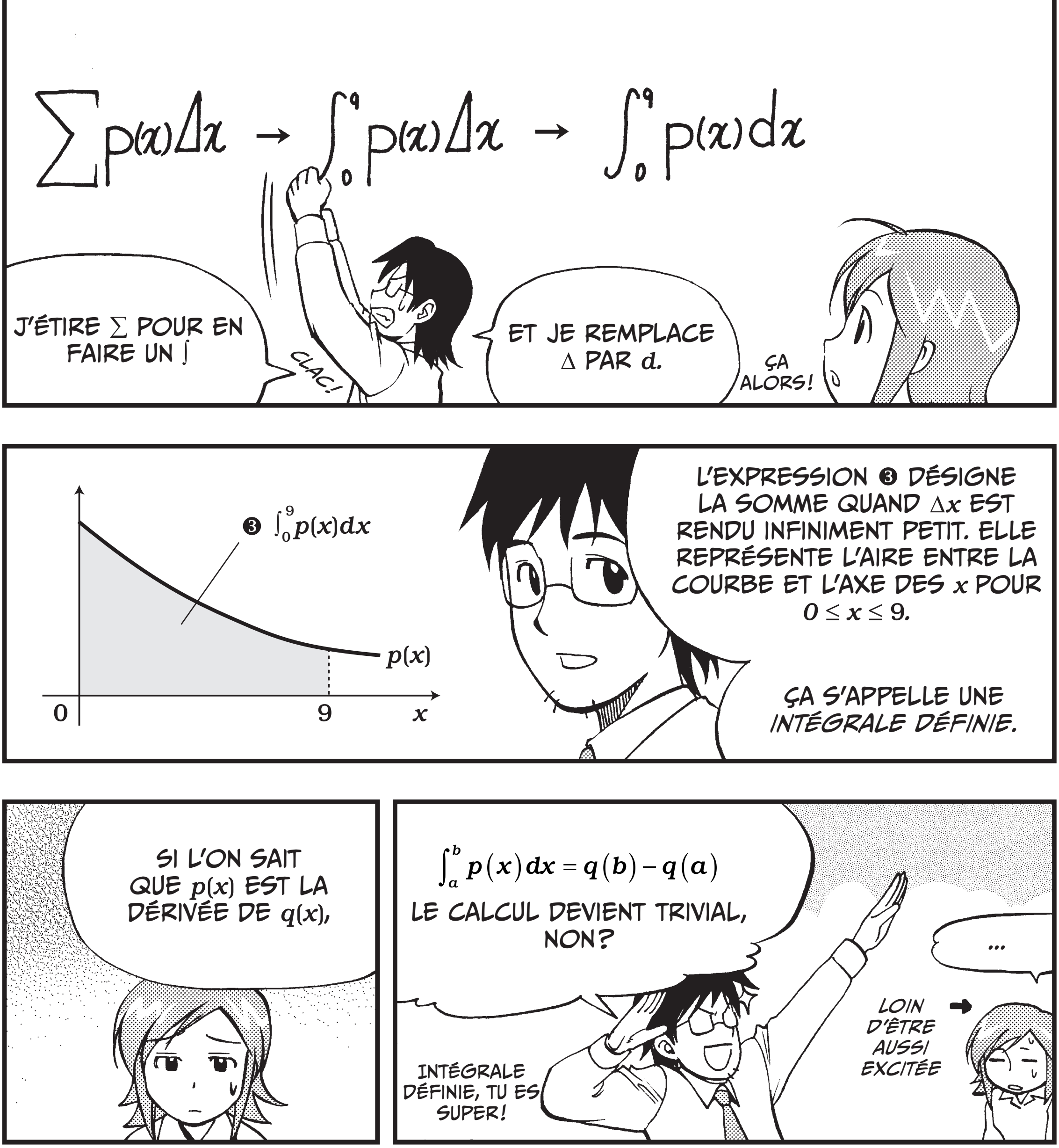




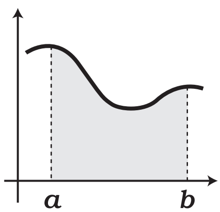
2 Le théorème fondamental de l'analyse




CETTE NOTATION $\sum$ (SIGMA), UTILISÉE COMME CECI : $\sum_{x=x_0, x_1, \ldots, x_5}$ VEUT DIRE « ADDITIONNER POUR x PRENANT SUCCESSIVEMENT LES VALEURS x_0, x_1, ..., x_5 ».
MAINTENANT, NORIKO, COMMENT SE LIT CECI ? $\sum_{x=x_0, x_1, \ldots, x_5} p(x)\Delta x$
ADDITIONNER $p(x_0) \times (x_1 - x_0)$, $p(x_1) \times (x_2 - x_1)$, ..., $p(x_5) \times (x_6 - x_5)$.
OUI. C'EST L'EXPRESSION QUE L'ON A VUE EN BAS DE LA PAGE 95.
UN AUTRE SYMBOLE PERMET LUI AUSSI DE SIMPLIFIER L'ÉCRITURE.
QUAND L'EXPRESSION PASSE À UN NOMBRE INFINI D'ÉLÉMENTS, ON ARRONDIT LE SYMBOLE POUR EN FAIRE UN GRAND S.
ARRONDIT ?
OUI, COMME ÇA...
OH HISSE !
CLAC !
OH !
CLAP CLAP



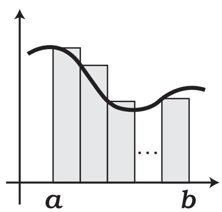
BILAN



$$\int_a^b p(x)dx \approx \sum_{x=x_0,x_1,\ldots,x_n} p(x)\Delta x$$

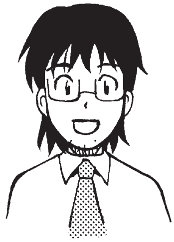
Si on trouve $q(x)$ qui satisfait $q'(x) = p(x)$,

$$\int_a^b p(x)\,dx = q(b) - q(a)$$



C'EST LE THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ANALYSE!

Une justification précise de l'étape 5



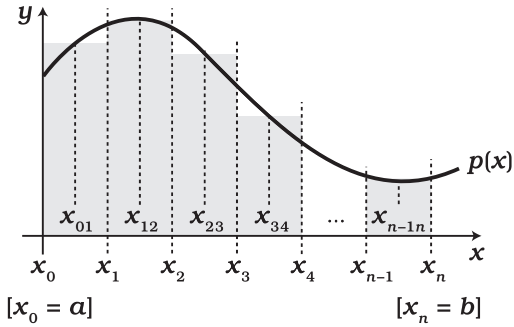
Dans l'explication donnée précédemment (page 95), on a écrit $q(x_1) - q(x_0) \approx p(x_0)(x_1 - x_0)$, une identité « grossière » qui s'approche à peu près de l'expression exacte. Pour ceux qui pensent que c'est du travail bâclé, voici une explication plus soignée grâce au théorème des accroissements finis.

Supposons que l'on connaisse $q(x)$ vérifiant $q'(x) = p(x)$.

Plaçons des points x_0 (= a), x_1, x_2, x_3, ..., x_n (= b) sur l'axe des x.

On repère ensuite un point x_{01} entre x_0 et x_1 vérifiant $q(x_1) - q(x_0) = q'(x_{01})(x_1 - x_0)$.

L'existence de x_{01} est garantie par le théorème des accroissements finis. De même, on trouve x_{12} entre x_1 et x_2 et on obtient $q(x_2) - q(x_1) = q'(x_{12})(x_2 - x_1)$.



Aires de ces morceaux

En répétant cette opération, il vient

$$
\left.
\begin{array}{rlll}
 & q(x_1) - q(x_0) = & q'(x_{01})(x_1 - x_0) & = p(x_{01})(x_1 - x_0) \\
 & q(x_2) - q(x_1) = & q'(x_{12})(x_2 - x_1) & = p(x_{12})(x_2 - x_1) \\
 & q(x_3) - q(x_2) = & q'(x_{23})(x_3 - x_2) & = p(x_{23})(x_3 - x_2) \\
 & \dots & \dots & \dots \\
+ & q(x_n) - q(x_{n-1}) = & q'(x_{n-1n})(x_n - x_{n-1}) & = p(x_{n-1n})(x_n - x_{n-1}) \\
\hline
 & q(x_n) - q(x_0) & &
\end{array}
\right] \text{On additionne}
$$

$$q(x_n) - q(x_0) \longleftarrow \boxed{\text{Toujours égal}} \longrightarrow \text{Aire approchée}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \text{ Sections infiniment fines}$$

$$q(b) - q(a) \longleftarrow \boxed{\text{Égal}} \longrightarrow \text{Aire exacte}$$

Ceci correspond au diagramme de l'étape 5.

3 Formules d'intégration

FORMULE 3-1: LES FORMULES D'INTÉGRATION

❶ $$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

On peut joindre les intervalles contigus des intégrales définies d'une même fonction (relation de Chasles).

❷ $$\int_a^b \left[f(x) + g(x)\right] dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

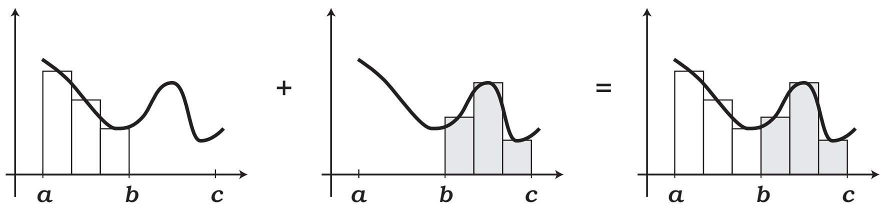
L'intégrale définie d'une somme est la somme des intégrales définies.

❸ $$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$$

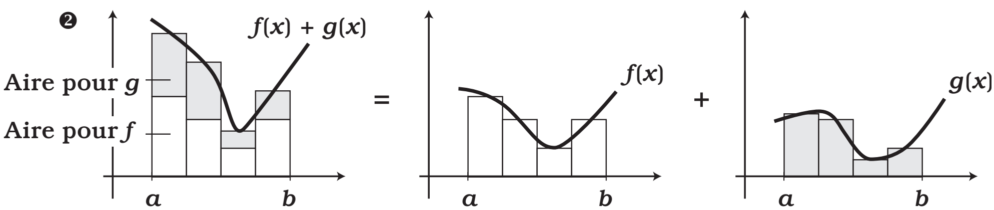
Une constante multiplicative à l'intérieur d'une intégrale définie peut être sortie de l'intégrale (transparence aux scalaires).

Les formules ❶ à ❸ sont intuitives si on fait un dessin.

❶



❷



❸