Probabilités

4.2 Définition de la notion de probabilité

4.2.1 On jette un dé. Quelle est la probabilité d'avoir :

a) le numéro 2 ?

b) un numéro pair ?

c) un numéro supérieur à 4 ?

lancer un dé : 6 possibilités $\Rightarrow U = \{1;2;3;4;5;6\}$

$\Rightarrow |U| = 6$

$$\boxed{P = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}}$$

a) $P(\text{"2"}) = \frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6} \cong \underline{16{,}7\%}$

b) numéro pair : 2 / 4 / 6 $\Rightarrow$ 3 choix

$\Rightarrow P(\text{"pair"}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = \underline{50\%}$

c) numéro supérieur à 4 : 5 et 6 $\Rightarrow$ 2 choix

$\Rightarrow P(\text{"}>4\text{"}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0{,}\overline{3} \cong \underline{33{,}3\%}$

4.2.2 On tire une carte d'un jeu de 36 cartes. Quelles sont les probabilités des événements :

a) tirer un as ?

b) tirer un carreau ?

c) tirer le valet de coeur ?

$U = \{36 \text{ cartes}\} = \{\underbrace{9 \text{ piques}}, 9 \text{ trèfle} ; 9 \text{ coeurs} ; 9 \text{ carreaux}\}$

as / roi / dame / valet / 10 / 9 / 8 / 7 / 6

a) 4 as $\Rightarrow P(\text{"as"}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 0,\overline{1} \cong 11,1\%$

$C_1^9 = 9$

b) 1 carreau $\Rightarrow P(\text{"1 carreau"}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$

c) Le valet de coeur est unique $\Rightarrow P(\text{" V}\heartsuit\text{ "}) = \frac{1}{36} = 0,02\overline{7} \cong 2,78\%$

4.2.3 On tire successivement 3 cartes d'un jeu de 36 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) 3 as ?

b) 2 rois et une dame ?

c) au moins un valet ?

calculatrice : 36 2nd nCr 3

Tous les tirages de 3 cartes : $C_3^{36} = 7140 = |U|$

a) Tous les tirages de 3 as : $C_3^{4} = 4$ (4 as)

$\Rightarrow P(\text{" 3 as "}) = \dfrac{4}{7140} \cong 0{,}00056 \cong \underline{0{,}056}\,\%$

b) Tous les tirages de $\underbrace{2 \text{ rois}}$ et $\underbrace{1 \text{ dame}}$:

$C_2^{4} \cdot C_1^{4} = 6 \cdot 4 = 24$ (4 rois, 4 dames)

$\Rightarrow P(\text{" 2R + 1D "}) = \dfrac{24}{7140} \cong 0{,}00336 \cong \underline{0{,}34}\,\%$

c) " Au moins un valet "

$\Rightarrow$ 4 cas possibles

- 1 valet et 2 cartes : $C_1^{4} \cdot C_2^{32} = 1984$ (36-4 valets)
- 2 valets et 1 cartes : $C_2^{4} \cdot C_1^{32} = 192$
- 3 valets et 0 cartes : $C_3^{4} = 4$
- 4 valets : impossibles (on tire 3 cartes)

$\Rightarrow P(\text{" au moins 1 valet "}) = \dfrac{C_1^4 \cdot C_2^{32} + C_2^4 \cdot C_1^{32} + C_3^4}{C_3^{36}} = \dfrac{1984 + 192 + 4}{7140}$

$= \dfrac{2180}{7140} \cong 0{,}305 \cong \underline{30{,}5}\,\%$

• Autre méthode :

Le contraire de "au moins 1 valet" c'est tirer "aucun valet"

$\Rightarrow C_3^{32} = 4960$

$\Rightarrow$ Le contraire : $7140 - 4960 = 2180$

$\Rightarrow P(\text{"au moins 1 valet"}) = \dfrac{2180}{7140} \cong 0{,}305 \cong 30{,}5\%$

• Autre méthode :

Tirer "aucun valet" $C_3^{32} = 4960$

$\Rightarrow P(\text{"aucun valet"}) = \dfrac{4960}{7140} \cong 0{,}6947 \cong 69{,}5\%$

$\Rightarrow$ Le contraire : $P(\text{"au moins 1 valet"}) = 100\% - 69{,}5\% = 30{,}5\%$

4.2.4 On jette une pièce de monnaie 4 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) deux fois pile, puis deux fois face ?

b) deux fois pile et deux fois face (ordre quelconque) ?

c) au plus une fois pile ?

Tous les lancers :

P/F		P/F		P/F		P/F	
2	·	2	·	2	·	2	$= 2^4 = 16$

a) PPFF $\Rightarrow$ 1 seule possibilité :

$$\Rightarrow P(\text{"PPFF"}) = \frac{1}{16} = 0{,}0625 = \underline{6{,}25}\,\%$$

b) 2 P et 2 F $\Rightarrow$ il faut trouver tous les anagrammes de "PPFF"

$$\Rightarrow \overline{P}_4(2;2) = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{24}{4} = 6$$

(ou $C^4_2 = 6$: choix de 2 places pour PP)

PPFF / PFPF / PFFP / FPPF / FPFP / FFPP

$$\Rightarrow P(\text{" 2P et 2F "}) = \frac{6}{16} = 0{,}375 = \underline{37{,}5}\,\%$$

(ou $6 \cdot 6{,}25\,\% = 37{,}5\,\%$)

c) au plus une fois pile: 0 P ou 1 P

0 P $\Rightarrow$ FFFF $\Rightarrow$ 1 cas

1 P $\Rightarrow$ PFFF ou FPFF ou FFPF ou FFFP $\Rightarrow$ 4 cas

$C^4_1 = 4$ ou $C^4_3 = 4$

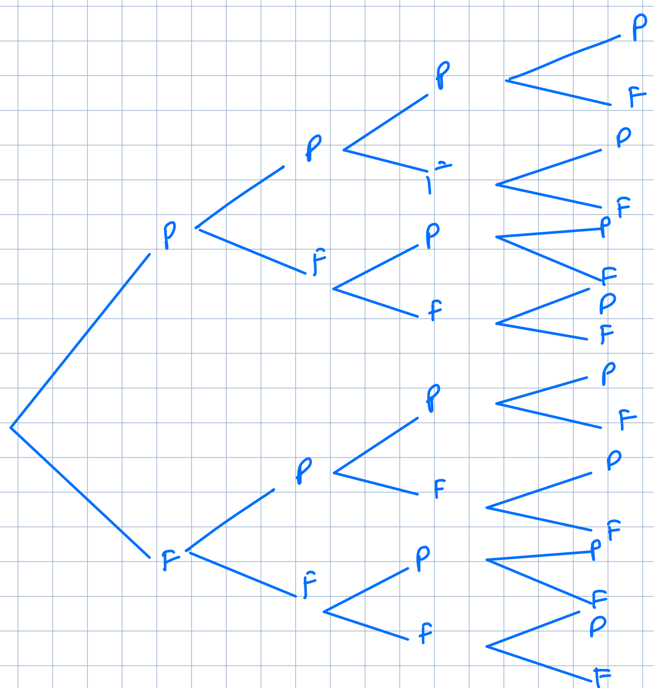
ou $\overline{P}_4(3) = \frac{4!}{3!} = 4$

=> Total : 5 cas

=> P(" au plus une fois Pile ") $= \frac{5}{16} = 0{,}3125 = 31{,}25\%$

! Arbre :

1er lancer — 2ème — 3ème — 4ème



=> PPPP
=> PPPF
=> PPFP
=> PPFF
=> PFPP
=> PFPF
=> PFFP
=> PFFF
=> FPPP
=> FPPF
=> FPFP
=> FPFF
=> FFPP
=> FFPF
=> FFFP
=> FFFF

4.2.5 On jette simultanément un dé rouge et un dé blanc. Quelle est la probabilité d'amener :

a) deux numéros égaux ?

b) un 2 et un 5 ?

c) un 2 rouge et un 5 blanc ?

d) une somme égale à 7 ?

e) une somme au plus égale à 3 ?

f) une somme au plus égale à 11 ?

Univers :

1R 1B	2R 1B	3R 1B	. . . .	6R 1B
1R 2B	2R 2B	3R 2B		6R 2B
1R 3B	2R 3B	3R 3B		6R 3B
1R 4B	⋮	⋮		⋮
1R 5B				
1R 6B	2R 6B	3R 6B		6R 6B

$\Rightarrow$ en tout : $6 \cdot 6 = 36$ tirages possibles.

a) P(" 2 numéros égaux ") : 1R 1B / 2R 2B / 3R 3B / 4R 4B / 5R 5B / 6R 6B

$\Rightarrow P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \cong 16{,}7\%$

b) P(" un 2 et un 5 ") 2R 5B / 2B 5R $\Rightarrow$ 2 cas

$\Rightarrow P = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \cong 5{,}6\%$

c) $P(\underbrace{\text{" un 2R et un 5B "}}_{P(\text{" 2R 5B "})}) = \frac{1}{36} \cong 2{,}8\%$

d) P(" une somme = 7 ") $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \cong 16{,}7\%$

e) P(" une somme au plus égale à 3 ") = P(" somme ≤ 3 ") $= \frac{3}{36} \cong 8{,}3\%$

1R1B
2R1B
1R2B

f) P(" somme ≤ 11 ") $= \frac{35}{36} \cong 97{,}2\%$

sauf 6R6B

4.2.6 On tire successivement 13 cartes d'un jeu de 52. Déterminer la valeur exacte de la probabilité que trois exactement de ces cartes soient des rois.

Tous les tirages : $C^{52}_{13} \cong 6{,}35 \cdot 10^{11}$

52 - 4 rois

Tous les tirages avec 3 rois : $C^{4}_{3} \cdot C^{48}_{10} \cong 2{,}62 \cdot 10^{10}$

$\Rightarrow P(\text{" 3 rois "}) = \dfrac{2{,}62 \cdot 10^{10}}{6{,}35 \cdot 10^{11}} \cong 0{,}041 \cong 4{,}1\,\%$

4.2.8 D'un jeu de 36 cartes, on extrait simultanément au hasard 3 cartes. Calculer la probabilité de tirer :

a) 3 cartes de même « couleur » [1],

b) 3 rois,

c) 1 as et 2 rois,

d) exactement deux cartes de même « couleur »,

e) 2 cartes rouges et 1 noire,

f) 1 as, 1 roi et 1 dame,

g) 1 pique, 1 carreau et 1 trêfle.

1. Contrairement à la couleur d'une carte à jouer (rouge ou noire), la « couleur » est à interpréter comme étant la nature de la carte (pique, coeur, carreau ou trêfle).

Tous les tirages : $C^{36}_{3} = 7140$

9 cartes par couleur

a) 3 cartes de même couleurs : $4 \cdot C^{9}_{3} = 4 \cdot 84 = 336$

4 couleurs

$\Rightarrow P = \dfrac{336}{7140} \cong 0{,}0471 \cong 4{,}7\,\%$

b) 3 rois : $C^{4}_{3} = 4$

$\Rightarrow P = \dfrac{4}{7140} \cong 0{,}00056 \cong 0{,}056\,\%$

c) 1 as et 2 rois : $C^4_1 \cdot C^4_2 = 4 \cdot 6 = 24$

$\Rightarrow P = \dfrac{24}{7140} \cong 0{,}0034 \cong \underline{0{,}34}\,\%$

d) 2 cartes de la même couleur :

$\Rightarrow$ choix de 2 couleurs : $C^4_2 = 6$

$\Rightarrow$ choix des cartes : $C^9_1 \cdot C^9_2 = 9 \cdot 36 = 324$

$\Rightarrow$ choix de la couleur pour 1 ou 2 cartes : $\underline{2}$

$\Rightarrow P = \dfrac{\text{nombre de choix favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{6 \cdot 324 \cdot 2}{7140}$

$P \cong 0{,}5445 \cong \underline{54{,}5}\,\%$

• Autre méthode :

Choix de la couleur avec 2 cartes : $C^4_1 = 4$

Choix des 2 cartes : $C^9_2 = 36$

Choix d'une 3ème carte : $C^{27}_1 = 27$ $\to (36 - 9 = 27)$

$\Rightarrow 4 \cdot 36 \cdot 27 = 3888$

$\Rightarrow P = \dfrac{3888}{7140} \cong 0{,}5445 \cong \underline{54{,}5}\,\%$

e) 2 rouges + 1 noire :

$C^{18}_2 \cdot C^{18}_1 = 153 \cdot 18 = 2754$

rouges

noires

$\Rightarrow P = \dfrac{2754}{7140} \cong 0{,}3857 \cong \underline{38{,}6}\,\%$

f) 1 as, 1 roi, 1 dame : $C_1^4 \cdot C_1^4 \cdot C_1^4 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

$\Rightarrow P = \dfrac{64}{7140} \cong 0{,}00896 \cong 0{,}9\,\%$

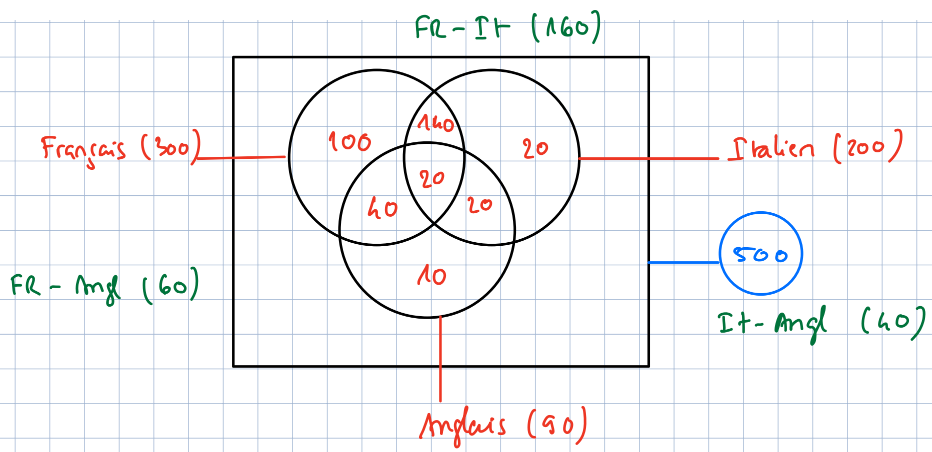
g) 1 pique, 1 carreau, 1 trèfle : $C_1^9 \cdot C_1^9 \cdot C_1^9 = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3 = 729$

$\Rightarrow P = \dfrac{729}{7140} \cong 0{,}102 \cong 10{,}2\,\%$

4.2.9 Dans une assemblée de 500 personnes, 300 comprennent le français, 200 l'italien, 90 l'anglais, 160 à la fois le français et l'italien, 60 à la fois le français et l'anglais, 40 à la fois l'italien et l'anglais et 20 comprennent les trois langues. Si l'on choisit une personne au hasard dans cette assemblée, quelle est la probabilité que cette personne comprenne :

a) exactement 2 de ces 3 langues ?

b) l'une au moins de ces 3 langues ?



a) Exactement 2 langues : $140 + 40 + 20 = 200$

$\Rightarrow P = \dfrac{200}{500} = \dfrac{2}{5} = 40\,\%$

b) Au moins 1 langues : $300 + 20 + 20 + 10 = 350$

$\Rightarrow P = \dfrac{350}{500} = \dfrac{7}{10} = 70\,\%$

4.2.10 Dans une enquête portant sur les pannes de voitures qui se sont produites au cours d'une année, on a pris en considération, pour un type de voitures déterminés, les événements suivants :

P_i : « il y a eu au moins i panne(s) » ($i = 0, 1, 2, 3$)

Lors du dépouillement de l'enquête, on a constaté que P_0, P_1, P_2 et P_3 se sont produits 543, 310, 156 et 81 fois respectivement. Quelle probabilité y a-t-il, pour un possesseur d'une voiture de ce type, de tomber en panne dans l'année qui vient,

a) exactement une fois ?

b) moins de deux fois ?

i	0	1	2	3
Exactement i panne(s)	233 (= 543 − 310)	154	75	81

a) $P(\text{" Tomber exactement 1 fois en panne "}) = \frac{154}{543} \simeq 28\ \%$

b) $P(\text{" Tomber en panne moins de 2 fois "}) = P(\text{" Tomber en panne 0 ou 1 fois "})$

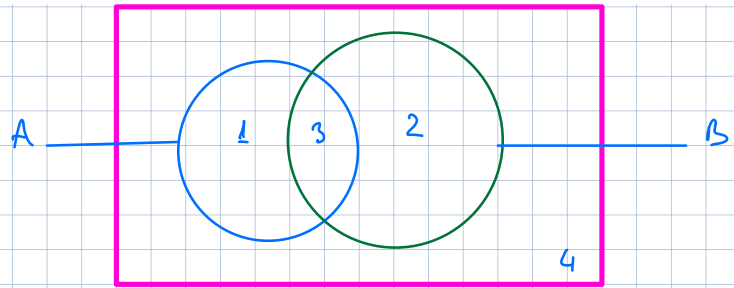
$= \frac{233 + 154}{543} = \frac{387}{543} \simeq 71\ \%$

! Autre méthode :

$P(\text{" Exact. 0 panne "}) + P(\text{" Exact. 1 panne "}) = \frac{233}{543} + \frac{154}{543}$

$\simeq 0{,}43 + 0{,}28 \simeq 71\ \%$

4.2.11 On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 2/5$, $P(B) = 1/2$ et $P(A \cap B) = 3/10$. Calculer la probabilité des événements : $A \cup B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup B$, $A \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$.



$P(A \cup B) = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$

$P(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

$P(\bar{B}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{1}{5}$

$P(A \cap \bar{B}) = \frac{2}{5} - \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$

$P(\bar{A} \cup B) = \frac{3}{5} + \frac{3}{10} = \frac{9}{10}$

$P(A \cup \bar{B}) = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} = \frac{4}{5}$

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

4.2.12 Est-il possible d'avoir deux événements A et B tels que $P(A) = 0,9$, $P(B) = 0,3$ et $P(A \cap B) = 0,1$?

Non car $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0,9 + 0,3 - 0,1$

$= 1,1 > 1$

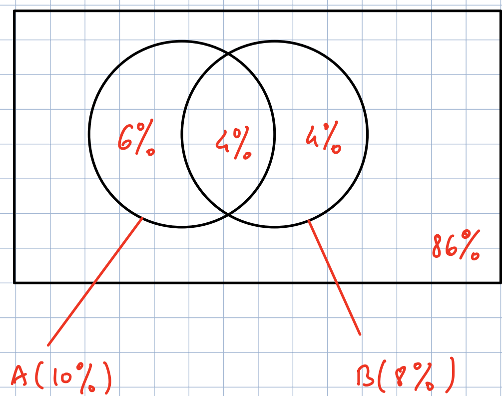
4.2.14 Un appareil fabriqué en très grande série peut être défectueux à cause de 2 défauts différents désignés par A et B. 10% des appareils ont le défaut A, 8% le défaut B et 4% les deux défauts simultanément. Un client achète l'un des appareils produits. Calculer la probabilité qu'il :

a) possède au moins un défaut,

b) possède le défaut A uniquement,

c) possède un seul défaut,

d) ne possède aucun défaut.



a) Au moins 1 défaut : $6+4+4 = \underline{14}\%$

b) A uniquement : $\underline{6}\%$

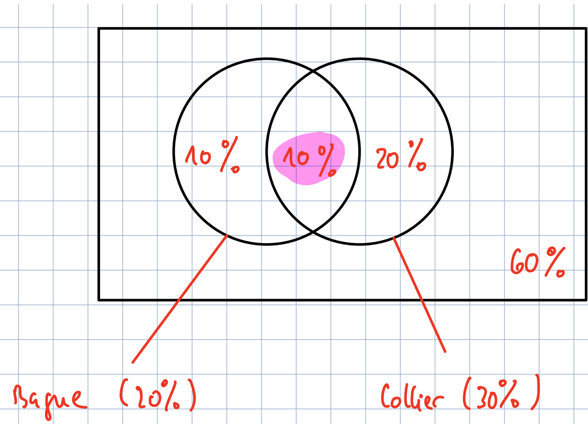
c) un seul défaut : $6+4 = \underline{10}\%$

d) Aucun défaut : $\underline{86}\%$

4.2.15 On sait que 60% des élèves d'une école ne portent ni bague, ni collier. De plus, 20% des élèves portent une bague et 30% ont un collier. Si un des élèves est choisi au hasard, quelle est la probabilité qu'il porte :

a) une bague ou un collier ?

b) une bague et un collier ?



60 % ne portent rien $\Rightarrow$ 40 % portent quelque chose

A inter B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$40\% = 20\% + 30\% - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 20\% + 30\% - 40\% = 10\%$$

a) $P(A \cup B) = 40\%$ → ! il s'agit du "ou" inclusif : Bague ou collier ou les deux

b) $P(A \cap B) = 10\%$

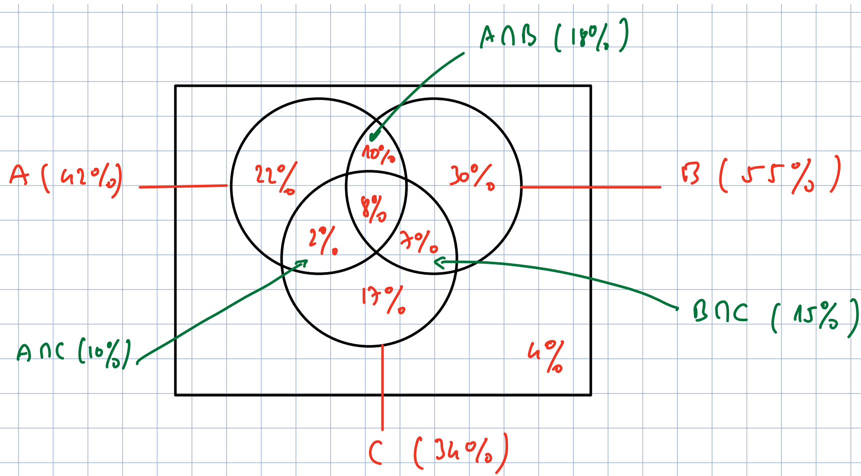
4.2.16 Une agence de voyages fait un sondage statistique sur la connaissance de trois pays désignés par A, B et C. On constate que parmi les personnes interrogées, 42% connaissent A, 55% connaissent B, 34% connaissent C, 18% connaissent A et B, 10% connaissent A et C, 15% connaissent B et C, 8% connaissent A, B et C. Un voyage est prévu pour l'une des personnes qui a répondu aux questions posées à l'occasion de ce sondage. On tire au sort le nom du gagnant. Quelle est la probabilité pour que le gagnant soit une personne :

a) connaissant au moins l'un de ces trois pays ?

b) ne connaissant aucun de ces trois pays ?

c) connaissant deux pays exactement ?

d) connaissant A, mais ne connaissant ni B, ni C ?



a) $55 + 22 + 2 + 17 = 96\,\%$

b) $100 - 96 = 4\,\%$

c) $10 + 2 + 7 = 19\,\%$

d) $22\,\%$

4.2.17 Un connaisseur estime, lors d'un concours de beauté qui voit s'affronter en finale les candidates A, B et C, que A a autant de chances de gagner que B, mais deux fois plus de chances de gagner que C. Le jury ne peut désigner qu'une seule reine de beauté. Quelles sont, du point de vue de notre connaisseur, les probabilités de victoire des trois candidates ?

On pose x = probabilité que C gagne

$\Rightarrow$ On a : $2x + 2x + x = 1$

$\Leftrightarrow 5x = 1 \Rightarrow \underline{x = \frac{1}{5}}$

$\Rightarrow \underline{P(A) = \frac{2}{5}}$ et $\underline{P(B) = \frac{2}{5}}$ et $\underline{P(C) = \frac{1}{5}}$

4.2.18 Un dé à six faces est pipé. On a $P(1) = 0.1$ et $P(6) = 0.4$. Les autres faces ont la même probabilité d'apparition. On jette une fois ce dé. Quelle est la probabilité :

a) d'obtenir 4,

b) d'obtenir un nombre impair,

c) d'obtenir 4 ou un nombre impair.

a) On pose $x = P(i)$ où $i = 2, 3, 4, 5$

$\Rightarrow \quad 4x + 0{,}1 + 0{,}4 = 1 \Rightarrow 4x = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

$\Rightarrow x = \frac{0{,}5}{4} = \frac{1}{8} \Rightarrow \underline{P(4) = \frac{1}{8}}$

b) $P(1) + P(3) + P(5) = 0{,}1 + 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{10} + \frac{1}{4} = \frac{2+5}{20}$

$= \underline{\frac{7}{20}}$

c) $P(4) + P(\text{"un nombre impair"}) = \frac{1}{8} + \frac{7}{20} = \underline{\frac{19}{40}}$

4.2.19 Deux joueurs A et B jettent alternativement une paire de dés. Le joueur A commence et gagne s'il obtient un total de 6 avant que B n'obtienne un total de 7, auquel cas c'est B qui gagne. Quelle est la probabilité que A gagne ?

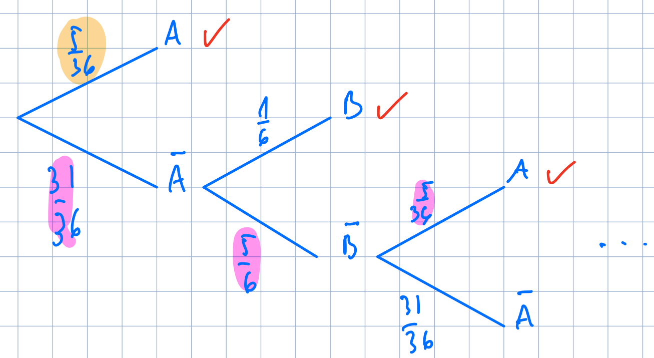
A : Total de 6 points : $(1;5) ; (5;1) ; (2;4) ; (4;2) ; (3;3) \Rightarrow \frac{5}{36}$

B : " 7 points : $(1;6) ; (6;1) ; (2;5) ; (5;2) ; (3;4) ; (4;3) \Rightarrow \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

A : événement A gagne $\Rightarrow \bar{A}$: événement A ne gagne pas

B : " B " $\Rightarrow \bar{B}$: " B "

$\Rightarrow$ <u>Arbre</u> :



$$\Rightarrow P = \frac{5}{36} + \frac{31}{36} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{36} + \ldots$$

$$P = \frac{5}{36} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{155}{216}\right)^i = \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{1-\frac{155}{216}} = \frac{5}{36} \cdot \frac{216}{61} = \frac{30}{61}$$

4.3 Probabilité conditionnelle

4.3.1 On jette deux dés l'un après l'autre et on considère les événements :

A :« le total des dés est 8 »,

B :« les deux nombres sont différents »,

C :« le premier dé donne un chiffre impair ».

Calculer : $P(A)$, $P(A|B)$, $P(A|C)$, $P(A|\overline{B})$, $P(A|\overline{C})$.

Nombre de lancers : $6 \cdot 6 = 36$

- A = " total des points = 8 " : 2+6 3+5 4+4 ⇒ 5 cas
  6+2 5+3

  $\Rightarrow P(A) = \frac{5}{36} \cong 0{,}139 \cong 13{,}9\,\%$

- B = " les deux nombres sont $\neq$ " ⇒ $36 - 6 = 30$ cas

  $\Rightarrow P(B) = \frac{30}{36} \cong 0{,}833 \cong 83{,}3\,\%$

- C = " Le 1^er^ dé impair " : $\frac{36}{2} = 18$ cas

  $\Rightarrow P(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} = 50\,\%$

- $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

  $A \cap B$: total = 8 et 2 dés $\neq$ ⇒ 2+6 3+5
  6+2 5+3 } ⇒ 4 cas

  $\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \cong 0{,}111 \cong 11{,}1\,\%$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15} \simeq 0{,}133$$

$$\simeq 13{,}3\%$$

- $P(A|C) = \dfrac{P(A\cap C)}{P(C)}$

$A\cap C$: total $= 8$ et 1^{er} impair $\Rightarrow$ $3+5$ $\quad 5+3$ $\Rightarrow$ 2 cas

$$\Rightarrow P(A|C) = \frac{2}{18} = \frac{1}{9} \simeq 0{,}111 \simeq 11{,}1\%$$

- $P(A|\overline{B}) = \dfrac{P(A\cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$

B = 2 nombres $\neq$ $\Rightarrow$ $\overline{B}$ = 2 nombres égaux $\Rightarrow$ 6 cas

$A\cap\overline{B}$ = total de 8 et 2 nombres égaux $\Rightarrow$ 1 cas

$$\Rightarrow P(A|\overline{B}) = \frac{1}{6} \simeq 0{,}166 \simeq 16{,}7\%$$

- $P(A|\overline{C}) = \dfrac{P(A\cap\overline{C})}{P(\overline{C})}$

C = 1^{er} impair $\Rightarrow$ $\overline{C}$ = 1^{er} pair $\Rightarrow$ 18 cas

$A\cap\overline{C}$ = total de 8 et 1^{er} pair $\Rightarrow$ $2+6$ $\quad 4+4$ $\quad 6+2$ $\Rightarrow$ 3 cas

$$\Rightarrow P(A|\overline{C}) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6} \simeq 0{,}166 \simeq 16{,}7\%$$

4.3.2 On tire une carte d'un jeu constitué de 36 cartes. Considérons les événements suivants :

A :« la carte tirée est un coeur »,

B :« la carte tirée est le valet de coeur »,

C :« la carte tirée est une figure de pique (roi, dame ou valet) ou un coeur ».

Calculer : $P(B|A)$, $P(A|C)$, $P(B|C)$, $P(C|B)$.

A = on tire un coeur $\Rightarrow P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 25\%$

B = on tire le valet de coeur $\Rightarrow P(B) = \frac{1}{36} = 0{,}0277 \approx 2{,}8\%$

C = on tire une figure de pique (R, D, V) ou un coeur $\Rightarrow 3 + 9 = 12$ cas

$\Rightarrow P(C) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33 \approx 33{,}3\%$

- $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1}{9} \approx 0{,}11 \approx 11{,}1\%$

$A \cap B$ = valet de coeur $\Rightarrow$ 1 cas A = un coeur $\Rightarrow$ 9 cas

- $P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 75\%$

$A \cap C$ = un coeur $\Rightarrow$ 9 cas C : 12 cas

- $P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{1}{12} \approx 0{,}0833 \approx 8{,}3\%$

$B \cap C$ = valet de coeur $\Rightarrow$ 1 cas ; C : 12 cas

- $P(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{1} = 1 = 100\%$

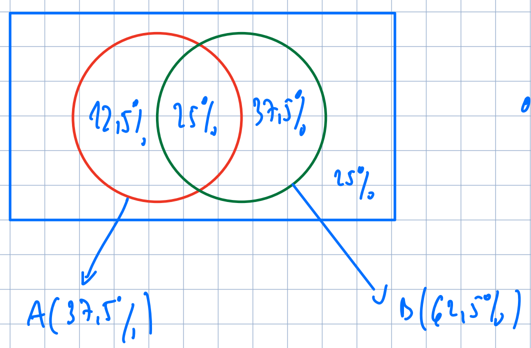
$C \cap B$ = valet de coeur $\Rightarrow$ 1 cas B : valet de coeur $\Rightarrow$ 1 cas

4.3.3 On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 3/8$, $P(B) = 5/8$ et $P(A \cup B) = 3/4$. Calculer $P(A|B)$ et $P(B|A)$.

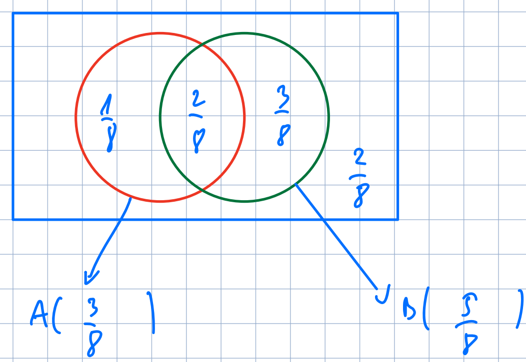
On a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} = \underbrace{\frac{3}{8} + \frac{5}{8}}_{=1} - P(A \cap B)$$

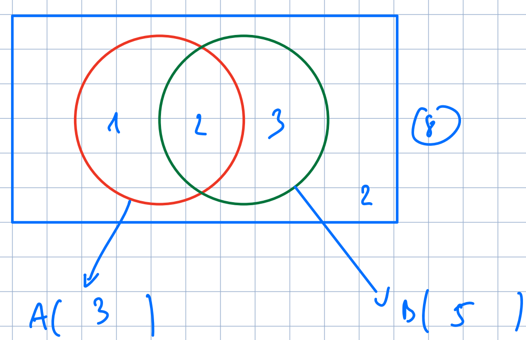
$$\Rightarrow P(A \cap B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 25\,\%$$



ou



ou



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{25}{62{,}5} = \frac{2/8}{5/8} = \frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\,\%$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{25}{37{,}5} = \frac{2/8}{3/8} = \frac{2}{3} \simeq 0{,}666 \simeq 66{,}7\,\%$$

4.3.4 On tire successivement 4 cartes d'un jeu de 36 cartes. Le jeu ayant été brassé convenablement, quelle probabilité a-t-on de tirer :

a) dans l'ordre : l'as de pique, de coeur, de trèfle, de carreau ?

b) les 4 as ?

c) les 4 as, sachant que les deux premières cartes tirées étaient des as ?

d) un as seulement ?

e) un as au moins ?

f) un as au moins, sachant que la première carte tirée n'était pas un as ?

Tous les tirages : $36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 = A_4^{36} = 1'413'720$

a) $P = \dfrac{1}{1413720} \cong \underline{0{,}000071}\ \%$

b) Les 4 as : $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$

$\Rightarrow P = \dfrac{24}{1413720} \cong \underline{0{,}0017}\ \%$

c) $P(\text{Les 4 as} \mid \text{les 2 premières sont des as}) = \dfrac{P(\text{4 as} \cap \text{les 2 premières sont des as})}{P(\text{les 2 premières sont des as})}$

$\Rightarrow$ les 2 premières sont des as : $4 \cdot 3 \cdot 34 \cdot 33$ (les 2 dernières peuvent êtres aussi des as)

d'où $P(\text{les 4 as} \mid \text{les 2 premières sont des as}) = \dfrac{\overset{\text{4 as}}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{4 \cdot 3 \cdot 34 \cdot 33} = \dfrac{1}{17 \cdot 33} = \dfrac{1}{561}$

$P \cong \underline{0{,}18}\ \%$

d) un as seulement : choix de l'as : 4

choix des 3 autres : $C_3^{32} = 4960$

Placement : $4! = 24$

$\Rightarrow 4 \cdot 4960 \cdot 24 = 476'160$

(Autre méthode : $A_1^4 \cdot A_3^{32} \cdot 4 = 476'160$)

$\Rightarrow P(\text{" un as "}) = \frac{476160}{1413720} \cong 0,3368 \cong 33,7\%$

e) un as au moins ⇒ le contraire : 0 as : $A_4^{32} = 863'040$

⇒ un as au moins : $1413720 - 863040 = 550'680$

$\Rightarrow P(\text{" au moins 1 as "}) = \frac{550680}{1413720} \cong 0,3895 \cong 38,95\%$

f) un as au moins, sachant que la $1^{ère}$ carte tirée ≠ as

* Méthode 1 :

placement de l'as

- 1 as : $32 \cdot 4 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 3 = 357120$
- 2 as : $32 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 31 \cdot C_2^3 = 35'712$

placement des 2 as

"3"

- 3 as : $32 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 768$

tot : 393 600

Tous les tirages où la $1^{ère}$ ≠ as : $32 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 = 1256640$

$\Rightarrow P = \frac{393600}{1256640} \cong 0,3132 \cong 31,32\%$

* Méthode 2 :

Aucun as : $32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 = A_4^{32} = 863040$

Tous les tirages où la $1^{ère}$ ≠ as : $32 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 = 1256640$

⇒ Au moins 1 as : $1256640 - 863040 = 393'600$

$\Rightarrow P = \frac{393600}{1256640} \cong 0,3132 \cong 31,32\%$

4.3.6 On sort d'un jeu de cartes les 4 as et les 4 rois. On tire successivement au hasard 4 cartes de ces 8 cartes. Quelle probabilité a-t-on de tirer :

a) les 4 as ?

b) un as au moins ?

c) 4 cartes rouges ?

d) 4 cartes de familles différentes ?

e) les 4 as, sachant que la première carte tirée était un as ?

f) les 4 as, sachant que la première carte tirée était un as rouge ?

g) les 4 as, sachant que la première carte tirée était l'as de coeur ?

Tous les tirages : $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = A^8_4 = 1680$

a) 4 as : $4! = 24 \Rightarrow P = \frac{24}{1680} \cong 0{,}0143 \cong 1{,}43\%$

(ou : $P = \frac{A^4_4}{A^8_4} = \frac{24}{1680}$) → 4 as

b) un as au moins : ⇒ le contraire : 0 as ≡ 4 rois ≡ 4 as $= 1{,}43\%$

$\Rightarrow P = 100\% - 1{,}43\% = 98{,}57\%$

(ou $\frac{1680 - A^4_4}{1680} = 98{,}57\%$) → des rois uniquement

c) 4 cartes rouges : ⇒ as de coeur - roi de coeur ⇒ $4! = 24$

// carreau - roi de de carreau

$\Rightarrow P = \dfrac{24}{1680} \approx 0{,}0143 \approx 1{,}43\,\%$

$\left(\text{ou : } \dfrac{A^4_4}{A^8_4} \right.$, vu qu'il y a 4 cartes rouges)

d) 4 cartes de familles différentes.

$\boxed{\heartsuit} \quad \boxed{\diamondsuit} \quad \boxed{\clubsuit} \quad \boxed{\spadesuit}$

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{As / Roi}} \cdot \underbrace{4!}_{\text{ordre}} = 16 \cdot 24 = 384$$

$\Rightarrow P = \dfrac{384}{1680} = \dfrac{8}{35} \approx 22{,}86\,\%$

(ou : $8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 384 \Rightarrow P = \dfrac{384}{1680} \approx 22{,}86\,\%$)

On enlève la 2ème carte de la couleur tirée

e) $P(\text{"les 4 as"} \mid \text{1ère carte = as"}) = \dfrac{P(\text{"4 as"})}{P(\text{1ère = as})} = \dfrac{24}{840} \approx 2{,}86\,\%$

La 1ère = as : $4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 840$

(ou : $4 \cdot A^7_3 = 840 \Rightarrow P = \dfrac{24}{840}$)

(ou : $P = \dfrac{P_4}{A^4_1 \cdot A^7_3} \approx 2{,}86\,\%$)

f) $P(\text{"Les 4 as} \mid \text{1ère carte = as rouge"}) = \dfrac{P(\text{"4 as et 1ère carte = as rouge"})}{P(\text{"1ère carte = as rouge"})}$

$\Rightarrow P = \dfrac{12}{420} \simeq \underline{2{,}86\,\%}$

où La 1ère = as rouge : $2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 420 \leftarrow$ ou $2 \cdot A_3^7 = 420$

4 as et la 1ère = as rouge : $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$

g) $P(\text{"Les 4 as} \mid \text{1ère = as } \heartsuit\text{"}) = \dfrac{P(\text{"4 as et 1ère = as } \heartsuit\text{"})}{P(\text{"1ère = as } \heartsuit\text{"})}$

$= \dfrac{6}{210} \simeq \underline{2{,}86\,\%}$

où La 1ère = as cœur : $1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ (ou $A_3^7 = 210$)

4 as et la 1ère = as $\heartsuit$: $1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

4.3.7 On sort d'un jeu de cartes les 4 as et les 4 rois. On tire ensuite au hasard 2 de ces 8 cartes. Quelle probabilité a-t-on de tirer :

a) deux as ?

b) deux as rouges ?

c) au moins un as ?

d) deux as, si l'on sait que l'une des cartes au moins est :

   i) un as ?

   ii) un as rouge ?

   iii) l'as de coeur ?

Tous les tirages : $C^8_2 = 28$

a) 2 as : $C^4_2 = 6 \Rightarrow P(\text{"2 as"}) = \frac{6}{28} \cong 0{,}2143 \cong 21{,}43\%$

b) 2 as rouges : $C^2_2 = 1 \Rightarrow P(\text{"2 as rouges"}) = \frac{1}{28} \cong 0{,}0357 \cong 3{,}57\%$

c) au moins 1 as

- 1 as : $C^4_1 \cdot C^4_1 = 4 \cdot 4 = 16$
- 2 as : $C^4_2 = 6$

$\Rightarrow$ total = 22 cas

$\Rightarrow P = \frac{22}{28} \cong 0{,}7857 \cong 78{,}57\%$

! Autres méthodes :

0 as : $C^4_2 = 6 \Rightarrow 28 - 6 = 22 \Rightarrow P = \frac{22}{28} \cong 78{,}57\%$

ou 0 as $\equiv$ 2 rois $\equiv$ 2 as $\Rightarrow P = 100\% - \underbrace{21{,}43\%}_{\Downarrow \text{ a)}} \cong 78{,}57\%$

d)

i) $P(\text{2 as} \mid \text{il y a un as au moins}) = \dfrac{P(\text{2 as})}{P(\text{il y a un as au moins})} = \dfrac{6}{22}$

$\cong 0{,}2727 \cong 27{,}27\%$

Il y a un as au moins : $C_1^4 \cdot C_1^4 = 4 \cdot 4 = 16$ (1 as)

ou $C_2^4 = 6$ (2 as) $\Rightarrow$ 22 cas

Il y a 2 as : $C_2^4 = 6$

ii) $P(2 \text{ as} \mid \text{il y a au moins 1 as rouge}) = \dfrac{P(2 \text{ as dont au moins 1 as rouge})}{P(\text{il y a au moins 1 as rouge})}$

- 2 as dont au moins 1 as rouge
  - 1 as noir et 1 as rouge : $C_1^2 \cdot C_1^2 = 4$
  - 2 as rouges : $C_2^2 = 1$

$\Rightarrow$ total $= 4 + 1 = 5$

- Au moins 1 as rouge
  - 1 as rouge : $C_1^2 \, C_1^6 = 2 \cdot 6 = 12$
  - 2 as rouges : $C_2^2 = 1$

$\Rightarrow$ total $= 13$

$\Rightarrow P(\text{as} \mid \text{il y a au moins 1 as rouge}) = \dfrac{5}{13} \cong 0{,}3846 \cong \underline{38{,}46}\,\%$

! <u>Autre méthode</u> : 2 as dont aucun rouge $C_2^2 = 1$

2 as : $C_2^4 = 6$

$\Rightarrow$ $6 - 1 = 5$

aucun as rouge : $C_2^6 = 15$

2 cartes : $C_2^8 = 28$

$\Big\} \Rightarrow 28 - 15 = 13$

$\Rightarrow P = \dfrac{5}{13} \cong 0{,}3846 \cong \underline{38{,}46}\,\%$

iii) $P(2 \text{ as} \mid \text{il y a au moins l'as de coeur}) = \dfrac{3}{7} \cong 0{,}4286 \cong 42{,}86\,\%$

- 2 as dont l'as de coeur : $C_1^1 \cdot C_1^3 = 1 \cdot 3 = 3$
- Au moins l'as de coeur : $C_1^1 \cdot C_1^7 = 1 \cdot 7 = 7$

4.3.8 On jette une paire de dés bien équilibrés.

Calculer la probabilité que la somme obtenue soit supérieure à 9, sachant que :

a) le premier dé a donné un 5 ,

b) au moins un dé a donné un 5.

Sachant que les deux chiffres obtenus sont différents, calculer la probabilité pour que :

c) la somme des points soit égale à 6 ,

d) la somme des points soit inférieure à 5 .

a) Somme > 9

- Somme = 10 : 4+6 / 6+4 / 5+5 → 3 cas
- Somme = 11 : 6+5 / 5+6 → 2 cas
- Somme = 12 : 6+6 → 1 cas

6 cas

$\Rightarrow P(\text{"somme} > 9 \mid \text{1er dé} = 5\text{"}) = \dfrac{P(\text{somme} > 9 \text{ et 1er dé} = 5)}{P(\text{1er dé} = 5)}$

où somme > 9 et 1er dé = 5 : $\left.\begin{array}{l} 5+5 = 10 \\ 5+6 = 11 \end{array}\right\} \Rightarrow 2$ cas

1er dé = 5 : 5-1 / 5-2 / 5-3 / 5-4 / 5-5 / 5-6 → 6 cas

$\Rightarrow P(\text{"somme} > 9 \mid \text{1er dé} = 5\text{"}) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \cong 33,33\ \%$

b) $P(\text{"somme} > 9 \mid \text{Au moins 1 dé} = 5\text{"}) = \dfrac{P(\text{somme} > 9 \text{ et au moins 1 dé} = 5)}{P(\text{Au moins 1 dé} = 5)}$

où somme > 9 et au moins 1 dé = 5 : $\left.\begin{array}{l} 5+5 = 10 \\ 6+5 = 11 \\ 5+6 = 11 \end{array}\right\} \Rightarrow 3$ cas

Au moins 1 dé = 5 : Aucun 5 : $5 \cdot 5 = 25 \Rightarrow 36 - 25 = 11$ cas

$\Rightarrow P(\text{"somme} > 9 \text{ et au moins 1 dé} = 5\text{"}) = \dfrac{3}{11} \cong 27,27\ \%$

c) 2 chiffres $\neq$: $36 - \underset{\substack{\downarrow \\ (1-1\,;\,2-2\,;\,\dots\,;\,6-6)}}{6} = 30$ cas

$$P(\text{"Somme} = 6 \mid 2 \text{ chiffres} \neq \text{"}) = \frac{P(\text{"Somme} = 6 \text{ et } 2 \text{ chiffres} \neq \text{"})}{P(\text{" 2 chiffres} \neq \text{"})}$$

$\Rightarrow$ Somme $= 6$: $1+5$; $2+4$

2 chiffres $\neq$: $5+1$; $4+2$ $\Big\} \Rightarrow 4$ cas

$\Rightarrow P = \frac{4}{30} \simeq 13,33\%$

d) $$P(\text{"Somme} < 5 \mid 2 \text{ chiffres} \neq \text{"}) = \frac{P(\text{"somme} < 5 \text{ et } 2 \text{ chiffres} \neq \text{"})}{P(\text{"2 chiffres} \neq \text{"})}$$

où Somme < 5 et 2 chiffres $\neq$: $1+3 = 4$; $1+2 = 3$; $3+1 = 4$; $2+1 = 3$ $\Big\} \Rightarrow 4$ cas

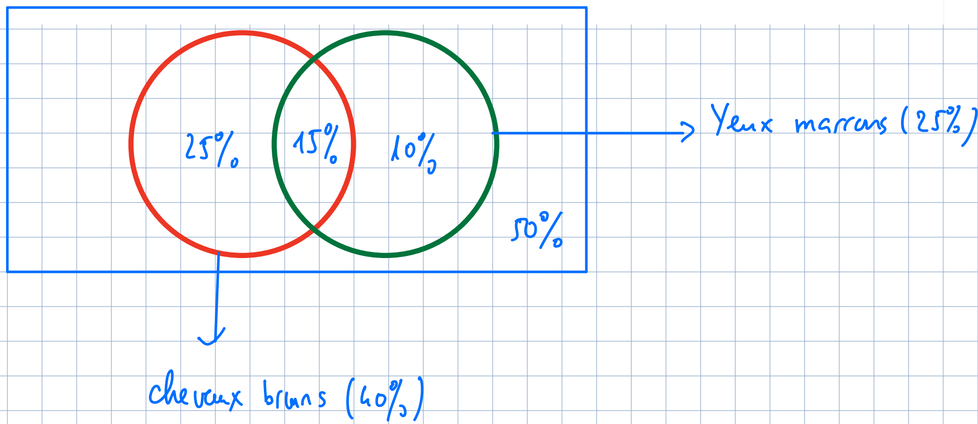
$\Rightarrow P = \frac{4}{30} \simeq 13,33\%$

4.3.9 Dans une certaine ville, 40% de la population a les cheveux bruns, 25% a les yeux marron, 15% a à la fois les cheveux bruns et les yeux marron. On choisit au hasard une personne résidant dans la ville.

a) Si elle a les cheveux bruns, quelle est la probabilité qu'elle ait les yeux marron ?

b) Si elle a les yeux marron, quelle est la probabilité qu'elle n'ait pas les cheveux bruns ?

c) Quelle est la probabilité qu'elle n'ait ni les cheveux bruns, ni les yeux marron ?



a) $P(\text{"Yeux marrons | cheveux bruns"}) = \dfrac{P(\text{"Yeux marrons et cheveux brun"})}{P(\text{"cheveux bruns"})}$

$= \dfrac{15\%}{40\%} = \dfrac{3}{8} = \underline{37{,}5\%}$

b) $P(\text{"cheveux} \neq \text{bruns | Yeux marrons"}) = \dfrac{P(\text{"cheveux} \neq \text{bruns et Yeux marrons"})}{P(\text{"Yeux marrons"})}$

$\Rightarrow P = \dfrac{10\%}{25\%} = \dfrac{2}{5} = \underline{40\%}$

c) $P(\text{"cheveux} \neq \text{bruns et Yeux} \neq \text{marrons"}) = \underline{50\%}$

$\left(= 1 - (0{,}4 + 0{,}25 - 0{,}15) = 0{,}5 = \frac{1}{2} \right)$

4.3.10 La probabilité que la batterie d'une voiture neuve fonctionne plus de 10'000 km est de 80%, la probabilité qu'elle fonctionne plus de 20'000 km est de 40% et la probabilité qu'elle fonctionne plus de 30'000 km est de 10%. Si la batterie d'une voiture neuve fonctionne toujours après 10'000 km, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 20'000 km ?

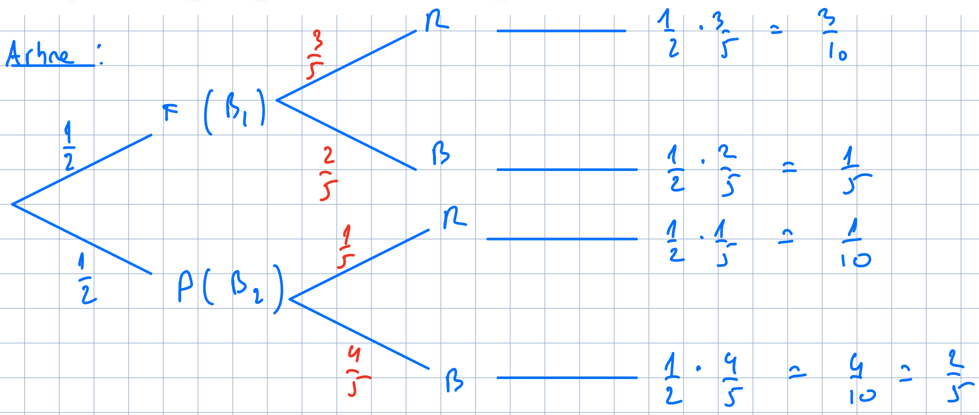
$$P(>20'000 \mid >10'000) = \frac{P(>20'000 \text{ et } >10'000)}{P(>10'000)}$$

$$= \frac{P(>20'000)}{P(>10'000)} = \frac{40\%}{80\%} = \frac{1}{2} = \underline{50\%}$$

4.3.11 On lance une pièce de monnaie bien équilibrée. Si l'on obtient face, on tire une bille d'une boîte B_1 contenant 3 billes rouges et 2 bleues. Sinon, on tire une bille d'une

boîte B_2 contenant 2 billes rouges et 8 bleues. Sachant qu'on a tiré une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte B_1 ?

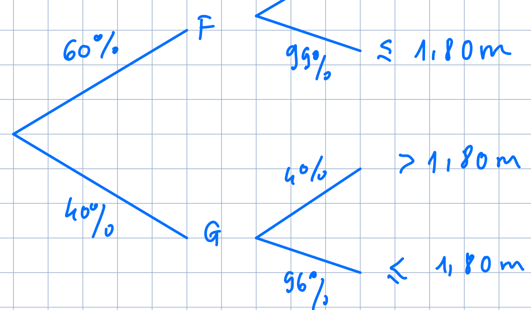
Arbre :



$$\Rightarrow P(B_1 \mid R) = \frac{P(B_1 \text{ et } R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{10}+\frac{1}{10}} = \frac{3}{4} = \underline{75\%}$$

4.3.12 Dans un gymnase, 4% des garçons et 1% des filles mesurent plus de 1,8 m. Or, 60% des élèves sont des filles. On choisit un élève au hasard et on constate qu'il mesure plus de 1,8 m. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

Arbre :



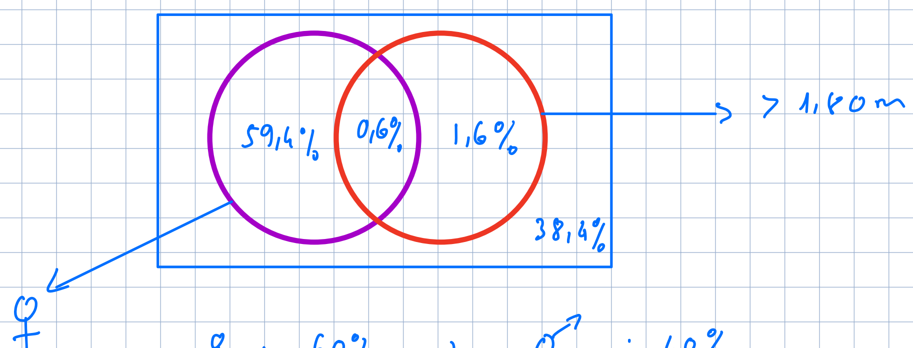
$\Rightarrow P(F > 1{,}80m) = 0{,}6 \cdot 0{,}01 = 0{,}6\%$

$\Rightarrow P(G > 1{,}80m) = 0{,}4 \cdot 0{,}04 = 1{,}6\%$

$$P(F \mid > 1{,}80m) = \frac{P(F \text{ et } > 1{,}80m)}{P(> 1{,}80m)} = \frac{P(F > 1{,}80m)}{P(F > 1{,}80m) + P(G > 1{,}80m)}$$

$$= \frac{0{,}6}{0{,}6 + 1{,}6} = \frac{0{,}6}{2{,}2} = \frac{6}{22} = \frac{3}{11} = 27{,}27\%$$

ou Diagramme de Venn :



♀ : 60% $\Rightarrow$ ♂ : 40%

1% de 60% $\longrightarrow$ 0,6 %

4% de 40% $\longrightarrow$ 1,6 %

$$\Rightarrow P(♀ \mid > 1{,}80m) = \frac{P(♀ \text{ et } > 1{,}80m)}{P(> 1{,}80m)} = \frac{0{,}6}{0{,}6 + 1{,}6} = \frac{3}{11} \cong 27{,}27\%$$

4.3.13 Un hôpital comporte deux salles d'opération qui ont la même probabilité d'être occupées. La probabilité que l'une des salles au moins soit occupée est de 90% et celle que toutes les deux soient occupées 50%. Quelle est la probabilité :

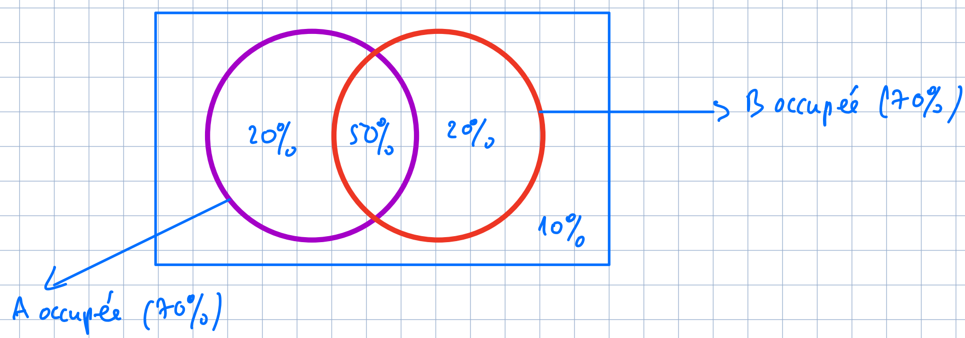
a) que la première salle soit libre ?

b) que les deux salles soient libres ?

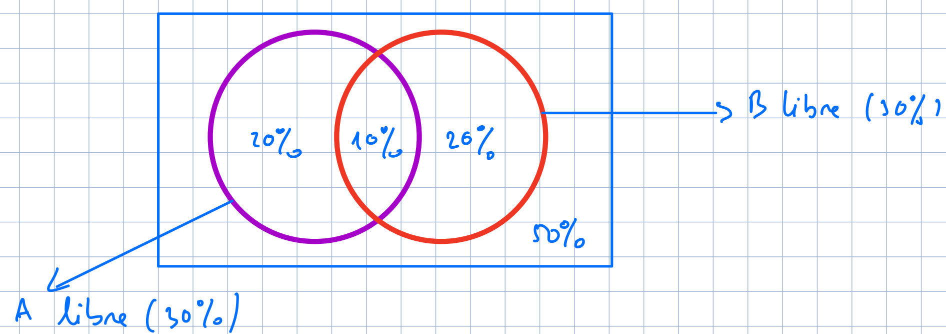
c) que l'une des deux salles au moins soit libre ?

d) qu'une seule salle soit libre ?

e) que la seconde salle soit libre, si l'on sait que la première est occupée ?



ou



a) $P(\text{A libre}) = 20 + 10 = \underline{30\%}$

b) $P(\text{A et B libres}) = \underline{10\%}$

c) $P(\text{Au moins une salle est libre}) = 20 + 10 + 20 = \underline{50\%}$

d) $P(\text{Une seule salle est libre}) = 20\% + 20\% = \underline{40\%}$

e) $P(\text{B libre} \mid \text{A occupée}) = \dfrac{P(\text{B libre et A occupée})}{P(\text{A occupée})} = \dfrac{20}{70}$

$\simeq \underline{28{,}57\%}$

4.3.14 Trois boîtes A,B et C contiennent :

A : 3 bonbons rouges et 5 noirs,

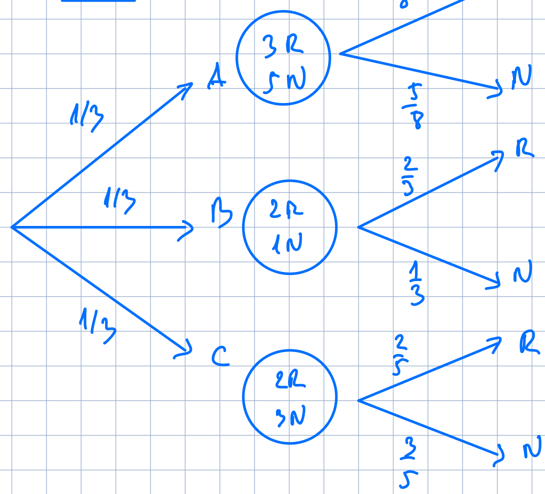
B : 2 bonbons rouges et 1 noir,

C : 2 bonbons rouges et 3 noirs.

a) On prend une boîte au hasard et on tire un bonbon. Quelle est la probabilité qu'il soit rouge ?

b) Si le bonbon est rouge, quelle est la probabilité qu'il provienne de A ?

Arbre :



$\Rightarrow P(A \cap R) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow P(A \cap N) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{24}$

$\Rightarrow P(B \cap R) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

$\Rightarrow P(B \cap N) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

$\Rightarrow P(C \cap R) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$

$\Rightarrow P(C \cap N) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

a) $P(R) = \frac{1}{8} + \frac{2}{9} + \frac{2}{15} = \frac{45+80+48}{360} \simeq \underline{48{,}06\,\%}$

b) $P(A|R) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{173}{360}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{360}{173} \simeq \underline{26{,}01\,\%}$

4.3.15 Deux urnes U_1 et U_2 contiennent respectivement :

U_1 : 3 boules rouges et 2 boules vertes,

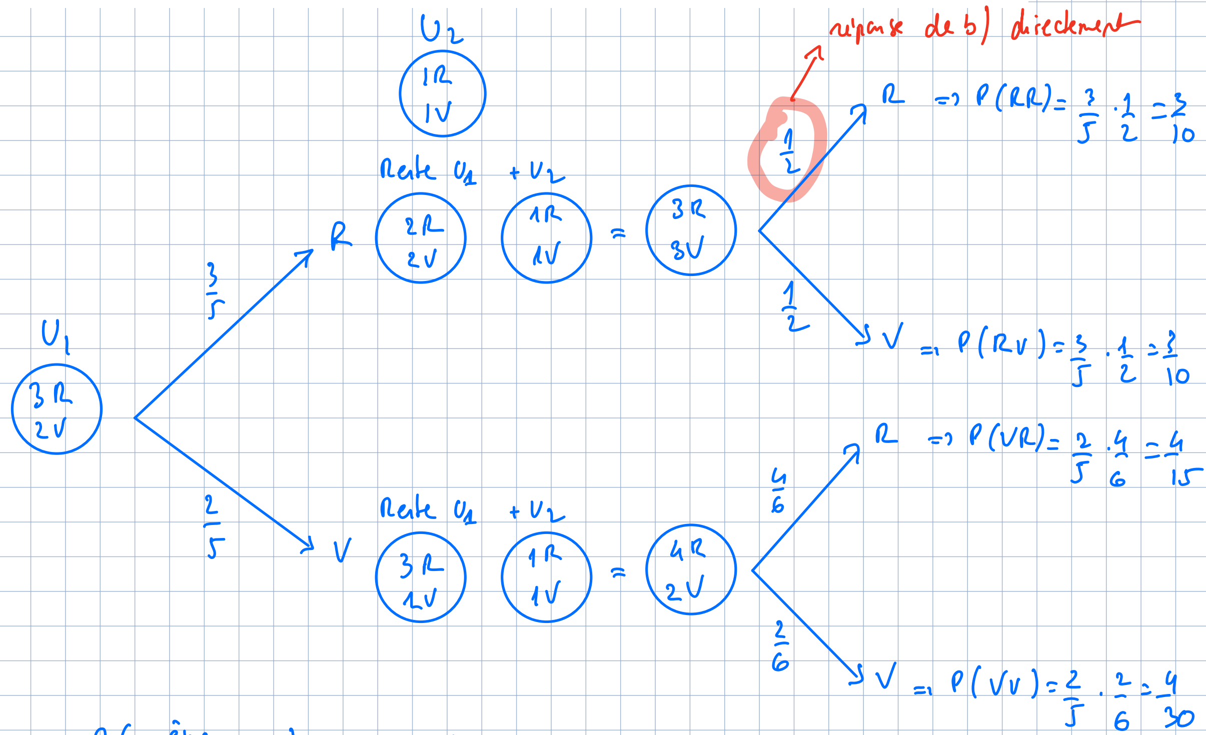
U_2 : 1 boule rouge et 1 boule verte.

On tire une boule de U_1 puis on met les boules restantes dans U_2. On tire alors une boule de U_2. Calculer la probabilité :

a) que cette boule soit rouge,

b) que cette boule soit rouge, si l'on sait que la première boule tirée était rouge,

c) que la première boule tirée ait été rouge, si au second tirage on a une boule rouge.



a) $P(2^{\text{ème}} = R) = P(RR) + P(VR) = \frac{3}{10} + \frac{4}{15} = \frac{17}{30} \simeq 56{,}67\%$

b) $P(2^{\text{ème}} = R \mid 1^{\text{ère}} = R) = \frac{P(RR)}{P(1^{\text{ère}} = R)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2} = 50\%$

c) $P(1^{\text{ère}} = R \mid 2^{\text{ème}} = R) = \frac{P(RR)}{P(2^{\text{ème}} = R)} = \frac{P(RR)}{P(RR) + P(VR)}$

$= \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{10} + \frac{4}{15}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{17}{30}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{30}{17} = \frac{9}{17} \simeq 52{,}94\%$

4.3.16 On fait expérimentalement les constatations suivantes :

- le temps qu'il fait dépend du temps qu'il a fait la veille,
- s'il fait beau un jour, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est 0.8,
- s'il fait mauvais un jour, la probabilité qu'il fasse mauvais le lendemain est 0.6.

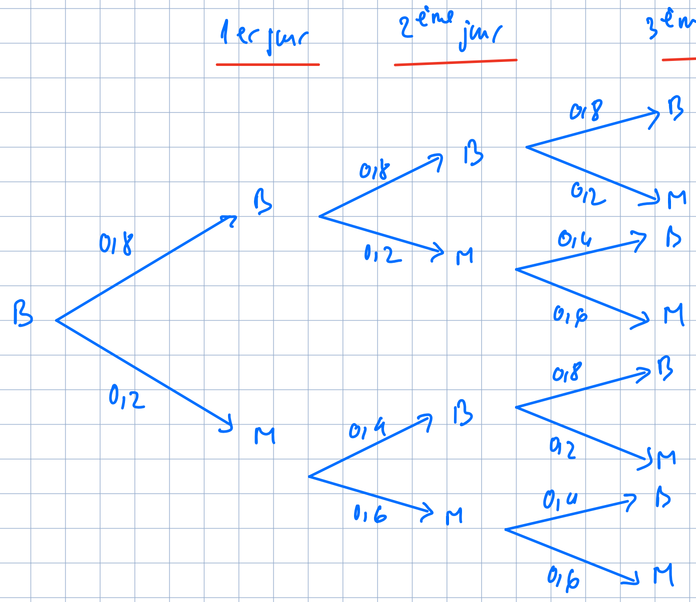
Lors d'une belle journée ensoleillée de printemps, on vous demande de calculer la probabilité :

a) qu'il fasse beau les trois jours suivants,

b) qu'il fasse beau dans trois jours.

B : événement : il fait beau

M : " " mauvais



$\Rightarrow P(BBB) = (0,8)^3 = 51,2\,\%$

$\Rightarrow P(BMB) = 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,4 = 6,4\,\%$

$\Rightarrow P(MBB) = 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,8 = 6,4\,\%$

$\Rightarrow P(MMB) = 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 4,8\,\%$

a) $P(BBB) = (0,8)^3 = \underline{51,2\,\%}$

b) $P(--B) = 51,2\,\% + 6,4\,\% + 6,4\,\% + 4,8\,\% = \underline{68,8\,\%}$

4.3.17 On dispose de deux urnes. La première, A, contient 2 billets verts, 3 rouges et 5 jaunes. La seconde, B, contient 5 billets verts et 3 rouges. On procède à l'expérience suivante : un dé ayant été jeté, on tire un billet de l'urne A si le nombre de points du dé est inférieur à 3, un billet de l'urne B sinon. Calculer la probabilité :

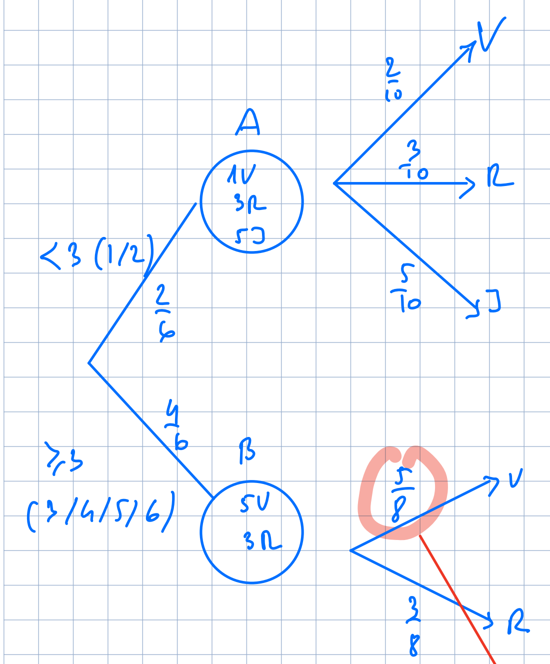
a) de tirer un billet vert,

b) de tirer un billet vert, sachant que le nombre de points obtenu est supérieur à deux,

c) d'avoir obtenu un nombre de points inférieur à 3, sachant que le billet tiré est rouge,

d) d'avoir obtenu un nombre de points supérieur à 2, sachant que le billet tiré est jaune.

Arbre :



$\Rightarrow P(AV) = \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{10} = \frac{4}{60}$

$\Rightarrow P(AR) = \frac{2}{6}\cdot\frac{3}{10} = \frac{6}{60}$

$\Rightarrow P(AJ) = \frac{2}{6}\cdot\frac{5}{10} = \frac{10}{60}$

$\Rightarrow P(BV) = \frac{4}{6}\cdot\frac{5}{8} = \frac{20}{48} = \frac{25}{60}$

$\Rightarrow P(BR) = \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{8} = \frac{12}{48} = \frac{1}{4} = \frac{15}{60}$

a) $P(V) = P(AV) + P(BV) = \frac{4}{60} + \frac{25}{60} = \frac{29}{60} \approx \underline{48{,}33\,\%}$

b) $P(V \mid >2) = P(V \mid B) = \frac{5}{8} = \underline{62{,}5\,\%}$

c) $P(<3 \mid R) = P(A \mid R) = \frac{P(AR)}{P(R)} = \frac{P(AR)}{P(AR)+P(BR)} = \frac{\frac{6}{60}}{\frac{6}{60}+\frac{15}{60}}$

$= \frac{6}{21} = \frac{2}{7} \approx \underline{28{,}57\,\%}$

d) $P(>2 \mid J) = P(B \mid J) = \underline{0\,\%}$

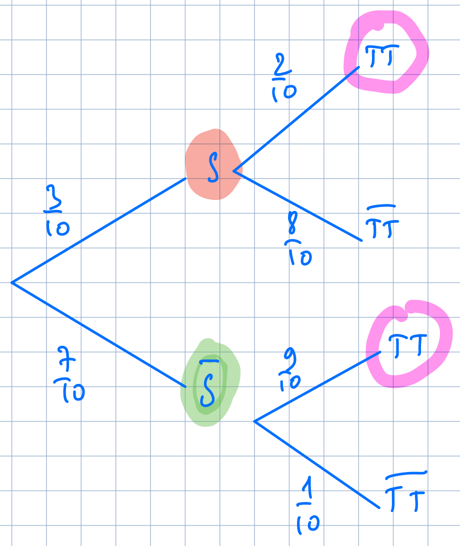
4.3.18 Pour rien au monde Monsieur C ne raterait une course. Et pourtant sa calvitie précoce l'expose cruellement aux rayons du soleil (lorsqu'il y en a). C'est sans doute la raison pour laquelle il est arrivé 9 fois sur 10 parmi les 10 premiers dans les courses non ensoleillées et seulement 2 fois sur 10 parmi les 10 premiers dans les courses où le soleil se manifeste. Or, trois courses sur dix en moyenne sont ensoleillées. Quelle probabilité y a-t-il que le temps ait été maussade lors de la dernière course Morat-Fribourg si l'on sait que Monsieur C figure au palmarès en septième place ?

S : événement soleil

$\bar{S}$: " pluie

TT : événement Top Ten = arrivé dans les 10 premiers

$\overline{TT}$: " pas dans les 10 premiers



$\Rightarrow P(S \cap TT) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} = 6\%$

$\Rightarrow P(S \cap \overline{TT}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{8}{10} = \frac{24}{100} = 24\%$

$\Rightarrow P(\bar{S} \cap TT) = \frac{7}{10} \cdot \frac{9}{10} = \frac{63}{100} = 63\%$

$\Rightarrow P(\bar{S} \cap \overline{TT}) = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{7}{100} = 7\%$

$$P(\bar{S} \mid TT) = \frac{P(\bar{S} \cap TT)}{P(TT)} = \frac{P(\bar{S} \cap TT)}{P(S \cap TT) + P(\bar{S} \cap TT)} = \frac{63}{6+63}$$

$$= \frac{63}{69} \cong 91,30\%$$

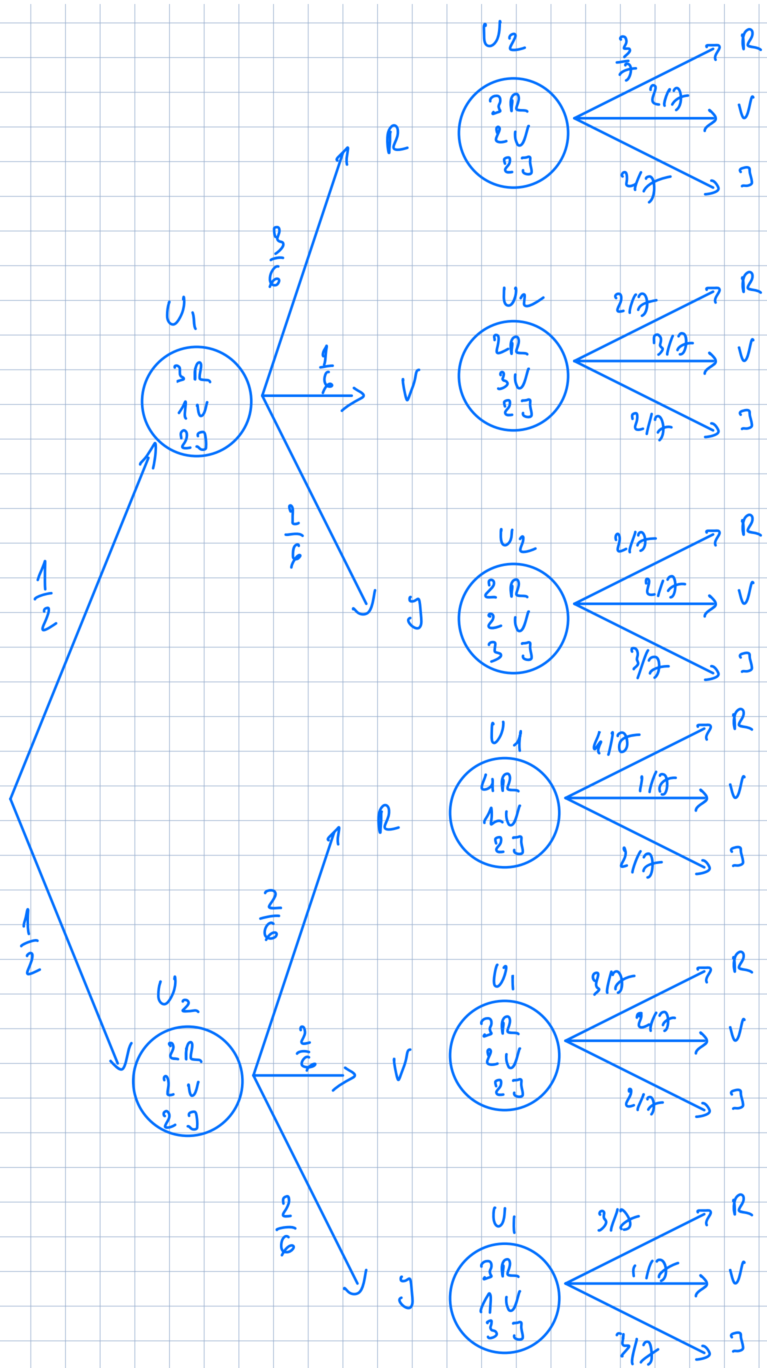
4.3.19 Étant donné deux urnes contenant respectivement 3 boules rouges, 1 verte, 2 jaunes et 2 boules rouges, 2 vertes, 2 jaunes. Considérons l'expérience consistant à choisir au hasard une urne, d'où l'on en extrait une boule, qu'on met ensuite dans l'autre urne. On tire alors une boule de cette dernière urne. Calculer la probabilité :

a) que cette boule soit rouge,

b) que cette boule soit rouge, si la première boule tirée était rouge,

c) que cette boule soit rouge, si l'urne tirée était U_1,

d) que l'on ait tiré l'urne U_1, si la dernière boule tirée était rouge.



$\Rightarrow P(U_1 R R) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{84}$

$\Rightarrow P(U_1 V R) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{84}$

$\Rightarrow P(U_2 J R) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{84}$

$\Rightarrow P(U_2 R R) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{84}$

$\Rightarrow P(U_2 V R) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{84}$

$\Rightarrow P(U_2 J R) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{84}$

a) $P(2^{\text{ème}} = R) = \frac{9}{84} + \frac{2}{84} + \frac{4}{84} + \frac{8}{84} + \frac{6}{84} + \frac{6}{84} = \frac{35}{84} \simeq 41{,}67\%$

b) $P(2^{\text{ème}} = R \mid 1^{\text{ère}} = R) = \frac{P(RR)}{P(1^{\text{ère}} R)} = \frac{\frac{9}{84} + \frac{8}{84}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}} = \frac{\frac{17}{84}}{\frac{5}{12}} = \frac{17}{84}\cdot\frac{12}{5}$

$= \frac{17}{35} \simeq 48{,}57\%$

c) $P(2^{\text{ème}} = R \mid U_1) = \frac{P(U_1 \cap 2^{\text{ème}} R)}{P(U_1)} = \frac{\frac{9}{84} + \frac{2}{84} + \frac{4}{84}}{\frac{1}{2}}$

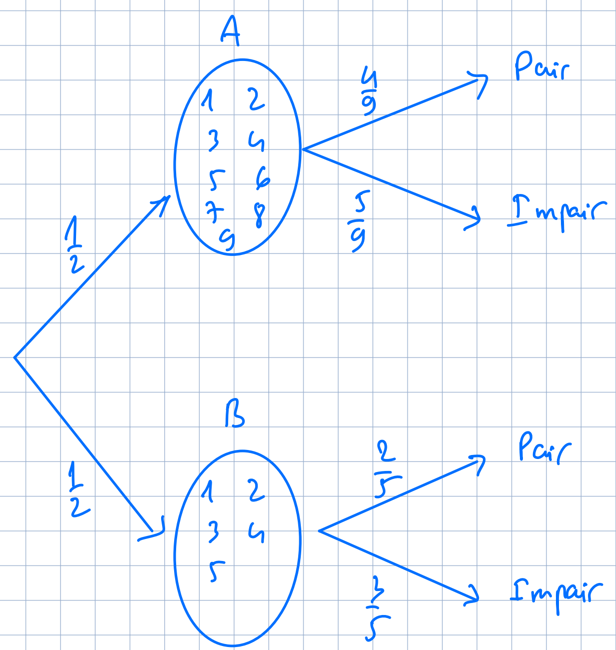
$= \frac{15}{42} \simeq 35{,}71\%$

ou : $\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{7} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{7} + \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{7} = \frac{9}{42} + \frac{2}{42} + \frac{4}{42} = \frac{15}{42} \simeq 35{,}71\%$

d) $P(U_1 \mid 2^{\text{ème}} R) = \frac{P(U_1 \cap 2^{\text{ème}} R)}{P(2^{\text{ème}} R)} = \frac{\frac{15}{84}}{\frac{5}{12}} = \frac{15}{84}\cdot\frac{12}{5}$

$= \frac{3}{7} \simeq 42{,}86\%$

4.3.20 Une boîte A contient 9 cartes numérotées de 1 à 9 et une boîte B contient 5 cartes numérotées de 1 à 5 . On choisit l'une des boîtes au hasard et on en extrait une carte. Si le numéro est pair, quelle est la probabilité que la carte provienne de A ?



$\Rightarrow P(A\ \text{Pair}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$

$\Rightarrow P(B\ \text{Pair}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$

$$P(A \mid \text{Pair}) = \frac{P(A\ \text{Pair})}{P(\text{Pair})} = \frac{P(A\ \text{Pair})}{P(A\ \text{Pair}) + P(B\ \text{Pair})}$$

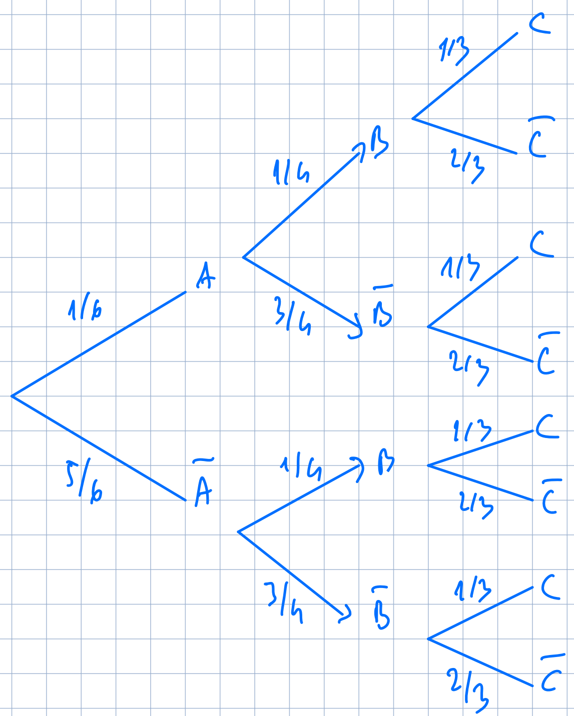
$$= \frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{9} + \frac{1}{5}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{10+9}{45}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{19}{45}} = \frac{2}{9} \cdot \frac{45}{19}$$

$$= \frac{10}{19} \approx 52{,}63\,\%$$

4.3.21 La probabilité que trois tireurs atteignent une cible est 1/6 pour le premier, 1/4 pour le deuxième et 1/3 pour le troisième. Quelle est la probabilité, lors d'un tir d'ensemble, qu'au moins deux des tireurs atteignent la cible ?

A : Atteint $\quad B$: Atteint $\quad C$: Atteint

$\bar{A}$: pas Atteint $\quad \bar{B}$: pas Atteint $\quad \bar{C}$: pas Atteint



$\Rightarrow P(ABC) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{72}$

$\Rightarrow P(AB\bar{C}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{72}$

$\Rightarrow P(A\bar{B}C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{72}$

$\Rightarrow P(A\bar{B}\bar{C})$

$\Rightarrow P(\bar{A}BC) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{72}$

$P(\text{" Au moins 2 tireurs atteignent la cible "}) = P(\text{" 3 tireurs ok "}) + P(\text{" 2 tireurs ok "}) = \frac{1}{72} + \frac{2}{72} + \frac{3}{72} + \frac{5}{72} = \frac{11}{72}$

$\cong$ 15,28%