Corrigé

3.3.2 Déterminer l'équation des cercles définis par les conditions suivantes :

a) Le centre est l'origine et le rayon est égal à 3.

b) Le centre est $C(2;-3)$ et le rayon est égal à 7.

c) Le cercle passe par l'origine et son centre est $C(6;-8)$.

d) Le cercle passe par $A(2;6)$ et son centre est $C(-1;2)$.

e) Les points $A(3;2)$ et $B(-1;6)$ sont les extrémités d'un diamètre.

f) Le centre est l'origine et le cercle est tangent à $d: 3\,x-4\,y+20=0$.

g) Le centre est $C(1;-1)$ et le cercle est tangent à $d: 5\,x+9=12\,y$.

h) Le cercle passe par $A(3;1)$ et par $B(-1;3)$ et son centre est sur $d: 3\,x=y+2$.

i) Le cercle passe par $A(1;1)$, par $B(1;-1)$ et par $C(2;0)$.

Rappel :

Équation d'un cercle : $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=r^2$ où centre $C(c_1;c_2)$, rayon r

a) $C(0;0)$, $r=3$

$\Rightarrow \underline{x^2+y^2=9}$

b) $\underline{(x-2)^2+(y+3)^2=49}$

c) $C(6;-8)$ $\Rightarrow$ cercle : $(x-6)^2+(y+8)^2=r^2$

cercle passe par O $\Rightarrow$ $(0-6)^2+(0+8)^2=r^2 \Rightarrow 36+64=r^2$

$\Rightarrow r=10$

$\Rightarrow \underline{(x-6)^2+(y+8)^2=100}$

ou : $\|\overrightarrow{OC}\|=\sqrt{6^2+(-8)^2}=10=r$

d) $C(-1;2)$ $\Rightarrow$ (γ) : $(x+1)^2+(y-2)^2=r^2$

(γ) passe par $A(2;6)$ $\Rightarrow$ $(2+1)^2+(6-2)^2=r^2 \Rightarrow r^2=25$

$\Rightarrow \underline{(\gamma) : (x+1)^2+(y-2)^2=25}$

e) $A(3;2)$, $B(-1;6)$ $\Rightarrow$ C milieu de AB = centre du cercle

$$\Rightarrow C\left(\frac{3-1}{2} ; \frac{2+6}{2}\right) \Rightarrow C(1;4)$$

$$\Rightarrow (\gamma) : (x-1)^2 + (y-4)^2 = r^2$$

$A \in (\gamma) \Rightarrow (3-1)^2 + (2-4)^2 = r^2 \Rightarrow 4 + 4 = r^2$

$$\Rightarrow (\gamma) : (x-1)^2 + (y-4)^2 = 8$$

f) centre = origine $\Rightarrow$ $O(0;0)$ $\quad (d) : 3x - 4y + 20 = 0$

$$\Rightarrow \delta(O; d) = \frac{|0-0+20|}{\sqrt{9+16}} = \frac{20}{5} = 4 = r$$

$$\Rightarrow (\gamma) : x^2 + y^2 = 16$$

g) $C(1;-1)$ $\Rightarrow$ $\delta(C;d) = r = \dfrac{|5+12+9|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}} = \dfrac{26}{13} = 2$

$$\Rightarrow (\gamma) : (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$$

h) $C(x_c ; y_c)$ est sur la droite $(d) : 3x = y+2 \Rightarrow y = 3x-2$

$$\Rightarrow y_c = 3x_c - 2$$

$$\Rightarrow (\gamma) : (x-x_c)^2 + (y - 3x_c + 2)^2 = r^2$$

$A \in (\gamma) \Rightarrow (3-x_c)^2 + (3-3x_c)^2 = r^2 \Rightarrow 9 - 6x_c + x_c^2 + 9 - 18x_c + 9x_c = r^2$

$B \in (\gamma) \Rightarrow (-1-x_c)^2 + (5-3x_c)^2 = r^2 \Rightarrow 1 + 2x_c + x_c^2 + 25 - 30x_c + 9x_c^2 = r^2$

Système : $\begin{cases} 9 - 6x_c + x_c^2 + 9 - 18x_c + 9x_c = r^2 \\ 1 + 2x_c + x_c^2 + 25 - 30x_c + 9x_c^2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x_c^2 - 24x_c + 18 = r^2 \quad | \cdot (-1) \\ 10x_c^2 - 28x_c + 26 = r^2 \end{cases}$

$$-4x_c + 8 = 0 \Rightarrow x_c = 2$$

$\Rightarrow r^2 = 40 - 48 + 18 = 10 \Rightarrow y_c = 6 - 2 = 4 \Rightarrow (\gamma) : (x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$

i) M milieu de AB : $M\left(\frac{1+1}{2} ; \frac{1-1}{2}\right) \Rightarrow M(1;0)$

N milieu de AC : $N\left(\frac{1+2}{2} ; \frac{1-0}{2}\right) \Rightarrow N\left(\frac{3}{2} ; \frac{1}{2}\right)$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$(m_{AB}) : y + c_1 = 0$, $M \in m_{AB} \Rightarrow 0 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$\Rightarrow (m_{AB}) : y = 0$

$(m_{AC}) : x - y + c_2 = 0$, $N \in m_{AC} \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -1$

$\Rightarrow (m_{AC}) : x - y - 1 = 0$

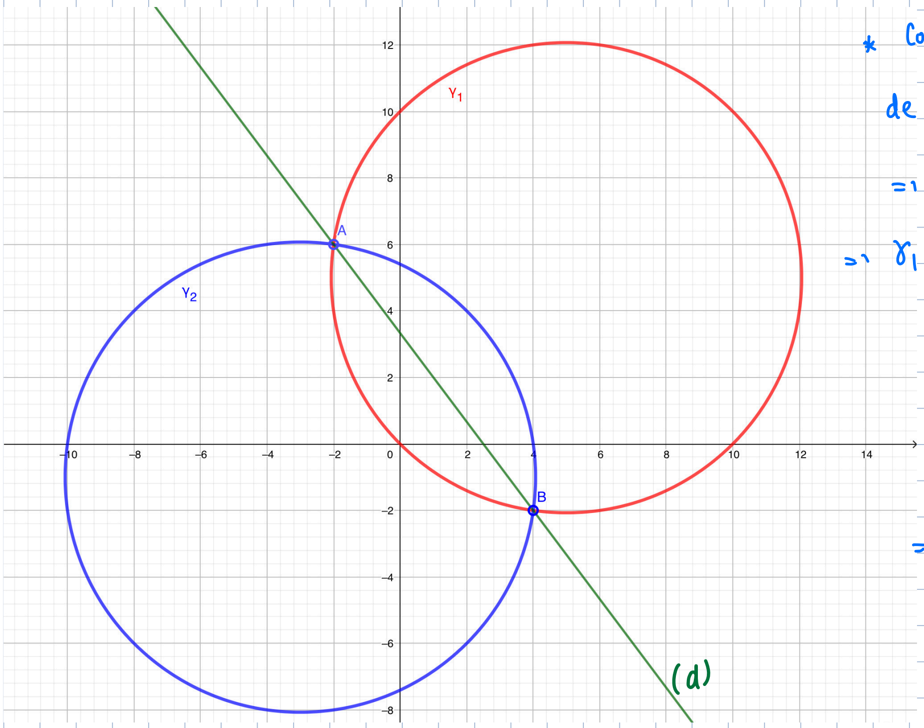
$(m_{AB}) \cap (m_{AC}) : y = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow M(1;0)$ centre du cercle

$\Rightarrow (\gamma) : (x-1)^2 + y^2 = r^2$

$A \in (\gamma) \Rightarrow 0 + 1 = r^2 \Rightarrow r^2 = 1$

donc $\underline{(\gamma) : (x-1)^2 + y^2 = 1}$

3.3.8 Calculer la longueur de la corde commune aux cercles $\gamma_1 : x^2 + y^2 = 10\,x + 10\,y$ et $\gamma_2 : x^2 + y^2 + 6\,x + 2\,y = 40$.



$*$ Corde commune = intersection de 2 cercles γ_1 et γ_2

$\Rightarrow$ c'est la droite (d)

$$\Rightarrow \gamma_1 \cap \gamma_2 : \begin{cases} \underbrace{x^2+y^2}_{\downarrow} = 10x+10y & (1) \\ \boxed{x^2+y^2} +6x+2y=40 & (2) \end{cases}$$

$\Rightarrow 10x + 10y + 6x + 2y = 40$

$\Rightarrow 16x + 12y = 40$

$\Rightarrow (d) : y = -\frac{4}{3}x + \frac{10}{3} \quad (*)$

On remplace $(*)$ dans (2)

$\Rightarrow x^2 + \left(-\frac{4}{3} + \frac{10}{3}\right)^2 + 6x + 2\left(-\frac{4}{3}x + \frac{10}{3}\right) = 40$

$\Rightarrow x^2 + \frac{16}{9}x^2 - \frac{80}{9}x + \frac{100}{9} + \frac{10}{3}x - \frac{100}{3} = 0 \Rightarrow 9x^2 + 16x^2 - 80x + 100 + 30x - 300 = 0$

$\Rightarrow 25x^2 - 50x - 200 = 0 \iff (x-4)(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 4,\ x_2 = -2$

$*$ $x_1 = 4 \Rightarrow y_1 = -2 \Rightarrow B(4;-2)$

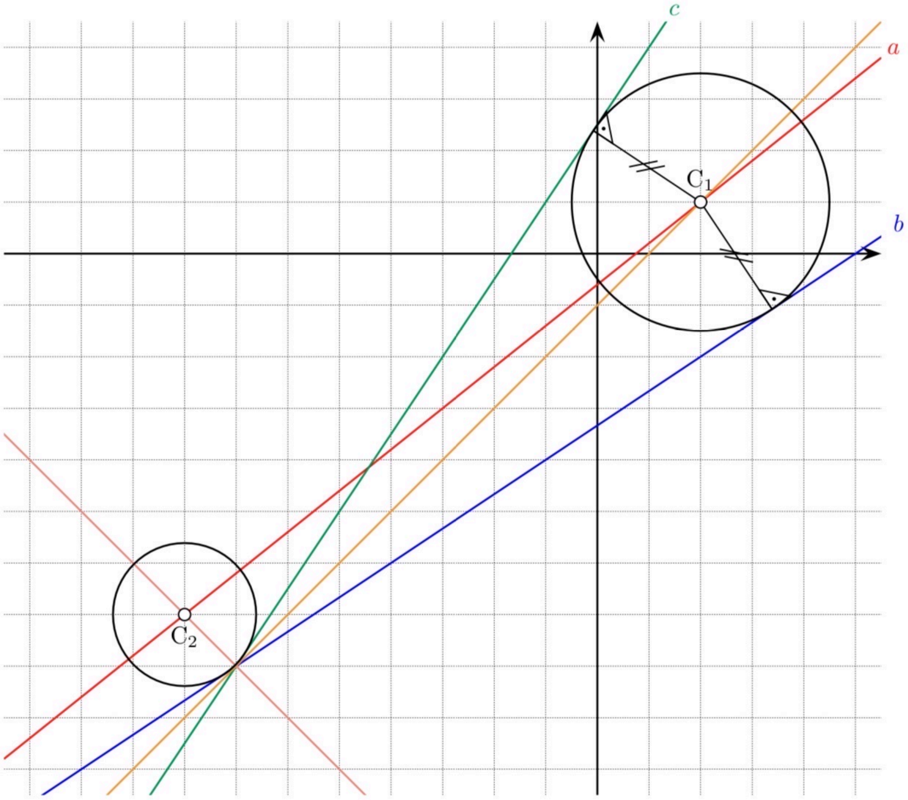
$*$ $x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = 6 \Rightarrow A(-2;6)$

$\Rightarrow \vec{AB} = \begin{pmatrix} 4+2 \\ -2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \|\vec{AB}\| = \sqrt{(6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{36+64} = 10\,u$

La longueur de la corde commune aux cercle γ_1 et γ_2 = $\underline{10\,u}$

3.3.9 Déterminer les équations des cercles qui ont leur centre sur la droite $4\,x - 5\,y = 3$ et qui sont tangents aux deux droites $2\,x = 3\,y + 10$ et $2\,y = 3\,x + 5$.



Pour désigner les droites de l'énoncé, on pose :
$(a) : 4\,x - 5\,y = 3$
$(b) : 2\,x = 3\,y + 10$
$(c) : 2\,y = 3\,x + 5$

Pour qu'un cercle soit tangent aux droites b et c, il faut que son centre soit équidistant des droites b et c. Or le lieu des points équidistants de deux droites données est formé par les bissectrices b_1 et b_2 (intérieure et extérieure) de ces droites. Par conséquent, le centre d'un cercle recherché doit se situer à l'intersection de l'une des bissectrices avec la droite a.

Calcul des bissectrices des droites b et c

$$\frac{2\,x - 3\,y - 10}{\underbrace{\sqrt{2^2 + (-3)^2}}_{\sqrt{13}}} = \pm\frac{-3\,x + 2\,y - 5}{\underbrace{\sqrt{(-3)^2 + 2^2}}_{\sqrt{13}}}$$

1) $2\,x - 3\,y - 10 = -3\,x + 2\,y - 5$ donne $5\,x - 5\,y - 5 = 0$
ou plus simplement $\boxed{(b_1) : x - y - 1 = 0}$.

2) $2\,x - 3\,y - 10 = -(-3\,x + 2\,y - 5)$ délivre $-x - y - 15 = 0$
ou encore $\boxed{(b_2) : x + y + 15 = 0}$.

Calcul du centre $\mathrm{C}_1 = a \cap b_1$

$$\begin{cases} 4\,x - 5\,y - 3 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

La seconde équation délivre $y = x - 1$ que l'on remplace dans la seconde : $4\,x - 5\,(x-1) - 3 = 0$, d'où suit $x = 2\,.$

Par suite, $y = 2 - 1 = 1$, si bien que l'on obtient $\boxed{\mathrm{C}_1(2\,;1)}$.

Calcul du rayon $r_1 = \delta(\mathrm{C}_1\,;b)$

$$r_1 = \frac{\left|\,2\cdot 2 - 3\cdot 1 - 10\,\right|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \frac{|-9|}{\sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{13}} \quad \left(= \frac{9\sqrt{13}}{13}\right)$$

Équation du premier cercle

$$\boxed{(x-2)^2 + (y-1)^2 = \tfrac{81}{13}}$$

Calcul du centre $\mathrm{C}_2 = a \cap b_2$

$$\begin{cases} 4\,x - 5\,y - 3 = 0 \\ x + y + 15 = 0 \end{cases}$$

La seconde équation implique $y = -x - 15$ que l'on substitue dans la première : $4\,x - 5\,(-x-15) - 3$ fournit $x = -8$.

Il en découle $y = -(-8) - 15 = -7$ et aussi $\boxed{\mathrm{C}_2(-8\,;-7)}$.

Calcul du rayon $r_2 = \delta(\mathrm{C}_2\,;b)$

$$r_2 = \frac{\left|\,2\cdot(-8) - 3\cdot(-7) - 10\,\right|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}} \quad \left(= \frac{5\sqrt{13}}{13}\right)$$

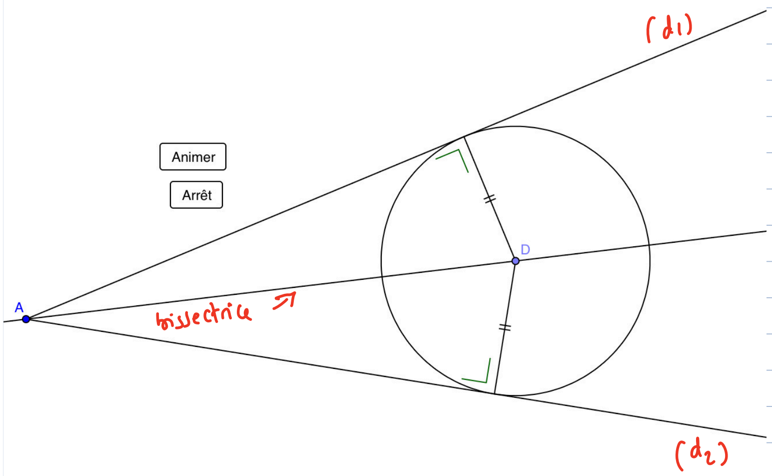
Équation du second cercle

$$\boxed{(x+8)^2 + (y+7)^2 = \tfrac{25}{13}}$$

3.3.10 Déterminer l'équation du cercle qui, ayant son centre sur la droite $2x+y=0$, est tangent aux droites $3y=4x+10$ et $4x=3y+30$.

(d_3)

(d_1) (d_2)



Cercles tangents à deux droites

=> Il y a une infinité de cercle tangent à deux droites sécantes.

=> Tous les centres de ces cercles appartiennent à la bissectrices de l'angle formé par ces deux droites

* Bissectrice entre (d_1) et (d_2)

$$\frac{4x-3y+10}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \pm \frac{4x-3y-30}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} \Leftrightarrow \frac{4x-3y+10}{5} = \pm \frac{4x-3y-30}{5}$$

$$\Rightarrow 4x-3y+10 = \pm(4x-3y-30)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (b_1) : 4x-3y+10 = 4x-3y-30 \\ (b_2) : 4x-3y+10 = -(4x-3y-30) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (b_1) : \text{pas de solution (droites //)} \\ (b_2) : 4x-3y+10 = -4x+3y-30 \Rightarrow 8x-6y-20=0 \end{cases}$$

* Centre du cercle : $(b_2)\cap(d_3)$: $\begin{cases} 2x+y=0 \\ 8x-6y-20=0 \end{cases} \Rightarrow x=1 \ , \ y=-2$

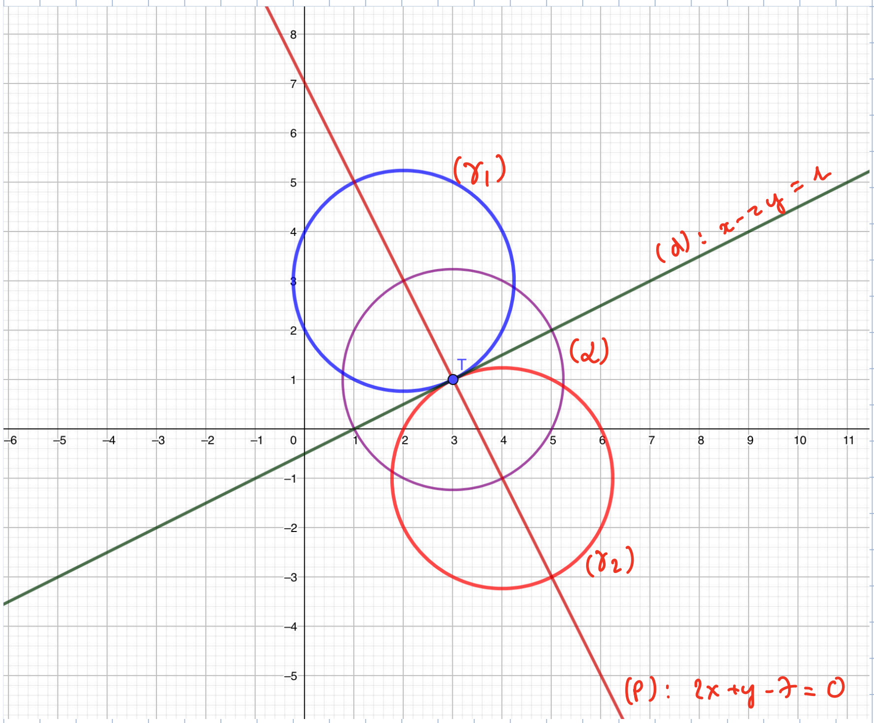
* Rayon du cercle : $d(C;d_1) = \frac{|4\cdot1-3(-2)+10|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{|4+6+10|}{5} = 4u$

=> l'équation du cercle cherché :

$$\boxed{(\gamma) : (x-1)^2+(y+2)^2 = 16}$$

3.3.11 Déterminer les équations des cercles de rayon $\sqrt{5}$ qui sont tangents à la droite $x - 2\,y = \ 1$ au point $T(3; ?)$.

$\Rightarrow$ déterminer les équations des cercles (γ_1) et (γ_2)



- déterminer les coordonnées du point $T(3; ?)$

  $T \in (d): x - 2y = 1 \Rightarrow 3 - 2y = 1 \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1$

  $\Rightarrow T(3; 1)$

- déterminer l'équation du cercle (α) de centre $T(3; 1)$ et de rayon $\sqrt{5}$

  $\Rightarrow (\alpha): (x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$

- déterminer l'équation de la droite $(p) \perp (d)$: $x - 2y - 1 = 0$

  $\Rightarrow (p): -2x - y + c = 0$

  $T \in (p) \Rightarrow -2 \cdot 3 - 1 + c = 0 \Rightarrow c = 7$

$\Rightarrow (p) : -2x - y + 7 = 0 \iff 2x + y - 7 = 0$

* déterminer les centres de (γ_1) et (γ_2) : l'intersection de (p) et $(\mathcal{C})$

$$(p) \cap (\mathcal{C}) : \begin{cases} 2x + y - 7 = 0 \\ (x-3)^2 + (y-1)^2 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x + 7 \\ (x-3)^2 + (y-1)^2 = 5 \end{cases}$$

$\Rightarrow (x-3)^2 + (-2x+6)^2 = 5 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + 4x^2 - 24x + 36 = 5$

$\Rightarrow 5x^2 - 30x + 40 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \iff (x-4)(x-2) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 4 , x_2 = 2$

i) $x_1 = 4 \Rightarrow y_1 = -1$

d'où $\boxed{(\gamma_1) : (x-4)^2 + (y+1)^2 = 5}$

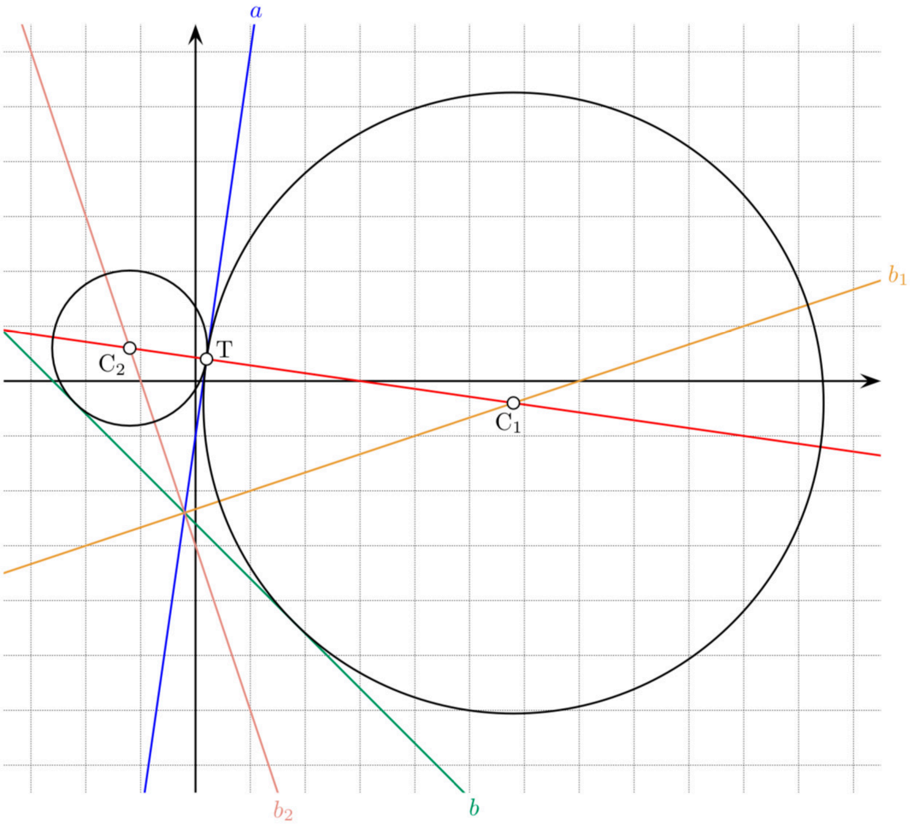
ii) $x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 3$

d'où $\boxed{(\gamma_2) : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 5}$

3.3.12 Déterminer les équations des cercles tangents aux droites

$$y = 7\,x - 5 \quad \text{et} \quad x + y + 13 = 0$$

l'un des points de contact étant $T(1;2)$.



On appelle $(a) : y = 7\,x - 5$ et $(b) : x + y + 13 = 0$ les droites de l'énoncé.

Lorsqu'un cercle est tangent aux droites a et b, son centre est équidistant des droites a et b, si bien qu'il se situe sur les bissectrices de ces droites.

Calcul des bissectrices des droites a et b

$$\frac{7\,x - y - 5}{\underbrace{\sqrt{7^2 + (-1)^2}}_{\sqrt{50} = 5\,\sqrt{2}}} = \pm \frac{x + y + 13}{\underbrace{\sqrt{1^2 + 1^2}}_{\sqrt{2}}} \quad \text{donne} \quad 7\,x - y - 5 = \pm 5\,(x + y + 13)$$

1) $7\,x - y - 5 = 5\,(x + y + 13)$ implique $2\,x - 6\,y - 70 = 0$
ou encore $\boxed{(b_1) : x - 3\,y - 35 = 0}$.

2) $7\,x - y - 5 = -5\,(x + y + 13)$ mène à $12\,x + 4\,y + 60 = 0$
ou plus simplement $\boxed{(b_2) : 3\,x + y + 15 = 0}$.

Vérifions que le point $\mathrm{T}(1\,;2)$ appartient à la droite a : $2 = 7 \cdot 1 - 5$.

Si la droite p désigne la perpendiculaire à la droite a passant par T, alors le centre d'un cercle répondant aux exigences de l'énoncé se situe sur p, car la droite menant du centre du cercle à un point de tangence est perpendiculaire à la tangente au cercle en ce point.

Calcul de la perpendiculaire p

Comme la droite $(a) : 7\,x - y - 5 = 0$ admet pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$, la perpendiculaire p est de la forme $(p) : x + 7\,y + c = 0$.
On sait par ailleurs qu'elle doit passer par le point $\mathrm{T}(1\,;2)$:
$1 + 7 \cdot 2 + c = 0$ délivre $c = -15$.
Par conséquent, l'équation de la perpendiculaire p est $\boxed{(p) : x + 7\,y - 15 = 0}$.

Calcul du centre $\mathrm{C}_1 = p \cap b_1$ du premier cercle

$$\begin{cases} x + 7\,y - 15 = 0 \\ x - 3\,y - 35 = 0 \end{cases}$$

La première équation donne $x = -7\,y + 15$ que l'on remplace dans la seconde :
$-7\,y + 15 - 3\,y - 35 = 0$ fournit $y = -2$.
Ainsi $x = -7 \cdot (-2) + 15 = 29$ et $\boxed{\mathrm{C}_1(29\,;-2)}$.

Calcul du rayon r_1 du premier cercle

$$r_1 = \delta(\mathrm{C}_1\,;a) = \frac{|\,7 \cdot 29 - (-2) - 5\,|}{\sqrt{7^2 + (-1)^2}} = \frac{|200|}{\sqrt{50}} = \frac{200}{5\sqrt{2}} = \frac{40}{\sqrt{2}} = \frac{40\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2}$$

Équation du premier cercle

$$\boxed{(x - 29)^2 + (y + 2)^2 = (20\sqrt{2})^2 = 800}$$

Calcul du centre $\mathrm{C}_2 = p \cap b_2$ du second cercle

$$\begin{cases} x + 7\,y - 15 = 0 \\ 3\,x + y + 15 = 0 \end{cases}$$

La seconde équation implique $y = -3\,x - 15$ que l'on substitue dans la première :
$x + 7\,(-3\,x - 15) - 15 = 0$ mène à $x = -6$.
On obtient ainsi $y = -3 \cdot (-6) - 15 = 3$ et $\boxed{\mathrm{C}_2(-6\,;3)}$.

Calcul du rayon r_2 du second cercle

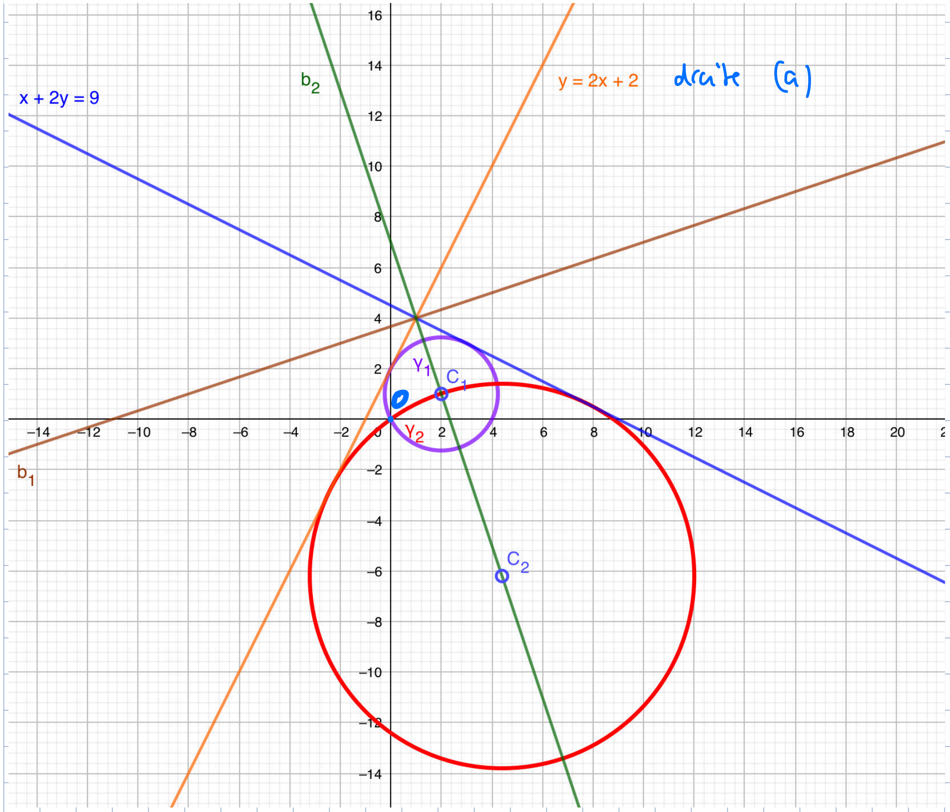
$$r_2 = \delta(\mathrm{C}_2\,;a) = \frac{|\,7 \cdot (-6) - 3 - 5\,|}{\sqrt{7^2 + (-1)^2}} = \frac{|-50|}{\sqrt{50}} = \frac{50}{5\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

Équation du second cercle

$$\boxed{(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = (5\sqrt{2})^2 = 50}$$

3.3.13 Déterminer les équations des cercles passant par l'origine et qui sont tangents aux droites $x + 2\,y = 9$ et $y = 2\,x + 2$.

$O(0;0)$



cercles passant par l'origine => centres des cercles sur la bissectrice de pente négative

* déterminer les équations des bissectrices :

$$\frac{x+2y-9}{\sqrt{1^2+2^2}} = \pm\frac{2x-y+2}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} \Rightarrow \frac{x+2y-9}{\sqrt{5}} = \pm\frac{2x-y+2}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow x+2y-9 = \pm(2x-y+2) \Rightarrow \begin{cases} (b_1) : x-3y+11=0 & \text{pente positive} \\ (b_2) : 3x+y-7=0 & \text{pente négative} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ c'est la (b_2) : $3x+y-7=0 \Rightarrow y = -3x+7$

le centre du cercle : $C(x_c \,;\, -3x_c+7)$

le rayon de ce cercle :

$$r = \delta(C\,;\,a) = \|\vec{OC}\| \Rightarrow \frac{|2x_c + 3x_c - 7 + 2|}{\sqrt{5}} = \sqrt{x_c^2 + (-3x_c+7)^2}$$

$$\Rightarrow (5x_c - 5)^2 = 5\left[x_c^2 + (-3x_c+7)^2\right]$$

$$\Rightarrow 5(x_c - 1)^2 = x_c^2 + (-3x_c+7)^2$$

$$\Rightarrow 5x_c^2 - 10x_c + 5 = x_c^2 + 9x_c^2 - 42x_c + 49$$

$$\Rightarrow 5x_c^2 - 32x_c + 44 = 0 \Rightarrow (5x_c - 22)(x_c - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x_c = 2 \quad \text{ou} \quad x_c = \frac{22}{5}$$

* $x_c = 2 \Rightarrow y_c = 1 \Rightarrow \underline{C_1(2\,;\,1)}$

* $x_c = \frac{22}{5} \Rightarrow y_c = -\frac{31}{5} \Rightarrow \underline{C_2\left(\frac{22}{5}\,;\,-\frac{31}{5}\right)}$

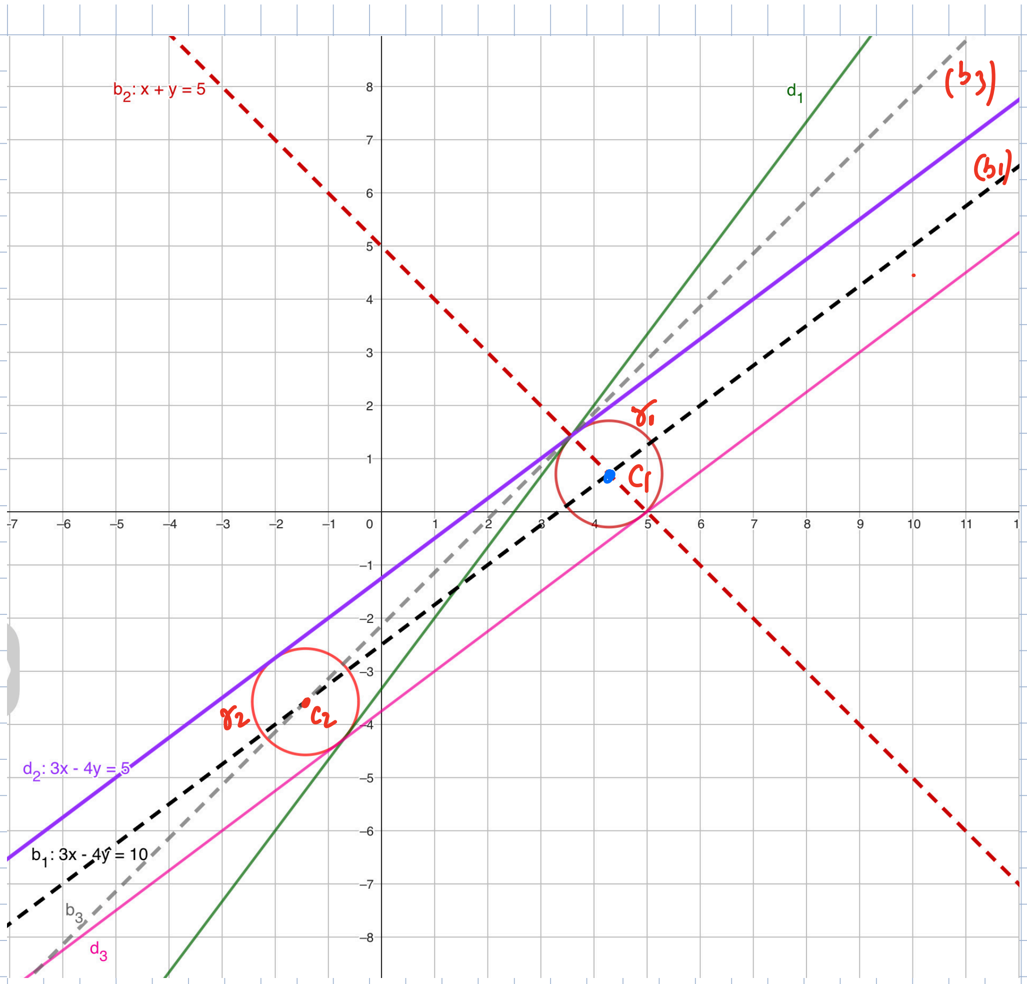
$\Rightarrow \|\vec{OC_1}\| = \underline{\sqrt{5}}$ et $\|\vec{OC_2}\| = \underline{\frac{17\sqrt{5}}{5}}$

$$\Rightarrow \boxed{(\gamma_1) : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5}$$

et

$$\boxed{(\gamma_2) : \left(x - \frac{22}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{31}{5}\right)^2 = \frac{289}{5}}$$

3.3.14 Déterminer les équations des cercles tangents aux trois droites $\overset{d_1}{3y = 4x - 10}$, $\underset{d_2}{3x = 4y + 5}$ et $\underset{d_3}{3x - 4y = 15}$.



* Bissectrices de d_2 et d_3 :

$$\frac{3x-4y-5}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \pm\frac{3x-4y-15}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} \Rightarrow \frac{3x-4y-5}{5} = \pm\frac{3x-4y-15}{5}$$

$$\Rightarrow 3x-4y-5 = \pm(3x-4y-15) \Rightarrow \begin{cases} -5 = -15 \text{ pas possible} \\ \underline{(b_1) : 3x-4y-10 = 0} \end{cases}$$

* Bissectrices de d_2 et d_1 :

$$\frac{3x-4y-5}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \pm \frac{4x-3y-10}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} \Rightarrow \frac{3x-4y-5}{5} = \pm \frac{4x-3y-10}{5}$$

$$\Rightarrow 3x-4y-5 = \pm (4x-3y-10) \Rightarrow \begin{cases} \underline{(b_2) : x+y-5=0} \\ \underline{(b_3) : 7x-7y-15=0} \end{cases}$$

* Centre du cercle (γ_1) : $b_1 \cap b_2$: $\begin{cases} 3x-4y-10=0 \\ x+y-5=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow x = \frac{30}{7} \Rightarrow y = \frac{5}{7} \Rightarrow C_1\left(\frac{30}{7} ; \frac{5}{7}\right)$$

$$\Rightarrow r_1 = \delta(C_1 ; d_1) = \frac{\left|4 \cdot \frac{30}{7} - 3 \cdot \frac{5}{7} - 10\right|}{5} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{(\gamma_1) : \left(x - \frac{30}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{7}\right)^2 = 1}$$

* Centre du cercle (γ_2) : $b_1 \cap b_3$: $\begin{cases} x-4y-10=0 \\ 7x-7y-15=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow x = -\frac{10}{7} \Rightarrow y = -\frac{25}{7} \Rightarrow C_2\left(-\frac{10}{7} ; -\frac{25}{7}\right)$$

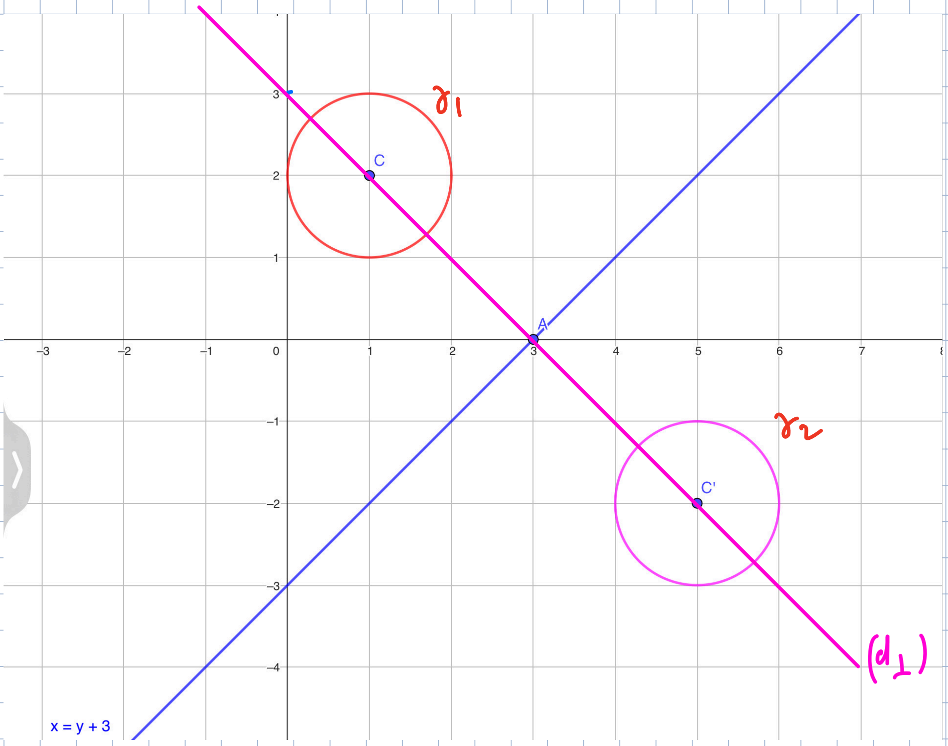
$$\Rightarrow r_2 = \delta(C_2 ; d_1) = \frac{\left|-\frac{40}{7} + \frac{75}{7} - 10\right|}{5} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{(\gamma_2) : \left(x + \frac{10}{7}\right)^2 + \left(y + \frac{25}{7}\right)^2 = 1}$$

3.3.15 Déterminer l'équation du symétrique du cercle $x^2 + y^2 - 2\,x - 4\,y + 4 = 0$ relativement à la droite $x = y + 3$.

γ_1

d



(γ_1) : $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$

$\Leftrightarrow$ $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ $\Rightarrow$ $C(1;2)$, $r = 1$

* On trouve maintenant le symétrique du centre C relativement à la droite

(d) : $x = y+3$ $\Leftrightarrow$ $x - y - 3 = 0$

$\Rightarrow$ Pour cela, il nous faut l'équation de la perpendiculaire à d par C, noté $d_\perp$

$(d_\perp)$: $x + y + k = 0$

Vu que $d_\perp$ passe par C, on a : $1 + 2 + k = 0$, $k = -3$

donc $(d_\perp)$: $x + y - 3 = 0$

$\Rightarrow$ Calculer l'intersection des 2 droites $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(3;0)$

$\Rightarrow$ Le centre C' du cercle symétrique (γ_2) est déterminé de la façon suivante :

$$\vec{OC'} = \vec{OA} + \vec{AC'} = \vec{OA} + \vec{CA} = \vec{OA} - \vec{AC}$$

où $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 - 3 \\ 2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{OC'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2 \\ 0 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow C'(5;-2)$

$\Rightarrow$ L'équation du symétrique du cercle $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ relativement à la droite $x - y - 3 = 0$ est donc :

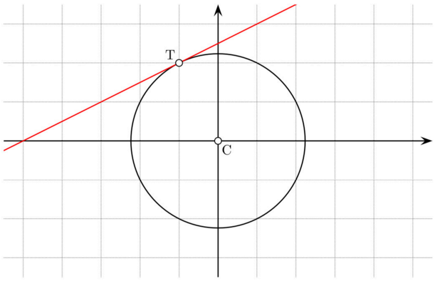
$$\boxed{(\gamma_2) : (x-5)^2 + (y+2)^2 = 1}$$

Le rayon reste le même, vu que la symétrie est une isométrie

3.3.16 Après avoir vérifié que le point T est sur le cercle, déterminer l'équation de la tangente au cercle au point T :

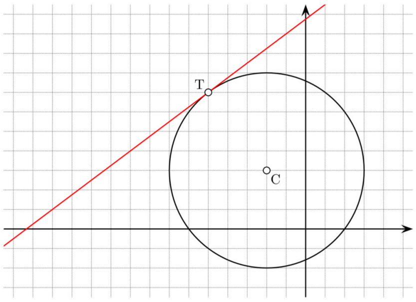
1) $\mathrm{T}(-1\,;2)$ $(\Gamma) : x^2 + y^2 = 5$
2) $\mathrm{T}(-5\,;7)$ $(\Gamma) : (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$
3) $\mathrm{T}(0\,;0)$ $(\Gamma) : x^2 + y^2 = 3\,x - 7\,y$
4) $\mathrm{T}(-1\,;2)$ $(\Gamma) : x^2 + y^2 - 2\,x + 6\,y = 19$
5) $\mathrm{T}(2\,;3)$ $(\Gamma) : 2\,x^2 + 2\,y^2 = x + 4\,y + 12$
6) $\mathrm{T}(2\,;1)$ $(\Gamma) : 3\,x^2 + 3\,y^2 = 2\,x + 11$

1)



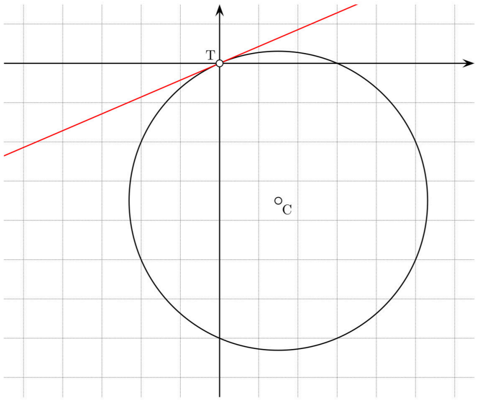
Vérifions que $\mathrm{T} \in \Gamma : (-1)^2 + 2^2 = 5$.
L'équation de la tangente au cercle Γ au point T est donnée par :
$(-1-0)\,(x-0) + (2-0)\,(y-0) = 5$
$-x + 2\,y = 5$
$\boxed{x - 2\,y + 5 = 0}$

2)



Vérifions que $\mathrm{T} \in \Gamma : (-5+2)^2 + (7-3)^2 = 9 + 16 = 25$.
L'équation de la tangente au cercle Γ au point T est donnée par :
$(-5+2)\,(x+2) + (7-3)\,(y-3) = 25$
$-3\,(x+2) + 4\,(y-3) = 25$
$-3\,x - 6 + 4\,y - 12 - 25 = 0$
$-3\,x + 4\,y - 43 = 0$
$\boxed{3\,x - 4\,y + 43 = 0}$

3)

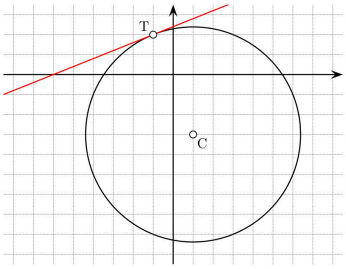


Vérifions que $\mathrm{T} \in \Gamma : 0^2 + 0^2 = 3 \cdot 0 - 7 \cdot 0$.

Déterminons le centre et le rayon du cercle Γ :
$x^2 + y^2 = 3\,x - 7\,y$
$\underbrace{x^2 - 3\,x + \tfrac{9}{4}}_{(x-\frac{3}{2})^2} - \tfrac{9}{4} + \underbrace{y^2 + 7\,y + \tfrac{49}{4}}_{(y+\frac{7}{2})^2} - \tfrac{49}{4}$
$(x - \tfrac{3}{2})^2 + (y + \tfrac{7}{2})^2 = \tfrac{9}{4} + \tfrac{49}{4} = \tfrac{29}{2}$

L'équation de la tangente au cercle Γ au point T est donnée par :
$(0 - \tfrac{3}{2})\,(x - \tfrac{3}{2}) + (0 + \tfrac{7}{2})\,(y + \tfrac{7}{2}) = \tfrac{29}{2}$
$-\tfrac{3}{2}\,(x - \tfrac{3}{2}) + \tfrac{7}{2}\,(y + \tfrac{7}{2}) = \tfrac{29}{2}$
$-\tfrac{3}{2}\,x + \tfrac{9}{4} + \tfrac{7}{2}\,y + \tfrac{49}{4} - \tfrac{29}{2} = 0$
$-\tfrac{3}{2}\,x + \tfrac{7}{2}\,y = 0$
$\boxed{3\,x - 7\,y = 0}$

4)



Vérifions que T $\in \Gamma$: $(-1)^2+2^2-2\cdot(-1)+6\cdot 2=19$.

Déterminons le centre et le rayon du cercle Γ :

$x^2+y^2-2\,x+6\,y=19$

$\underbrace{x^2-2\,x+1}_{(x-1)^2}-1+\underbrace{y^2+6\,y+9}_{(y+3)^2}-9=19$

$(x-1)^2+(y+3)^2=19+1+9=29$

L'équation de la tangente au cercle Γ au point T est donnée par :

$(-1-1)\,(x-1)+(2+3)\,(y+3)=29$

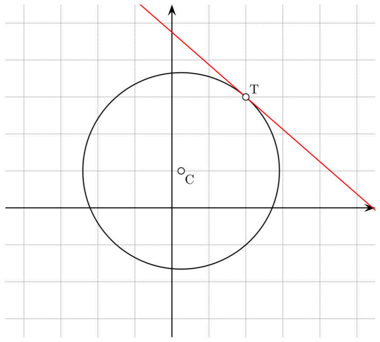
$-2\,(x-1)+5\,(y+3)=29$

$-2\,x+2+5\,y+15=29$

$-2\,x+5\,y-12=0$

$\boxed{2\,x-5\,y+12=0}$

5)



Vérifions que T $\in \Gamma$: $2\cdot 2^2+2\cdot 3^2=2+4\cdot 3+12$.

Déterminons le centre et le rayon du cercle Γ :

$2\,x^2+2\,y^2=x+4\,y+12$

$x^2+y^2=\frac{1}{2}\,x+2\,y+6$

$\underbrace{x^2-\frac{1}{2}\,x+\frac{1}{16}}_{(x-\frac{1}{4})^2}-\frac{1}{16}+\underbrace{y^2-2\,y+1}_{(y-1)^2}-1=6$

$(x-\frac{1}{4})^2+(y-1)^2=6+\frac{1}{16}+1=\frac{113}{16}$

L'équation de la tangente au cercle Γ au point T est donnée par :

$(2-\frac{1}{4})\,(x-\frac{1}{4})+(3-1)\,(y-1)=\frac{113}{16}$

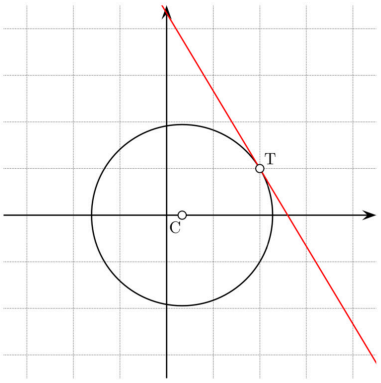
$\frac{7}{4}\,(x-\frac{1}{4})+2\,(y-1)=\frac{113}{16}$

$\frac{7}{4}\,x-\frac{7}{16}+2\,y-2-\frac{113}{16}=0$

$\frac{7}{4}\,x+2\,y-\frac{19}{2}=0$

$\boxed{7\,x+8\,y-38=0}$

6)



Vérifions que T $\in \Gamma$: $3\cdot 2^2+3\cdot 1^2=2\cdot 2+11$.

Déterminons le centre et le rayon du cercle Γ :

$3\,x^2+3\,y^2=2\,x+11$

$x^2+y^2=\frac{2}{3}\,x+\frac{11}{3}$

$\underbrace{x^2-\frac{2}{3}\,x+\frac{1}{9}}_{(x-\frac{1}{3})^2}-\frac{1}{9}+y^2=\frac{11}{3}$

$(x-\frac{1}{3})^2+y^2=\frac{11}{3}+\frac{1}{9}=\frac{34}{9}$

L'équation de la tangente au cercle Γ au point T est donnée par :

$(2-\frac{1}{3})\,(x-\frac{1}{3})+1\cdot y=\frac{34}{9}$

$\frac{5}{3}\,(x-\frac{1}{3})+y=\frac{34}{9}$

$\frac{5}{3}\,x-\frac{5}{9}+y-\frac{34}{9}=0$

$\frac{5}{3}\,x+y-\frac{13}{3}=0$

$\boxed{5\,x+3\,y-13=0}$

3.3.17 Calculer la valeur de l'angle[1] aigu formé par la droite $3x - y = 1$ et le cercle $(x - 2)^2 + y^2 = 5$.

Rappel : L'angle d'une droite et d'un cercle est l'angle formé par la droite et la tangente au cercle en l'un des points d'intersection.

* On calcule les intersections de la droite et du cercle :

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ (x-2)^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow (x-2)^2 + (3x-1)^2 = 5$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 9x^2 - 6x + 1 = 5 \Leftrightarrow 10x^2 - 10x = 0$$

$$\Rightarrow 10x(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = -1$$

$$x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 2$$

$\rightarrow T_1(0;-1)$ et $T_2(1;2)$

$\Rightarrow$ Équation de la tangente au cercle de centre $C(2;0)$ passant par $T_1(0;-1)$: $2x + y + k = 0$ car $\overrightarrow{TC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(t_1) passe par $T_1(0;-1) \Rightarrow 2 \cdot 0 - 1 + k = 0 \Rightarrow k = 1$

$\Rightarrow (t_1) : 2x + y + 1 = 0$

! ou avec la formule tangente au point T

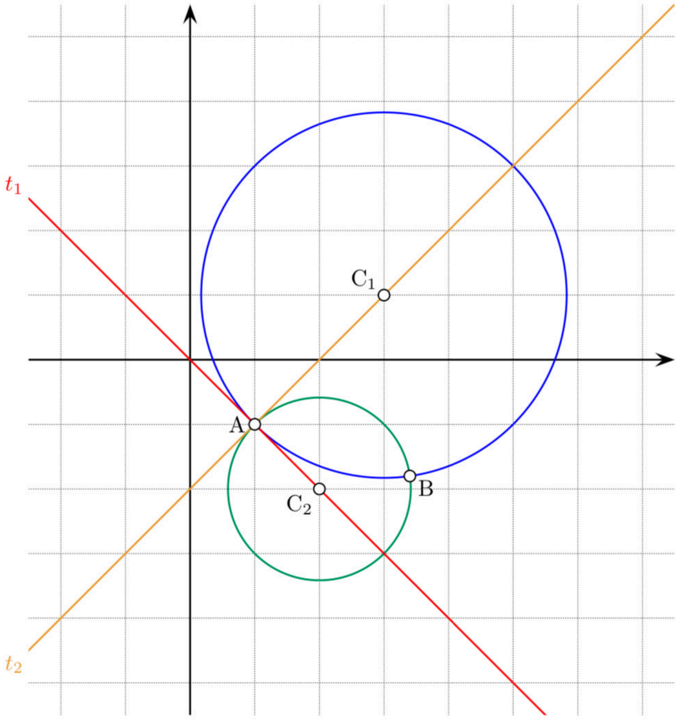
$$(x-2)(x-2) + yy = 5 \Rightarrow -2(x-2) - y = 5$$

$$\Rightarrow (t_1) : 2x + y + 1 = 0$$

Reste à calculer l'angle entre $y = \underset{m_1}{3}x - 1$ et $y = \underset{m_2}{-2}x - 1$

$$\Rightarrow \tan(\varphi) = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}\right| = \left|\frac{-5}{-5}\right| = 1 \Rightarrow \underline{\varphi = 45^\circ}$$

3.3.18 Calculer l'angle[2] sous lequel se coupent les cercles $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 8$ et $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 2$.



On désigne les cercles de l'énoncé comme suit :
$(\Gamma_1) : (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 8$
$(\Gamma_2) : (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 2$

Position relative des cercles Γ_1 et Γ_2

$r_1 - r_2 = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2} \approx 1,41$

$$\delta(\mathrm{C}_1\,;\mathrm{C}_2) = \|\overrightarrow{\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2}\| = \left\|\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10} \approx 3,16$$

$r_1 + r_2 = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \approx 4,24$

Puisque $r_1 - r_2 < \delta(\mathrm{C}_1\,;\mathrm{C}_2) < r_1 + r_2$, les cercles Γ_1 et Γ_2 sont sécants.

Calcul des points d'intersection $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 8 \\ (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 2 \end{cases}$$

En développant ces équations, on obtient :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6\,x - 2\,y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4\,x + 4\,y + 6 = 0 \end{cases}$$

En soustrayant la première équation de la seconde, on trouve :
$2\,x + 6\,y + 4 = 0$ ou plus simplement $x + 3\,y + 2 = 0$.

On en déduit $x = -3\,y - 2$ que l'on remplace dans l'équation de l'un des cercles, par exemple celle du cercle Γ_1 :

$(-3\,y-2)^2 + y^2 - 6\,(-3\,y-2) - 2\,y + 2 = 0$

$9\,y^2 + 12\,y + 4 + y^2 + 18\,y + 12 - 2\,y + 2 = 0$

$10\,y^2 + 28\,y + 18 = 0$

$5\,y^2 + 14\,y + 9 = 0$

Puisque $\Delta = 14^2 - 4 \cdot 5 \cdot 9 = 16 = 4^2 > 0$, il y a deux solutions :

1) $y_1 = \frac{-14+4}{2 \cdot 5} = -1$ implique $x_1 = -3 \cdot (-1) - 2 = 1$, c'est-à-dire $\boxed{\text{A}(1\,;-1)}$.

2) $y_2 = \frac{-14-4}{2 \cdot 5} = -\frac{9}{5}$ fournit $x_2 = -3 \cdot (-\frac{9}{5}) - 2 = \frac{17}{5}$, à savoir $\boxed{\text{B}(\frac{17}{5}\,;-\frac{9}{5})}$.

Calcul de la tangente au cercle Γ_1 au point A

$(1-3)\,(x-3) + (-1-1)\,(y-1) = 8$

$-2\,(x-3) - 2\,(y-1) = 8$

$x - 3 + y - 1 = -4$

$\boxed{(t_1) : x + y = 0}$

Calcul de la tangente au cercle Γ_2 au point A

$(1-2)\,(x-2) + (-1+2)\,(y+2) = 2$

$-(x-2) + (y+2) = 2$

$-x + 2 + y + 2 = 2$

$\boxed{(t_2) : -x + y + 2 = 0}$

Calcul de l'angle formé par les tangentes t_1 et t_2

La tangente $(t_1) : x + y = 0$ admet pour vecteur directeur $\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

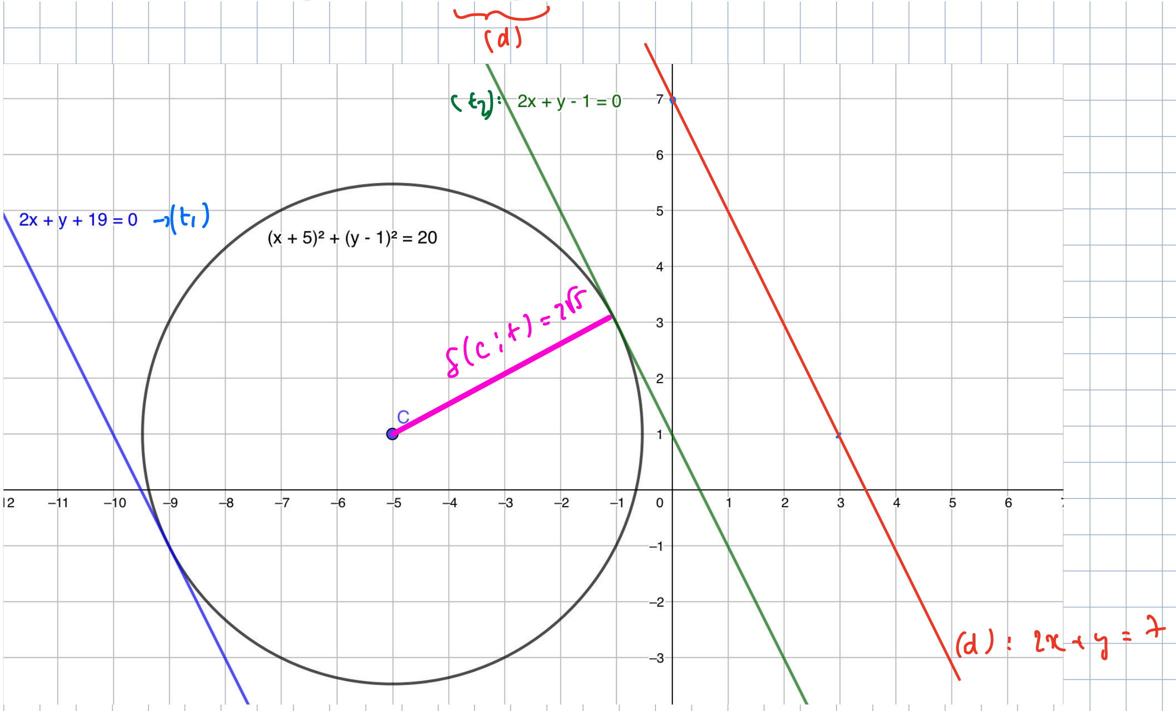
La tangente $(t_2) : -x + y + 2 = 0$ admet pour vecteur directeur $\vec{d_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si φ désigne l'angle formé par les vecteurs $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$, alors on a :

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{d_1} \cdot \vec{d_2}}{\|\vec{d_1}\|\,\|\vec{d_2}\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\| \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|} = \frac{1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}\,\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{0}{2} = 0$$

On conclut que $\varphi = \arccos(0) = 90^\circ$.

3.3.19 Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 + 10\,x = 2\,y - 6$, de direction donnée par la droite $\underbrace{2\,x + y}_{(d)} = 7$.



$*\quad (\gamma) : x^2 + y^2 + 10x = 2y - 6 \iff (x+5)^2 + (y-1)^2 = 20$

$\Rightarrow C(-5;1) \quad , \; r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\ u$

$*\quad (t)$ de direction donnée par $(d) : 2x + y = 7 \Rightarrow$ même vecteur directeur

$\Rightarrow (t) : 2x + y + c = 0$

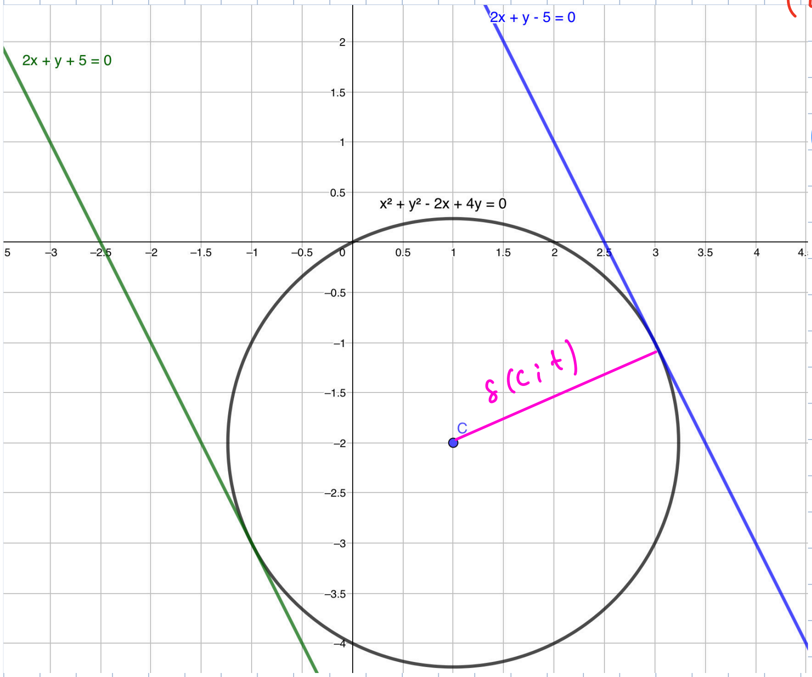
$$*\quad \delta(C;t) = \frac{|2\cdot(-5) + 1 + c|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 2\sqrt{5} \iff \frac{|c-9|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$\Rightarrow |c - 9| = 10 \Rightarrow c - 9 = \pm 10$

i) $c - 9 = 10 \Rightarrow c_1 = 19 \Rightarrow \boxed{(t_1) : 2x + y + 19 = 0}$

ii) $c - 9 = -10 \Rightarrow c_2 = -1 \Rightarrow \boxed{(t_2) : 2x + y - 1 = 0}$

3.3.20 Former les équations des tangentes au cercle $x^2+y^2-2\,x+4\,y=0$, qui sont perpendiculaires à la droite $\underbrace{x=2\,y+3}_{(d)}45$.



$(d) : x = 2y + 345 \Leftrightarrow x - 2y - 345 = 0$

$(t) \perp (d) \Rightarrow (t) : -2x - y + c = 0$

$(\delta) : x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$

$\Rightarrow C(1;-2)\ ,\ r = \sqrt{5}\,u$

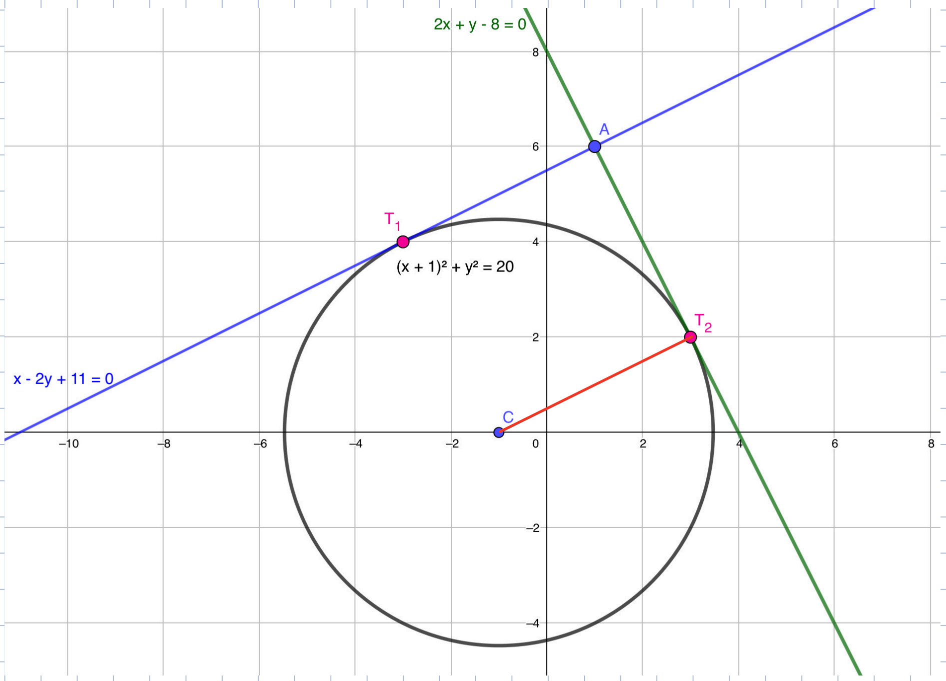
$$\Rightarrow \delta(C;t) = \frac{|-2\cdot 1 - (-2) + c|}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \frac{|-2 + 2 + c|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |c| = 5 \Leftrightarrow c = \pm 5$$

i) $c = 5 \Rightarrow (t_1) : -2x - y + 5 = 0 \Rightarrow \boxed{(t_1) : 2x + y - 5 = 0}$

ii) $c = -5 \Rightarrow (t_2) : -2x - y - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{(t_2) : 2x + y + 5 = 0}$

3.3.21 Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 = 19 - 2x$ issues du point $A(1;6)$, ainsi que les coordonnées du point de contact.



* $(\delta) : x^2 + y^2 = 19 - 2x \iff (x+1)^2 + y^2 = 20$

$\Rightarrow C(-1;0)\ ,\ r = 2\sqrt{5}\ u$

* Équation cartésienne de la tangente : $y = mx + h$

* $A \in (t) \Rightarrow 6 = m + h \Rightarrow h = 6 - m$

$\Rightarrow (t) : y = mx + 6 - m \Rightarrow (t) : \underline{mx - y + 6 - m = 0}$

* $\delta(C;t) = 2\sqrt{5} \iff \dfrac{|m(-1) - 0 + 6 - m|}{\sqrt{m^2+1}} = 2\sqrt{5}$

$\iff \dfrac{|6 - 2m|}{\sqrt{m^2+1}} = 2\sqrt{5} \iff (6-2m)^2 = 20(m^2+1)$

$\iff 2m^2 + 3m - 2 = 0$

$\iff (2m-1)(m+2) = 0 \Rightarrow m_1 = \frac{1}{2}$

$m_2 = -2$

$* \quad m_1 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(t_1) : \quad x - 2y + 11 = 0}$

$* \quad m_2 = -2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{(t_2) : \quad 2x + y - 8 = 0}$

$$* \quad (t_1) \cap \gamma = T_1 \iff \begin{cases} x - 2y + 11 = 0 \\ (x+1)^2 + y^2 = 20 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y - 11 \\ (2y - 11 + 1)^2 + y^2 = 20 \end{cases}$$

$$\iff (2y-10)^2 + y^2 = 20 \iff 4y^2 + 100 - 40y + y^2 = 20$$

$$\iff 5y^2 - 40y + 80 = 0 \iff y^2 - 8y + 16 = 0$$

$$\iff (y-4)^2 = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow \boxed{T_1(-3;4)}$$

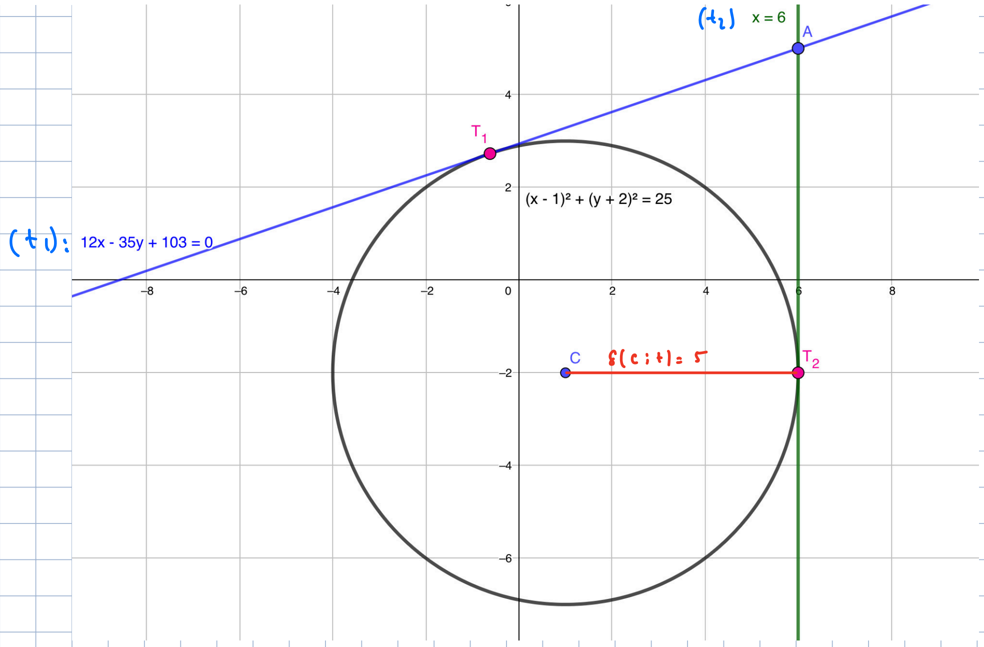
$$* \quad (t_2) \cap \gamma = T_2 \iff \begin{cases} 2x + y - 8 = 0 \\ (x+1)^2 + y^2 = 20 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x + 8 \\ (x+1)^2 + (-2x+8)^2 = 20 \end{cases}$$

$$\iff \underbrace{x^2} + \overbrace{2x} + 1 + \underbrace{4x^2} \overbrace{-32x} + 64 = 20$$

$$\iff 5x^2 - 30x + 45 = 0 \iff x^2 - 6x + 9 = 0 \iff (x-3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \boxed{T_2(3;2)}$$

3.3.22 Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 - 2\,x + 4\,y = 20$ issues du point $A(6;5)$, ainsi que les coordonnées des deux points de contact.



$* \ (\gamma) : x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20 \iff (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$

$\Rightarrow \underline{C(1;-2)}, \ r = 5u$

$*$ Équation de la tangente : $(t) : y = mx + h$

$A \in (t) \Rightarrow 5 = 6m + h \Rightarrow h = 5 - 6m$

$\Rightarrow (t) : y = mx + 5 - 6m \Rightarrow (t) : \underline{mx - y + 5 - 6m = 0}$

$$* \ \delta(C;t) = 5 \iff \frac{|m1 + 2 + 5 - 6m|}{\sqrt{m^2+1}} = 5$$

$$\iff \frac{|-5m + 7|}{\sqrt{m^2+1}} = 5 \iff (7 - 5m)^2 = 25(m^2+1)$$

$$\iff 49 - 70m + 25m^2 = 25m^2 + 25$$

$$\iff 24 = 70m \Rightarrow m = \frac{12}{35}$$

$\Rightarrow \boxed{(t_1) : 12x - 35y + 103 = 0}$

$\boxed{(t_2) : \text{tangente verticale} : x = 6}$

* $(t_1) \cap \gamma = T_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 35y + 103 = 0 \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{35y}{12} - \frac{103}{12} \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{35y}{12} - \frac{103}{12} - 1 \right)^2 + (y+2)^2 = 25$$

...

$$\Rightarrow y = \frac{101}{37} \quad \Rightarrow x = -\frac{23}{37} \quad \Rightarrow \boxed{T_1\left(-\frac{23}{37} ; \frac{101}{37} \right)}$$

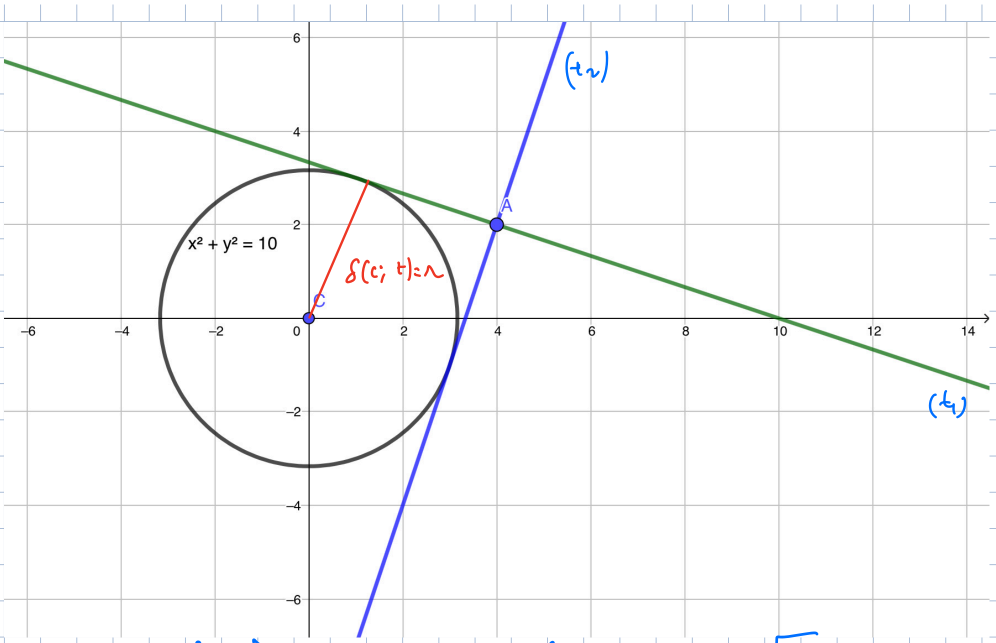
* $(t_2) \cap \gamma = T_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow 25 + y^2 + 4y + 4 = 25$$

$$\Rightarrow y^2 + 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow (y+2)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -2$$

$$\Rightarrow \boxed{T_2(6 ; -2)}$$

3.3.23 On mène par le point $A(4;2)$ les tangentes au cercle $x^2+y^2=10$. Calculer l'angle entre ces tangentes.



$\gamma : \quad x^2+y^2=10 \quad \Rightarrow \quad C(0;0) \quad , r=\sqrt{10}$

* Équation de la tangente issue de A : $(t) : \quad y = mx+h$

$A \in (t) \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 4m+h \quad \Rightarrow \quad h = 2-4m$

Donc $(t) : \quad y = mx+2-4m \quad \Leftrightarrow (t) : \underline{mx-y+2-4m=0}$

* $\delta(C;t) = r \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{|0\cdot m - 0 + 2 - 4m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = \sqrt{10}$

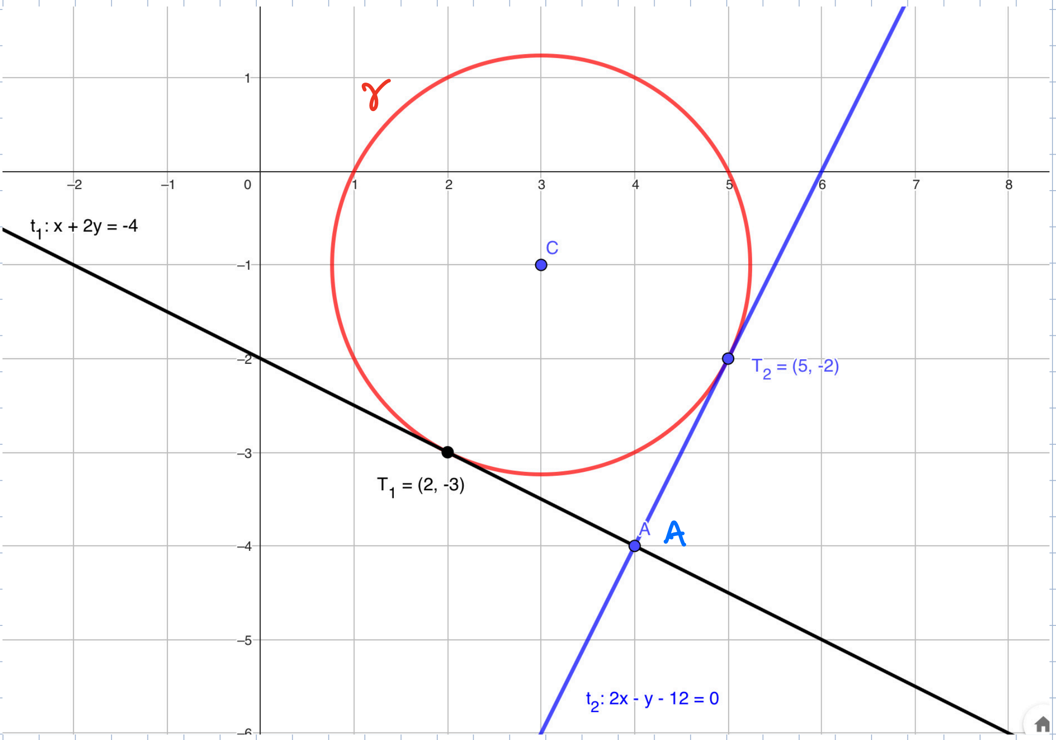
$\Leftrightarrow \quad \dfrac{|2-4m|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{10} \quad \Big| \cdot \left(\sqrt{m^2+1}\right) \quad \Leftrightarrow \quad |2-4m| = \sqrt{10}\sqrt{m^2+1} \quad \Big|^2$

$\Leftrightarrow \quad (2-4m)^2 = 10(m^2+1) \quad \Leftrightarrow \quad 4-16m+16m^2 = 10m^2+10$

$\Leftrightarrow \quad (3m+1)(m-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = -\frac{1}{3}$ et $m_2 = 3$

$\Rightarrow$ On remarque que $m_1 m_2 = -\frac{1}{3} \cdot 3 = -1 \quad \Rightarrow \boxed{\varphi = 90°}$

3.3.24 On mène par le point $A(4;-4)$ les tangentes au cercle $x^2+y^2=6\,x-2\,y-5$. Calculer la longueur de la corde passant par les points de tangence. γ



$$(\gamma) : x^2+y^2-6x+2y=-5$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+1)^2=5 \Rightarrow C(3;-1),\ r=\sqrt{5}$$

* L'équation de la tangente : $y = mx+h$

$$A \in (t) \Rightarrow -4 = 4m+h \to h = -4-4m$$

$$\to (t) : mx-y-4-4m=0$$

* $$\delta(C;t) = \frac{|3m+1-4-4m|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{|-3-m|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow (-3-m)^2 = 5(m^2+1) \Rightarrow 9+6m+m^2 = 5m^2+5$$

$$\Rightarrow (2m+1)(m-2)=0 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{2},\ m_2 = 2$$

$\Rightarrow h_1 = -2$ et $h_2 = -12$

d'où $(t_1) : x + 2y + 4 = 0$

$(t_2) : 2x - y - 12 = 0$

$* \ (t_1) \cap (\gamma) : \begin{cases} x = -2y - 4 \\ (x-3)^2 + (y+1)^2 = 5 \end{cases}$

$\Rightarrow (-2y - 4 - 3)^2 + (y+1)^2 = 5$

$\Rightarrow (-2y - 7)^2 + (y+1)^2 = 5 \Rightarrow 4y^2 + 28y + 49 + y^2 + 2y + 1 - 5 = 0$

$\Rightarrow 5y^2 + 30y + 45 = 0 \Rightarrow y^2 + 6y + 9 = 0$

$\Rightarrow (y+3)^2 = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow x = 2$

$\rightarrow \boxed{T_1(2;-3)}$

$* \ (t_2) \cap (\gamma) : \begin{cases} y = 2x - 12 \\ (x-3)^2 + (y+1)^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow (x-3)^2 + (2x - 12 + 1)^2 = 5$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + (2x - 11)^2 = 5 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + 4x^2 - 44x + 121 - 5 = 0$

$\Rightarrow 5x^2 - 50x + 125 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 0$

$\Rightarrow (x-5)^2 = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow \boxed{T_2(5;-2)}$

$* \ \overrightarrow{T_1T_2} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{T_1T_2}\| = \sqrt{3^2 + 1} = \sqrt{10} \ u$

$\Rightarrow \boxed{\|\overrightarrow{T_1T_2}\| = \sqrt{10} \ u}$