3M

Décomposition en fractions simples

- Quitte à effectuer une division polynomiale, toute fonction rationnelle $\frac{N(x)}{D(x)}$ peut s'écrire $Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$ avec $\deg(R(x)) < \deg(D(x))$
- Le dénominateur $D(x)$ peut se factoriser en facteurs linéaires $ax+b$ ou quadratiques indécomposables $ax^2 + bx + c$ (avec $b^2 - 4ac < 0$)
- La fraction $\frac{R(x)}{D(x)}$ se décompose en une somme de fractions simples de la manière suivante :

1) à tout facteur linéaire $(ax+b)^n$ correspond une somme de fractions simple du type :

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

avec $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ des nombres réels ;

2) à tout facteur quadratique indécomposable $(ax^2+bx+c)^n$ correspond une somme de fractions simples du type :

$$\frac{A_1 x + B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2 x + B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_n x + B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

avec $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_n, B_n$ des nombres réels

Exemple :

$$\frac{x^2-2x+6}{x^2-x-2} = 1 + \frac{-x+8}{x^2-x-2} = 1 + \frac{-x+8}{(x-2)(x+1)}$$

$$\boxed{\frac{-x+8}{(x-2)(x+1)}} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x+1} = \boxed{\frac{A_1(x+1)+A_2(x-2)}{(x-2)(x+1)}}$$

$$\to \quad -x+8 = A_1(x+1)+A_2(x-2) = A_1x + A_1 + A_2x - 2A_2$$

$$-x+8 = x(A_1+A_2) + A_1 - 2A_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = -1 \\ A_1 - 2A_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 2 \\ A_2 = -3 \end{cases}$$

$$\frac{x^2-2x+6}{x^2-x-2} = 1 + \frac{-x+8}{x^2-x-2}$$

$$= 1 + \frac{2}{x-2} - \frac{3}{x+1}$$

Ex :

$$\int \frac{x^2-2x+6}{x^2-x-2}\,dx = \int \left(1 + \frac{2}{x-2} - \frac{3}{x+1}\right) dx$$

$$= \int dx + 2\int \frac{1}{x-2}\,dx - 3\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= x + 2\ln(|x-2|) - 3\ln(|x+1|) + c$$