

Exponentielles et logarithmes

CORRIGÉ

1.1.4

~~2.3.1~~ Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^{5x}$

e) $f(x) = \exp\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right)$

b) $f(x) = e^{x^2}$

f) $f(x) = e^{\sin(x)}$

c) $f(x) = e^{1/x}$

g) $f(x) = x^2 e^x$

d) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+x}}$

h) $f(x) = e^{-x} \cos(x)$

a) $f(x) = e^{5x} \rightarrow \text{ED}_f = \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = e^{5x} \cdot 5 = 5e^{5x}$

b) $f(x) = e^{x^2} \rightarrow \text{ED}_f = \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = e^{x^2} \cdot (x^2)' = 2xe^{x^2}$

c) $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \text{ED}_f = \mathbb{R}^* \Rightarrow f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$

d) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+x}}$ $\Rightarrow$ condition $x^2+x \geq 0 \Leftrightarrow x(x+1) \geq 0$
 $\begin{array}{c} + \quad - \quad - \quad + \\ \oplus \quad \ominus \quad \oplus \end{array}$

$\Rightarrow \text{ED}_f =]-\infty; -1] \cup [0; +\infty[$

$\Rightarrow f'(x) = e^{\sqrt{x^2+x}} \cdot (\sqrt{x^2+x})' = e^{\sqrt{x^2+x}} \cdot \left((x^2+x)^{\frac{1}{2}}\right)'$

$= e^{\sqrt{x^2+x}} \cdot \frac{1}{2} (x^2+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x+1 = \frac{(2x+1)e^{\sqrt{x^2+x}}}{2\sqrt{x^2+x}}$

$$e) \quad f(x) = \exp \left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} \right)$$

condition: $\frac{1+x^2}{1-x^2} > 0$ et $1-x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$

signe de $\frac{1+x^2}{1-x^2}$

$$\begin{array}{ccccccc} - & -1 & + & 1 & - & & \rightarrow \end{array}$$

$$D_f =]-1; 1[$$

$$= f'(x) = \exp \left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} \right)'$$

$$= \exp \left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} \right) \cdot \left(\left(\frac{1+x^2}{1-x^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right)'$$

$$= \exp \left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1+x^2}{1-x^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2x(1-x^2) - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} \right)$$

$$= \exp \left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1+x^2}{1-x^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2x - \cancel{2x} + 2x + \cancel{2x}}{(1-x^2)^2} \right)$$

$$= \exp \left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} \right) \cdot \frac{1}{2 \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}} \cdot \frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

$$= e^{\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}} \cdot \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

$$f) \quad f(x) = e^{\ln(x)} \quad \Rightarrow D_f =]0; \infty[$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{\ln(x)} \cdot (\ln(x))' = e^{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x}$$

$$g) \quad f(x) = x^2 e^x \quad \Rightarrow \quad \text{EO}_f = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x e^x + x^2 e^x = x e^x (2 + x)$$

$$h) \quad f(x) = e^{-x} \cos(x) \quad \Rightarrow \quad \text{EO}_f = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{-x} (-1) \cos(x) + e^{-x} (-\sin(x))$$

$$= -\cos(x) e^{-x} - \sin(x) e^{-x}$$

$$= -e^{-x} (\cos(x) + \sin(x))$$

11.3

~~23.3~~ Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 2e^x$

c) $f(x) = 2 - e^x$

b) $f(x) = e^{2x}$

d) $f(x) = e^{2-x}$

$$a) \quad f(x) = 2e^x \quad \Rightarrow \quad \int 2e^x dx = 2 \int e^x dx = 2e^x + C$$

$$b) \quad f(x) = e^{2x} \quad \Rightarrow \quad \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int \underbrace{2}_{f'(x)} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{f(x)} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

$$c) \quad f(x) = 2 - e^x \quad \Rightarrow \quad \int (2 - e^x) dx = \int 2 dx - \int e^x dx$$

$$= 2x - e^x + C$$

$$d) \quad f(x) = e^{2-x} \quad \Rightarrow \quad \int e^{2-x} dx = (-1) \int \underbrace{(-1)}_{f'(x)} \underbrace{e^{2-x}}_{f(x)} dx$$

$$= -1 \cdot e^{2-x} + C = -e^{2-x} + C$$

1.4.4

2.3.4 Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_1^2 e^x dx$

d) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x} e^{\sqrt{x}}} dx$

b) $\int_1^2 e^{3x-7} dx$

e) $\int_0^1 x e^x dx$

c) $\int_0^2 x e^{x^2} dx$

f) $\int_1^{\ln(2)} x^2 e^x dx$

$$a) \int_1^2 e^x dx = e^x \Big|_1^2 = e^2 - e^1 = e^2 - e$$

$$b) \int_1^2 e^{3x-7} dx = \frac{1}{3} \int_1^2 \underbrace{3}_{f'(x)} \cdot \underbrace{e^{3x-7}}_{f(x)} dx = \frac{1}{3} e^{3x-7} \Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{3} e^{3 \cdot 2 - 7} - \frac{1}{3} e^{3 \cdot 1 - 7} = \frac{1}{3} e^{-1} - \frac{1}{3} e^{-4}$$

$$= \frac{1}{3e} - \frac{1}{3e^4} = \frac{e^3 - 1}{3e^4}$$

$$c) \int_0^2 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \underbrace{2x}_{f'(x)} \underbrace{e^{x^2}}_{f(x)} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{2} e^{2^2} - \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (e^4 - 1)$$

Rappel :

$$(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$\textcircled{4} \int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + c$$

$$\begin{aligned}
 d) \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x} e^{\sqrt{x}}} dx &= \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot e^{-\sqrt{x}} dx \\
 &= -2 \int_1^2 \underbrace{\frac{1}{-2\sqrt{x}}}_{f'(x)} \underbrace{e^{-\sqrt{x}}}_{f(x)} dx = -2 e^{-\sqrt{x}} \Big|_1^2 \\
 &= -2 e^{-\sqrt{2}} - (-2 e^{-1}) = -2 e^{-\sqrt{2}} + 2 e^{-1} \\
 &= \boxed{-2(e^{-\sqrt{2}} - e^{-1})}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e) \int_0^1 x e^x dx &\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{per partes}}}{=} x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 \\
 &= e^1 - e^0 + 1 = \boxed{1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f) \int_1^{\ln(2)} x^2 e^x dx &\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{per partes}}}{=} x^2 e^x \Big|_1^{\ln(2)} - \underbrace{\int_1^{\ln(2)} 2x e^x dx}_{\text{per partes}} \\
 &= x^2 e^x \Big|_1^{\ln(2)} - 2x e^x \Big|_1^{\ln(2)} + 2 e^x \Big|_1^{\ln(2)} \\
 &= 2 \ln^2(2) - e - 4 \ln(2) + \cancel{2e} + 4 - \cancel{2e} = \boxed{2 \ln^2(2) - 4 \ln(2) + 4 - e}
 \end{aligned}$$

1.1.5

23.5 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x}{1 - e^x}$

d) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x e^{1/x}$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2x}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x - 1}{e^x + 2}$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x) e^x$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 - 2x + 3}$

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2} \quad \begin{matrix} \text{"0/0"} \\ = \\ \text{BH} \end{matrix} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(e^x - e^2)'}{(x - 2)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x}{1} = e^2$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)} \quad \begin{matrix} \text{"0/0"} \\ = \\ \text{BH} \end{matrix} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(\sin(x))'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos(x)} = 1$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x}{1 - e^x} \quad \begin{matrix} \text{"0/0"} \\ = \\ \text{BH} \end{matrix} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x e^x)'}{(1 - e^x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot e^x + x e^x}{-e^x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x (1 + x)}{-e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x}{-1} = -1$

d) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x e^{1/x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \cdot e^t \quad \begin{matrix} \frac{\infty}{\infty} \\ = \\ \text{BH} \end{matrix} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$
 $\uparrow$
 on pose $\frac{1}{x} = t \rightarrow x = \frac{1}{t}$
 $\Rightarrow t \rightarrow +\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2x} = \underbrace{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{2x}}_{= 0} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{2x} \quad \begin{matrix} \frac{\infty}{\infty} \\ = \\ \text{BH} \end{matrix} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-x}}{2} = -\infty$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x - 1}{e^x + 2} \stackrel{\substack{\text{"}\infty\text{"} \\ \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2$$

$$g) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x) e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x}{e^{-x}} \stackrel{\substack{\text{"}\infty\text{"} \\ \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{-e^{-x}}$$

$$\stackrel{\substack{\text{"}\infty\text{"} \\ \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 - 2x + 3} \stackrel{\substack{\text{"}\infty\text{"} \\ \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x - 2} \stackrel{\substack{\text{"}\infty\text{"} \\ \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

1.1.6

~~2.3.6~~ Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \ln(5x)$

h) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{1-x}\right)$

b) $f(x) = \ln(x-1)$

i) $f(x) = \ln(\sqrt{3-x^2})$

c) $f(x) = \ln(1-x)$

j) $f(x) = \ln(3x^5)$

d) $f(x) = \ln(|1-x|)$

k) $f(x) = x \ln(x) - x$

e) $f(x) = \ln(x^2 - x)$

~~MLY~~ $f(x) = \ln(|\cos(x)|)$

f) $f(x) = \ln(x - x^2)$

m) $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$

g) $f(x) = \ln(|x^2 - x|)$

n) $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$

a) $f(x) = \ln(5x) \Rightarrow \text{ED}_f = \mathbb{R}_+^* \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

b) $f(x) = \ln(x-1) \Rightarrow \text{condition} : x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$
 $\Rightarrow \text{ED}_f =]1; +\infty[$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x-1}$

c) $f(x) = \ln(1-x) \Rightarrow \text{condition} : 1-x > 0 \Rightarrow 1 > x$
 $\Rightarrow \text{ED}_f =]-\infty; 1[$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1-x} (1-x)' = \frac{1}{1-x} (-1) = \frac{-1}{1-x} = \frac{-1}{-(x-1)}$
 $= \frac{1}{x-1}$

$$d) f(x) = \ln(1-x)$$

$$\Rightarrow \ln(1-x) \text{ existe } (\Leftrightarrow 1-x > 0 \Leftrightarrow 1-x \neq 0 \Leftrightarrow 1 \neq x)$$

$$\Rightarrow \text{Dom}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$

$$\forall u \text{ que } (\ln(|u|))' = \frac{1}{u} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{on peut écrire } \left(\ln(1-x) \right)' = \frac{1}{1-x} \cdot (1-x)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{1-x} (-1) = -\frac{1}{1-x} = \frac{-1}{-(x-1)} = \boxed{\frac{1}{x-1}}; \forall x \neq 1$$

$$e) f(x) = \ln(x^2-x)$$

$$\Rightarrow \ln(x^2-x) \text{ existe } (\Leftrightarrow x^2-x > 0 \Leftrightarrow x(x-1) > 0)$$

$$\begin{array}{c} + \quad \ominus \quad - \quad \ominus \quad + \\ \circ \quad \circ \end{array} \xrightarrow{\text{signe de}} \Rightarrow \text{Dom}_f =]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$$

x^2-x

$$f'(x) = \left(\ln(x^2-x) \right)' = \frac{1}{x^2-x} (x^2-x)' = \frac{2x-1}{x^2-x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \boxed{\frac{2x-1}{x^2-x}}$$

$$f) f(x) = \ln(x-x^2)$$

$$\Rightarrow \ln(x-x^2) \text{ existe } (\Leftrightarrow x-x^2 > 0 \Rightarrow \text{Dom}_f =]0; 1[$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x-x^2} (x-x^2)' = \frac{1-2x}{x-x^2} = \boxed{\frac{2x-1}{x(x-1)}}$$

↑
multiplier par $\frac{-1}{-1} = 1$

$$g) f(x) = \ln(|x^2 - x|)$$

$$\text{condition } |x^2 - x| > 0 \Leftrightarrow x^2 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 1\}$$

$$\rightarrow \text{ED}_f = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$$

$$\text{On sait que } \left(\ln(|g(x)|) \right)' = \frac{g'(x)}{g(x)} \text{ pour toute fonction } g,$$

pour tout x tq $g(x) \neq 0 \Rightarrow$ on peut écrire :

$$f'(x) = \left(\ln(|x^2 - x|) \right)' = \frac{(x^2 - x)'}{x^2 - x} = \frac{2x - 1}{x^2 - x}$$

$$h) f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{1-x}\right)$$

$$\text{condition: } \frac{x^2}{1-x} > 0 \Rightarrow \text{on détermine le signe de } \frac{x^2}{1-x}$$

$\Rightarrow$ la fct x^2 est positive ou nulle pour $x \geq 0$

On a $1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. On en déduit que

$$\begin{array}{c} 0 \\ \oplus \\ \hline + \quad + \quad - \end{array} \quad \text{est le signe de } \frac{x^2}{1-x}$$

$$\Rightarrow \text{ED}_f =]-\infty; 1[\setminus \{0\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(x) &= \frac{1}{\frac{x^2}{1-x}} \cdot \left(\frac{x^2}{1-x} \right)' = \frac{1-x}{x^2} \cdot \frac{2x(1-x) - x^2(2x)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{\cancel{1-x}}{x^2} \cdot \frac{2x - 2x^2 + x^2}{\cancel{(1-x)}(1-x)} = \frac{2x - x^2}{x^2(1-x)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x(2-x)}{x^2(1-x)} = \boxed{\frac{2-x}{x(1-x)}}$$

$$1) f(x) = \ln(\sqrt{3-x^2})$$

$$\text{Il faut que } 3-x^2 > 0 \Rightarrow (3-x)(3+x) > 0$$

$$\Rightarrow \text{ED}_f =]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[$$

$$\Rightarrow f'(x) = \left(\ln(\sqrt{3-x^2}) \right)' = \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} \cdot (\sqrt{3-x^2})' = \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3-x^2}} \cdot (3-x^2)'$$

$$= \frac{1}{2(3-x^2)} \cdot (-2x) = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}(3-x^2)} = \boxed{\frac{-x}{3-x^2}}$$

$$j) f(x) = \ln(3x^5)$$

$$\Rightarrow \text{ED}_f =]0; +\infty[\text{ car } 3x^5 > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{3x^5} \cdot (3x^5)' = \frac{1}{\cancel{3}x^5} \cdot \cancel{3} \cdot 5x^4 = \frac{5x^4}{x^5} = \boxed{\frac{5}{x}}$$

$$k) f(x) = x \ln(x) - x$$

$\text{ED}_f = \text{ED de } \ln(x) = \mathbb{R}_+^*$, car la fonction est construite à l'aide d'un $\ln$, de la fonction x , d'une multiplication et d'une soustraction.

$$\Rightarrow f(x) = (x \ln(x) - x)' = (x \ln(x))' - (x)'$$

$$= (x)' \ln(x) + x (\ln(x))' - 1 = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1$$

$$= \ln(x)$$

$$c) f(x) = \ln(|\cos(x)|)$$

$$\text{condition: } |\cos(x)| > 0 \Leftrightarrow \cos(x) \neq 0$$

$$\text{or, } \cos(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ La fonction $f(x)$ est donc définie par tout, sauf sur ces 2 ensembles de points $\Rightarrow \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$\Rightarrow f'(x) = \left[\ln(|\cos(x)|) \right]' = \frac{1}{\cos(x)} \cdot (\cos(x))'$$

$$= - \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

$$m) f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$$

$f(x)$ est définie si $x \in]0; +\infty[$ et si $\ln(x) \neq 0$

Vu que $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^0 = 1 \Rightarrow \mathbb{D}_f =]0; +\infty[\setminus \{1\}$

$$\Rightarrow f'(x) = \left(\frac{x}{\ln(x)} \right)' = \frac{1 \cdot \ln(x) - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)}$$

$$n) \quad f(x) = \frac{1}{x \ln(x)} \rightarrow \begin{matrix} x > 0 \\ x \ln(x) \neq 0 \end{matrix}$$

ici, on doit exclure les nombres négatifs ou nuls, et les solutions des équations : $x = 0$ et $\ln(x) = 0$

$$\Rightarrow \text{On a donc } \text{ED}_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \left(\frac{1}{x \ln(x)} \right)' = - \frac{(x \ln(x))'}{(x \ln(x))^2} = - \frac{\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}}{x^2 \ln^2(x)}$$

$\left(\frac{1}{u} \right)' = - \frac{u'}{u^2}$

$$\Rightarrow f'(x) = - \frac{\ln(x) + 1}{x^2 \ln^2(x)}$$

1.1.7

~~2.3.8~~ Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

d) $f(x) = x^2 + x + 1 + \frac{3}{5x-1}$

b) $f(x) = \frac{1}{3x+2}$

e) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x-1}$

c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+4}$

f) $f(x) = \tan(x)$

Rappel :

$$\left(\ln(f(x)) \right)' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$\textcircled{5} \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|) + C$$

a) $\int \frac{1}{x+1} dx = \ln(|x+1|) + C$

b) $\int \frac{1}{3x+2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3}{3x+2} dx = \frac{1}{3} \ln(|3x+2|) + C$

$\downarrow$
 $f'(x)$

c) $\int \frac{x-1}{x^2-2x+4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2(x-1)}{x^2-2x+4} dx = \frac{1}{2} \ln(|x^2-2x+4|) + C$

$\downarrow$
 $f'(x)$

d) $\int \left(x^2 + x + 1 + \frac{3}{5x-1} \right) dx = \int x^2 dx + \int x dx + \int dx + \frac{3}{5} \int \frac{5}{5x-1} dx$

$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{5} \ln(|5x-1|) + C$

$$e) \int \frac{x^2 + 2x - 2}{x-1} dx$$

Division euclidienne:

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 2x - 2 & x-1 \\ \hline x^2 - x & \\ \hline 3x - 2 & \\ 3x - 3 & \\ \hline +1 & \end{array}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 2}{x-1} = x+3 + \frac{1}{x-1}$$

$$= \int \frac{x^2 + 2x - 2}{x-1} dx = \int \left(x+3 + \frac{1}{x-1} \right) dx$$

$$= \int x dx + 3 \int dx + \int \frac{1}{x-1} dx = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln|x-1| + C$$

$$f) \int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \int \frac{1}{\cos(x)} \cdot \sin(x) dx$$

$$= - \int \frac{1}{\cos(x)} \left(-\sin(x) \right) dx = - \ln(|\cos(x)|) + C$$

$f(x)$ (pointing to $\frac{1}{\cos(x)}$)
 $g'(x)$ (pointing to $-\sin(x)$)
 $(\cos(x))' = -\sin(x)$

~~2.3.9~~ 1.4.8

Lorsqu'elles sont définies, calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_2^5 \frac{dx}{x}$

d) $\int_1^4 \frac{dx}{2x+3}$

b) $\int_{-1}^{-3} \frac{dx}{x}$

e) $\int_2^6 \frac{8x^3 + 19x^2 + 15x + 4}{x^2 + 2x + 1} dx$

c) $\int_{-1}^4 \frac{dx}{x}$

f) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)} dx$

a) $\int_2^5 \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_2^5 = \ln(5) - \ln(2) = \ln\left(\frac{5}{2}\right)$

b) $\int_{-1}^{-3} \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_{-1}^{-3} = \ln(3) - \ln(1) = \ln(3)$
 $\ln|-3| = \ln(3) , \ln|-1| = \ln(1)$

c) $\int_{-1}^4 \frac{dx}{x}$ cette intégrale n'est pas définie en $x=0$

On pourrait chercher à la calculer comme intégrale généralisée, mais ce n'est pas demandé ici. De plus, elle diverge.

d) $\int_1^4 \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{2}{2x+3} dx = \frac{1}{2} \ln|2x+3| \Big|_1^4$
 $= \frac{1}{2} \ln(11) - \frac{1}{2} \ln(5) = \frac{1}{2} (\ln(11) - \ln(5)) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{11}{5}\right)$
 $= \ln\left(\sqrt{\frac{11}{5}}\right)$

$$e) \int_2^6 \frac{8x^3 + 19x^2 + 15x + 4}{x^2 + 2x + 1} dx$$

Division euclidienne :

$$\begin{array}{r} 8x^3 + 19x^2 + 15x + 4 \\ x^2 + 2x + 1 \end{array}$$

$$\underline{8x^3 + 16x^2 + 8x}$$

$$3x^2 + 7x + 4$$

$$\underline{3x^2 + 6x + 3}$$

$$x + 1$$

$$= \frac{8x^3 + 19x^2 + 15x + 4}{x^2 + 2x + 1} = 8x + 3 + \frac{x+1}{x^2 + 2x + 1} = 8x + 3 + \frac{x+1}{(x+1)^2}$$

$$= 8x + 3 + \frac{1}{x+1}$$

$$= \int_2^6 \frac{8x^3 + 19x^2 + 15x + 4}{x^2 + 2x + 1} dx = \int_2^6 \left(8x + 3 + \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= 4x^2 \Big|_2^6 + 3x \Big|_2^6 + \ln|x+1| \Big|_2^6 = 140 + \ln\left(\frac{7}{3}\right)$$

$$f) \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\overset{f'(x)}{\ln(x)}}{\underset{f(x)}{1 - \cos(x)}} dx$$

on remarque : $(1 - \cos(x))' = (-\cos(x))' = \sin(x)$

$$= \ln|1 - \cos(x)| \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln|1 - \cos(\frac{\pi}{2})| - \ln|1 - \cos(\frac{\pi}{3})|$$

$$= \ln|1 - 0| - \ln|1 - \frac{1}{2}| = -\ln|\frac{1}{2}| = \ln\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = \ln(2)$$

1.1.9

2.3.13 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)+1}{1-\ln(x)}$

c) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(x)-1}{x-e}$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2)}{\ln^2(x)}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2-3)}{2-x}$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x}$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} \stackrel{\substack{\text{"0"} \\ \text{0-4}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = \boxed{1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2} \stackrel{\substack{\text{"0"} \\ \text{0-4}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tan(x)}{2x} \stackrel{\substack{\text{"0"} \\ \text{0-4}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1-\tan^2(x)}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

c) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(x)-1}{x-e} \stackrel{\substack{\text{"0"} \\ \text{0-4}}}{=} \lim_{x \rightarrow e} \frac{1}{x} = \boxed{\frac{1}{e}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2-3)}{2-x} \stackrel{\substack{\text{"0"} \\ \text{0-4}}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{-1} = \boxed{-4}$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} \stackrel{\substack{\text{"00"} \\ \text{0-4}}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2+1} = \boxed{0}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)+1}{1-\ln(x)} \stackrel{\substack{\text{"00"} \\ \text{0-4}}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x}} = \boxed{-1}$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2)}{\ln^2(x)} \stackrel{\substack{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"} \text{ f.} \\ \text{B-H}}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x}}{2 \ln(x) \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\underbrace{\ln(x)}_{+\infty}} = \boxed{0}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} \stackrel{\substack{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"} \text{ f.} \\ \text{B-H}}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\underbrace{e^x}_{+\infty}} = \boxed{0}$$

1.1.10

2.3.14 Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \log_2(2x+3)$

c) $f(x) = 3^{2x-4}$

b) $f(x) = \log_3(x^2 - 2x + 1)$

d) $f(x) = \exp_2(\sqrt{x^2 + 1})$

a) $f(x) = \log_2(2x+3)$

condition: $2x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2} \Rightarrow \text{ED}_f =]-\frac{3}{2}; +\infty[$

$$f(x) = \log_2(2x+3) = \frac{\ln(2x+3)}{\ln(2)}$$

$$f'(x) = \frac{\ln(2x+3)' \cdot \ln(2) - \ln(2x+3) \cdot (\ln(2))'}{(\ln(2))^2}$$

$$= \frac{\frac{(2x+3)'}{2x+3} \cdot \ln(2)}{\ln(2) \cdot \ln(2)} = \boxed{\frac{2}{(2x+3) \ln(2)}}$$

b) $f(x) = \log_3(x^2 - 2x + 1)$

condition: $x^2 - 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 1$
 $\Rightarrow \text{ED}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= \frac{\ln(x^2 - 2x + 1)}{\ln(3)} & \Rightarrow f'(x) &= \frac{(\ln(x^2 - 2x + 1))' \ln(3) - \ln(x^2 - 2x + 1) \cdot \ln(3)'}{(\ln(3))^2} \\ &= \frac{(x^2 - 2x + 1)' \cdot \cancel{\ln(3)}}{\cancel{\ln(3)} \cdot \ln(3)} & &= \frac{2x-2}{x^2-2x+1} \cdot \frac{1}{\ln(3)} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{1}{\ln(3)} = \boxed{\frac{2}{\ln(3)(x-1)}} \end{aligned}$$

$$c) f(x) = 3^{2x-4}$$

$$\Rightarrow \text{EO}_f = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{\ln(3) \cdot (2x-4)}$$

$$\uparrow \text{formule} \quad a^x = e^{\ln(a) \cdot x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \left(e^{\ln(3) \cdot (2x-4)} \right)' = e^{(2x-4) \ln(3)} \cdot \left((2x-4) \cdot \ln(3) \right)'$$

$$= e^{(2x-4) \ln(3)} \cdot \ln(3) \cdot (2x-4)' = e^{(2x-4) \ln(3)} \cdot \ln(3) \cdot 2$$

$$d) f(x) = \exp_2 \left(\sqrt{x^2+1} \right)$$

$$x^2+1 > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} \text{ existe } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \text{EO}_f = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \left(\exp_2 \left(\sqrt{x^2+1} \right) \right)' = \left(2^{\sqrt{x^2+1}} \right)'$$

$$= \left(e^{\sqrt{x^2+1} \cdot \ln(2)} \right)' = e^{\sqrt{x^2+1} \cdot \ln(2)} \cdot \left(\sqrt{x^2+1} \cdot \ln(2) \right)'$$

$$\uparrow \text{formule} \quad a^x = e^{\ln(a) \cdot x} = e^{\sqrt{x^2+1} \cdot \ln(2)} \cdot \ln(2) \cdot \left(\sqrt{x^2+1} \right)'$$

$$= e^{\sqrt{x^2+1} \cdot \ln(2)} \cdot \ln(2) \cdot \frac{1}{2} (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x \ln(2) \cdot e^{\sqrt{x^2+1} \cdot \ln(2)}}{\sqrt{x^2+1}}$$

1.1.12

~~2.3.15~~ Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 2^x}{4x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\log_5(x+2)}{x+1}$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 2^x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \cdot \ln(8)} - e^{x \cdot \ln(2)}}{4x}$$

$$\stackrel{\substack{\text{"0/0"} \\ \text{B-H}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(8) \cdot x^2 - \ln(2) \cdot x}{4} = \frac{\ln(8) - \ln(2)}{4} = \frac{\ln(4)}{4} = \frac{2\ln(2)}{4}$$

$$= \boxed{\frac{\ln(2)}{2}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\log_5(x+2)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{1}{\ln(5)} \cdot \ln(x+2)}{x+1}$$

$$\stackrel{\substack{\text{"0/0"} \\ \text{B-H}}}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\frac{\ln(5)(x+2)}{1}} = \boxed{\frac{1}{\ln(5)}}$$

1.1.12 Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_1^3 4^x dx$

b) $\int_{-1}^1 \exp_2(x^2) x dx$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \int_1^3 4^x dx &= \frac{1}{\ln(4)} \int_1^3 \ln(4) \cdot \underbrace{e^{\ln(4)x}}_{4^x} dx = \frac{1}{\ln(4)} \cdot 4^x \Big|_1^3 \\ &= \frac{1}{2\ln(2)} \cdot (64 - 4) = \frac{30}{\ln(2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \int_{-1}^1 \exp_2(x^2) x dx &= \frac{1}{2\ln(2)} \int_{-1}^1 e^{\ln(2)x^2} \cdot 2\ln(2)x dx \\ &= \frac{1}{2\ln(2)} \cdot 2^{x^2} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2\ln(2)} (2 - 2) = 0 \end{aligned}$$

1.4.13

23.18 Étudier les fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^{-x^2}$

d) $f(x) = \frac{x}{e^x}$

b) $f(x) = e^{1/x}$

e) $f(x) = \frac{e^x + 2}{1 - 3e^x}$

c) $f(x) = (x^2 - 4x + 4)e^x$

f) $f(x) = (x + 2)e^{1/x}$

a) $f(x) = e^{-x^2}$

* Parité: $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-(x)^2} = f(x)$ $\Rightarrow$ f est paire
 $\Rightarrow$ symétrie par rapport à l'axe Oy

* D_f = IR

* Zéros de $f(x)$:

$f(x)$ est toujours > 0

* Tableau de signe:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		+

* Asymptotes:

- Asymptote horizontale: $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} e^{-x^2} = e^{-\left(\pm \infty\right)^2} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$

$\Rightarrow$ AH : $y = 0$ $\Rightarrow$ f est toujours au-dessus de l'AH

* Extremums:

$f(x) = (e^{-x^2})' = e^{-x^2} (-x^2)' = e^{-x^2} \cdot -2x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x e^{-x^2} = 0$
 $e^{-x^2} > 0 \Rightarrow x = 0$

* Tableau de croissance :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		0	

Diagram showing a peak at $x=0$ with a value of 1. Arrows indicate the function increases from $-\infty$ to 0 and decreases from 0 to $+\infty$.

$$\Rightarrow \text{Max} : x=0 \Rightarrow f(0) = e^{-0^2} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Max}(0; 1)}$$

* Points d'inflexions :

$$\begin{aligned} f''(x) &= (-2xe^{-x^2})' = -2e^{-x^2} + (-2x)(e^{-x^2})' \\ &= -2e^{-x^2} - 2x(-2xe^{-x^2}) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \\ f''(x) &= e^{-x^2}(-2 + 4x^2) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f''(x) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad 2x^2 - 1 = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad (2x - 1)(2x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = -\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

* Courbure de f :

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$		+	-	+
$f(x)$		U	∩	U

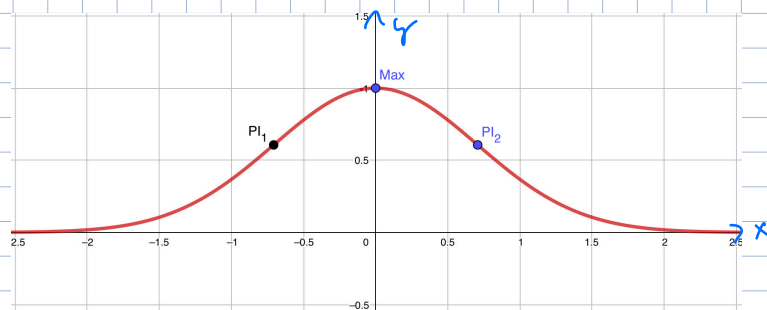
Red arrows point to PI_1 at $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ and PI_2 at $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow PI_1 : x &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \\ f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= e^{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \\ &= e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e^{1/2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\Rightarrow \boxed{PI_1 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{1}{\sqrt{e}} \right)}$$

$$\text{et} \quad \boxed{PI_2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{1}{\sqrt{e}} \right)}$$



2.3.18b) $f(x) = e^{1/x}$

* $D_f = \mathbb{R}^*$, fct ni paire , ni impaire

* tableau de signe :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	+	$\parallel$	+

* Asymptotes :

- Asymptote verticale :

i) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} e^{\frac{1}{x}} = ? \quad (*)$

Rappel : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad (1)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad (2)$

pour utiliser ces deux limites, il faut transformer $\frac{1}{x} = X$

donc $\frac{1}{x} = X$

quand $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} (c \cdot \tilde{x} - d \cdot 0_-) = \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{0_-} = -\infty$

donc $X \rightarrow -\infty$

d'où (*) : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \quad (1)$

donc $(0; 0)$ est un point limite à gauche

ii) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} e^{\frac{1}{x}} = ? \quad (**)$

De même manière que i) , on pose $\frac{1}{x} = X$

quand $x \rightarrow 0$ (c-à-d $x \rightarrow 0_+$) $\rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{0_+} = +\infty$

donc $\frac{1}{x} = X \rightarrow +\infty$

$$\text{d'in (**) : } \lim_{x \rightarrow 0_+} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty \quad (*)$$

donc $x=0$ est une asymptote verticale (à droite)

- Asymptote horizontale :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\pm\infty}} = e^0 = 1$$

$\Rightarrow$ donc $y=1$ est une asymptote horizontale

! Pas d'asymptote oblique car il existe une asymptote horizontale vers $\pm\infty$

Rappel :

Quand la fct admet une asymptote horizontale ou oblique, nous devons étudier la position d'une courbe par rapport à ses asymptotes.

$\rightarrow$ On détermine la position de la courbe $y=f(x)$ par rapport à une asymptote horizontale ou oblique en étudiant le signe de l'expression :

$$\delta(x) = f(x) - \underbrace{(mx+h)}_{\text{équation de l'asymptote oblique}}$$

$$\text{Dans notre cas : } \delta(x) = f(x) - \underbrace{1}_{\substack{\text{(car équation de l'asymptote horizontale : } y=1) \\ y=0 \cdot x + 1}}$$

$$\Rightarrow \delta(x) = e^{\frac{1}{x}} - 1$$

$$\Rightarrow \delta(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} = e^0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \text{impossible}$$

=> tableau de signe de $g(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	-		+
position	Dessous		Dessus

! Entre $-\infty$ à 0

$g(x)$ est négatif. Tester: $x = -2$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{2}} - 1 < 0$$

Entre 0 à $+\infty$

$g(x)$ est positif. Tester: $x = 2$

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{2}} - 1 > 0$$

* Extremums:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{\frac{1}{x}} \right)' = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x} \right)' = e^{\frac{1}{x}} (x^{-1})' = e^{\frac{1}{x}} \cdot (-x^{-2}) \\ &= -e^{\frac{1}{x}} \cdot x^{-2} \\ \Rightarrow f'(x) &= -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \Rightarrow \text{condition } x \neq 0 \end{aligned}$$

* Tableau de croissance:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	1 ↓ (AH)	0 ↓ (conséquence de AV)	1 ↓ (conséquence de AH)

← signe de $f'(x)$ est le signe de $-\frac{1}{x^2}$ qui est toujours < 0

=> pas d'extremums!

* Points d'inflexion:

$$f''(x) = \left(-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \right)' = \left(-\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} \right)' = \left(-\frac{1}{x^2} \right)' \left(e^{\frac{1}{x}} \right) + \left(-\frac{1}{x^2} \right) \left(e^{\frac{1}{x}} \right)'$$

$f'(x)$

$$f''(x) = (-x^{-2})' \left(e^{\frac{1}{x}} \right) + \left(-\frac{1}{x^2} \right) \left(-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \right)$$

$$= 2x^{-3} e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} \left(-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \right) = 2x^{-3} e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{2e^{\frac{1}{x}}}{x^3} + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4} = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{2x+1}{x^4} \right)$$

$$\Rightarrow f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{2x+1}{x^4} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x+1}{x^4} = 0 \quad (\Rightarrow) \quad 2x+1=0 \quad (\Rightarrow) \quad x = -\frac{1}{2}$$

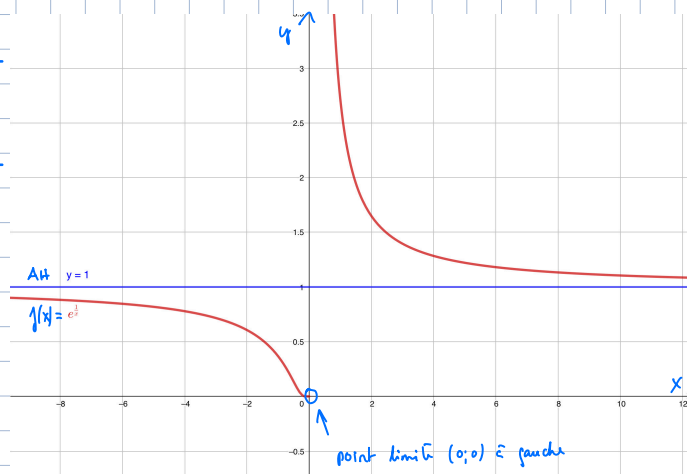
$\Rightarrow$ Courbure de f :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$e^{\frac{1}{x}}$	+	+	+	+
$2x+1$	-	0	+	+
x^4	+	+	+	+
$f''(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	$\cap$	$\uparrow$	$\cup$	$\cup$

point d'inflexion

$$\Rightarrow \text{Point d'inflexion : } x = -\frac{1}{2} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{-\frac{1}{2}}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

$\Rightarrow$ Donc le point d'inflexion est $\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{e^2}\right)$



c) $f(x) = (x^2 - 4x + 4)e^x$

* Parité: $f(x)$ ni paire, ni impaire

* Domaine de définition:

$$D_f = \mathbb{R}$$

* Études de $f(u)$:

$$e^x > 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \quad (=) \quad x = 2$$

* Tableau de signe:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x^2 - 4x + 4$	+	0	+
e^x	+	+	+
$f(x)$	+	0	+

* Asymptote:

- pas de A.V

- Asymptote horizontale:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 4x + 4)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{e^{-x}} \stackrel{\text{"0/0" BH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 - 4x + 4)'}{(e^{-x})'}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 4}{-e^{-x}} \stackrel{\text{"0/0" BH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x - 4)'}{(-e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{(-e^{-x}) \cdot (-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{e^{+\infty}} = \frac{2}{\infty} = 0 \Rightarrow \text{A.H : } y = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 4x + 4)e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{e^{-x}} = \frac{+\infty}{0_+} = +\infty$$

$$\text{rappel: } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

- Asymptote oblique:

$$\text{forme de A.O: } y = mx + h$$

$\Rightarrow$ utiliser le théorème général de l'asymptote oblique:

$$\begin{aligned} \Rightarrow m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 4x + 4)e^x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \cdot +\infty = +\infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ pas d'asymptote oblique et $f(x)$ est toujours au dessus de l'AH.

* Extremums:

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((x^2 - 4x + 4)e^x)' = (x^2 - 4x + 4)'e^x + (x^2 - 4x + 4)(e^x)' \\ &= (2x - 4)e^x + (x^2 - 4x + 4)e^x = e^x(2x - 4 + x^2 - 4x + 4) \\ &= e^x(x^2 - 2x) = e^x x(x - 2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x x(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$$

* Tableau de variation:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$x^2 - 2x$	+	0	-	+
e^x	+	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	0	4	0	$+\infty$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 4$$

$$\begin{aligned} x = 2 &\Rightarrow f(2) = (4 - 8 + 4)e^2 \\ &= 0 \cdot e^2 = 0 \end{aligned}$$

$$= \text{Max}(0; 4) \text{ et Min}(2; 0)$$

* Points d'inflexion :

$$\begin{aligned} f''(x) &= ((x^2 - 2x)e^x)' = (x^2 - 2x)'e^x + (x^2 - 2x)(e^x)' \\ &= (2x - 2)e^x + e^x(x^2 - 2x) = e^x(x^2 - 2x + 2x - 2) = e^x(x^2 - 2) \\ \Rightarrow f''(x) = 0 &(\Leftrightarrow) e^x(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

* Courbure de f :

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
e^x	+	+	+	+
$x^2 - 2$	+	0	-	+
$f''(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	U			U

PI

PI

$$* x = -\sqrt{2}$$

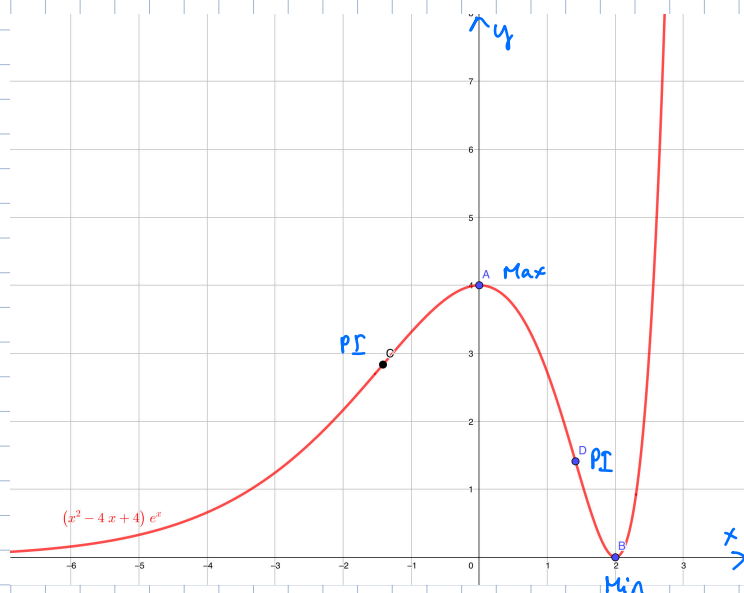
$$\begin{aligned} \Rightarrow f(-\sqrt{2}) &= ((-\sqrt{2})^2 - 4(-\sqrt{2}) + 4)e^{-\sqrt{2}} \\ &= (2 + 4\sqrt{2} + 4)e^{-\sqrt{2}} \\ &= e^{-\sqrt{2}}(6 + 4\sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Point d'inflexion} : (-\sqrt{2}; e^{-\sqrt{2}}(6 + 4\sqrt{2}))$$

$$* x = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{2}) = e^{\sqrt{2}}(6 - 4\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \text{Point d'inflexion} : (\sqrt{2}; e^{\sqrt{2}}(6 - 4\sqrt{2}))$$



d) $f(x) = \frac{x}{e^x}$

* Parité : ni paire ni impaire

* D_f = ℝ

* Zéro : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{e^x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

* Tableau de signe :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

* Asymptotes :

- AV : vu que $D_f = \mathbb{R}$, il n'y a pas d'AV.

- At :

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x} = -\infty e^{-(-\infty)} \\ &= -\infty e^{+\infty} = (-\infty)(+\infty) = \boxed{-\infty} \\ &\Rightarrow \text{par d'At à gauche.} \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{\substack{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"} \\ \text{BH}}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$\Rightarrow$ At : $y = 0$ à droite.

$$\text{- AO : on a } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{e^x}}{x} = \frac{\boxed{-\infty}}{\boxed{-\infty}} = +\infty$$

$\Rightarrow$ pas de A.O

il y a une AH $\rightarrow$ étude de position :

$$g(x) = f(x) - 0 = f(x) \Rightarrow f(x) = g(x) = \frac{x}{e^x} = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	-		+
position	dehaus		dehaus

* Extremums :

$$f'(x) = \left(\frac{x}{e^x} \right)' = \frac{1 \cdot e^x - x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{e^x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

* Tableau de variation :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

$$\text{Max} : x=1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{e^1} = \frac{1}{e}$$

Max $(1; \frac{1}{e})$

* Points d'inflexion :

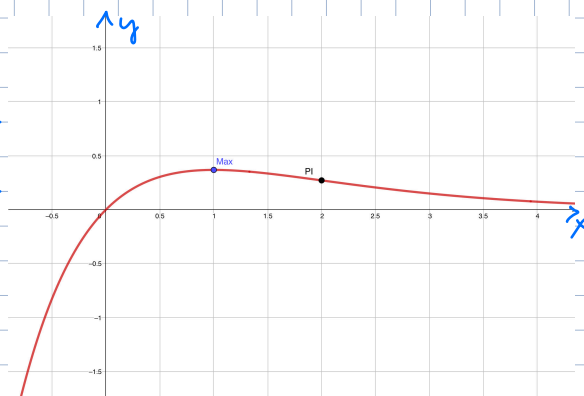
$$f''(x) = \left(\frac{1-x}{e^x} \right)' = \frac{(-1)e^x - (1-x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(-1-(1-x))}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{-1-1+x}{e^x} = \frac{x-2}{e^x} \Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

* Caractères :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

PI $(2; \frac{2}{e^2})$



f) $f(x) = (x+2)e^{1/x}$

* Parité : ni paire, ni impaire

* D_f : $\mathbb{R}^*$ (car $x \neq 0$)

* Tableau de signe :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)e^{1/x} = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$x+2$	-	0	+	+
$e^{1/x}$	+	+	+	+
$f(x)$	-	0	+	+

* Asymptotes :

- AV : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+2)e^{1/x} = (0+2)e^{\frac{1}{0^-}} = 2 \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow$ point limite $(0; 0)$ à gauche

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+2)e^{1/x} = (0+2)e^{\frac{1}{0^+}} = 2 \cdot \infty = +\infty$

$\Rightarrow$ AV : $x=0$ à droite

- At : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x+2)e^{1/x} = (\pm\infty+2)e^{\frac{1}{\pm\infty}} = +\infty$

$\Rightarrow$ pas de At.

- AO : $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+2)e^{1/x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{2}{x}e^{1/x}\right)$

$\downarrow$
0 quand $x \rightarrow \pm\infty$

$\Rightarrow m = 1$

$$h = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} ((x+2)e^{\frac{1}{x}} - x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) + 2$$

$= 2$

On pose $x = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{1}{x} = t \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(e^t - 1) + 2$

Si $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow t \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} + 2 = 3 \quad \left(\text{limite par BH : } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t}{1} + 2 = 1+2 = 3 \right)$$

limite courante = 1
(p. 15)

$\Rightarrow$ A.O: $y = x+3$

* Étude de position:

$$S(x) = f(x) - A.O = f(x) - x - 3 = (x+2)e^{\frac{1}{x}} - x - 3$$

$\Rightarrow$ pas de zéro de $S(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$S(x)$		$-$	$+$
position	Dessous		Dessus

* Extremums:

$$f'(x) = \left((x+2)e^{\frac{1}{x}} \right)' = e^{\frac{1}{x}} + (x+2)e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x} \right)' = e^{\frac{1}{x}} + (x+2)e^{\frac{1}{x}} \cdot (-x^{-2})$$

$$= e^{\frac{1}{x}} + \frac{(x+2)e^{\frac{1}{x}}}{-x^2} = \frac{-x^2 e^{\frac{1}{x}} + (x+2)e^{\frac{1}{x}}}{-x^2} = e^{\frac{1}{x}} \frac{-x-2+x^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad (\Rightarrow) \frac{e^{\frac{1}{x}}(x^2 - x - 2)}{x^2} = 0$$

$$(\Rightarrow) x^2 - x - 2 = 0 \quad (\Rightarrow) (x-2)(x+1) = 0$$

* Tableau de croissance :

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$ <td></td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td>		+	0	-	0	+
$f(x)$ <td>$-\infty$</td> <td>$\nearrow \frac{1}{e}$</td> <td>$\searrow 0$</td> <td>$\nearrow +\infty$</td> <td>$\searrow 4e$</td> <td>$\nearrow +\infty$</td>	$-\infty$	$\nearrow \frac{1}{e}$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$	$\searrow 4e$	$\nearrow +\infty$

$$\text{Max: } x = -1 \Rightarrow f(-1) = (-1+2)e^{\frac{1}{-1}} \\ = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \text{Max}(-1; \frac{1}{e})$$

$$\text{Min: } x = 2 \Rightarrow f(2) = (2+2)e^{\frac{1}{2}} \\ = 4e^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{e}$$

$$\Rightarrow \text{Min}(2; 4\sqrt{e})$$

* Points d'inflexion :

$$f''(x) = \left(e^{\frac{1}{x}} \frac{(x^2 - x - 2)}{x^3} \right)' = \left(\frac{(2x-1)x^2 - 2x(x^2 - x - 2) - x^2 - x - 2}{x^6} \right) e^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{5x+2}{x^6} \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5x+2}{x^6} e^{\frac{1}{x}} = 0 \Leftrightarrow \frac{5x+2}{x^6} = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{5}$$

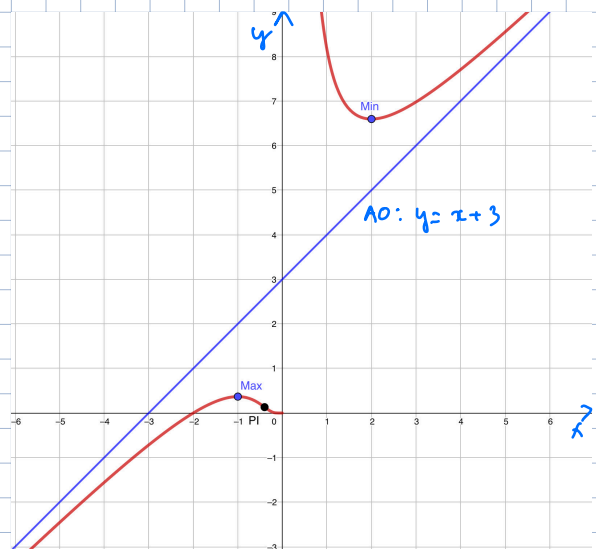
* Concavité :

x	$-\infty$	$-\frac{2}{5}$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	$\cap$		$\cup$	$\cup$

PI

$$\text{PI: } x = -\frac{2}{5} \Rightarrow f\left(-\frac{2}{5}\right) = \left(-\frac{2}{5} + 2\right)e^{\frac{1}{-2/5}}$$

$$= \frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow \text{PI}\left(-\frac{2}{5}; \frac{8e^{-5/2}}{5}\right)$$



1.1.14

23.19 Étudier les fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^2 \ln(x)$

d) $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right)$

b) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

e) $f(x) = \frac{\ln(x) - 2}{\ln(x) - 1}$

c) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

f) $f(x) = \ln(1 + e^x) - x$

a) $f(x) = x^2 \ln(x)$

* $D_f =]0, +\infty[$

* Zero : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 \ln(x) = 0$

$\Leftrightarrow \ln(x) = 0 \Leftrightarrow e^0 = x \Leftrightarrow \underline{x = 1}$

* Tableau de signe :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x^2	+	+	+	+
$\ln(x)$	-	-	0	+
$f(x)$	-	-	-	+

* Asymptotes :

- Asymptote verticale :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x)$$

on pose $x = \frac{1}{t} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{t^2}$

si $x \rightarrow 0^+ \rightarrow t = \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{0^+} = +\infty$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^2} \ln\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}$

Rappel :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\begin{aligned}
 \text{SII} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\left(\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)'}{(t^2)'} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(\frac{1}{t})'}{t}}{2t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(-1)}{t^2}}{2t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{t^2}}{2t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{\frac{1}{t^2}}{2t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2t^3} = 0 \\
 &\rightarrow \text{point limite } (0;0) \text{ \u00e0 droite}
 \end{aligned}$$

- Asymptote horizontale :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x^2}_{+\infty} \underbrace{\ln(x)}_{+\infty} = +\infty \Rightarrow \text{pas de AH}$$

- Asymptote oblique :

$$\begin{aligned}
 m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) = +\infty \cdot +\infty = +\infty \\
 &\Rightarrow \text{pas de A.O}
 \end{aligned}$$

* Extremums :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\underbrace{x^2 \ln(x)}_{(uv)'} \right)' = 2x \ln(x) + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln(x) + x \\
 (uv)' &= u'v + uv'
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \ln(x) + x = 0 \Leftrightarrow x(2 \ln(x) + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ et } 2 \ln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -\frac{1}{2}$$

Rappel :

$$e^x = u \Leftrightarrow \ln(u) = x \Rightarrow e^{-\frac{1}{2}} = x \Rightarrow x = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

* tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
$f'(x)$	/	/	-	+
$f(x)$	/	/	0	/

$\nearrow$ $-\frac{1}{2e}$ $\nearrow$

$$\Rightarrow \text{Min: } x = \frac{1}{e} \Rightarrow f\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^2 \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e^{1/2}}\right)$$

$$= \frac{1}{e} \ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{e} \left(-\frac{1}{2}\right) \underbrace{\ln(e)}_{=1} = -\frac{1}{2e}$$

$$\Rightarrow \text{Min} \left(\frac{1}{e} ; -\frac{1}{2e} \right)$$

* Points d'inflexion :

$$f''(x) = (2x \ln(x) + x)' = 2 \ln(x) + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 = 2 \ln(x) + 3$$

$$\Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{3}{2}}$$

+ Courbure de f :

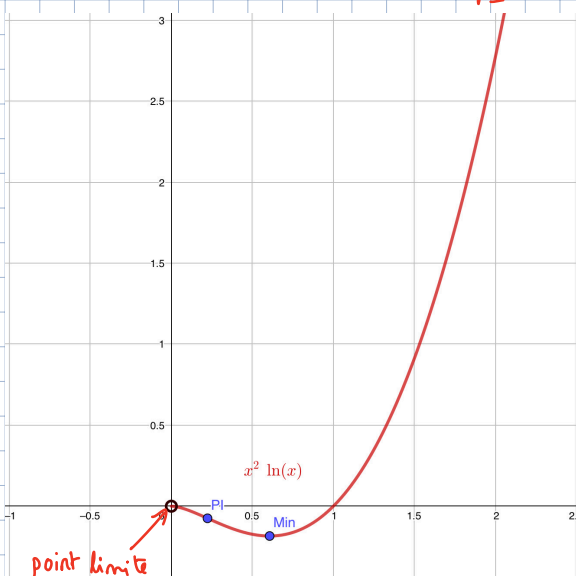
x	$-\infty$	0	$e^{-\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f''(x)$			-	+
$f(x)$			$\cap$	$\cup$

$$\Rightarrow \text{point d'inflexion: } x = e^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = \underbrace{\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)^2}_{e^{(-\frac{3}{2} - \frac{3}{2})}} \underbrace{\ln\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)}_{=-\frac{3}{2}}$$

$$= e^{-3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = -\frac{3}{2e^3}$$

$$\Rightarrow \text{PI} \left(e^{-\frac{3}{2}} ; -\frac{3}{2e^3} \right)$$



b) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

* parité: $f(-x) = \ln((-x)^2 + 1) = \ln(x^2 + 1) = f(x) \Rightarrow$ fonction paire

* Df = $\mathbb{R}$

* zéros de f(x): $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow e^0 = x^2 + 1$

$\Leftrightarrow 1 = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

* Tableau de signe:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	+	0	+

* Asymptotes:

- AV: non

- AH: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln(x^2 + 1) = \ln(+\infty + 1) = +\infty$

$\Rightarrow$ pas de AH

- AO: $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} \stackrel{\frac{0}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2 + 1} \cdot (2x)$

$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow m = 0$

$\Rightarrow$ vu qu'il n'y a pas de AH et que $m = 0$, il n'y a pas d'AO.

* Extremums:

$f'(x) = (\ln(x^2 + 1))' = \frac{1}{x^2 + 1} (x^2 + 1)' = \frac{1}{x^2 + 1} 2x = \frac{2x}{x^2 + 1}$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

* Tableau de croissance:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow 0 \nearrow$	$+\infty$

min: $x = 0 \Rightarrow f(0) = \ln(0 + 1) = \ln(1)$

$\Rightarrow \ln(1)$

* Points d'inflexion:

$$f''(x) = \left(\frac{2x}{x^2+1} \right)' = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2(1-x^2) = 0$$

$$\Rightarrow x = \pm 1$$

* Concavité:

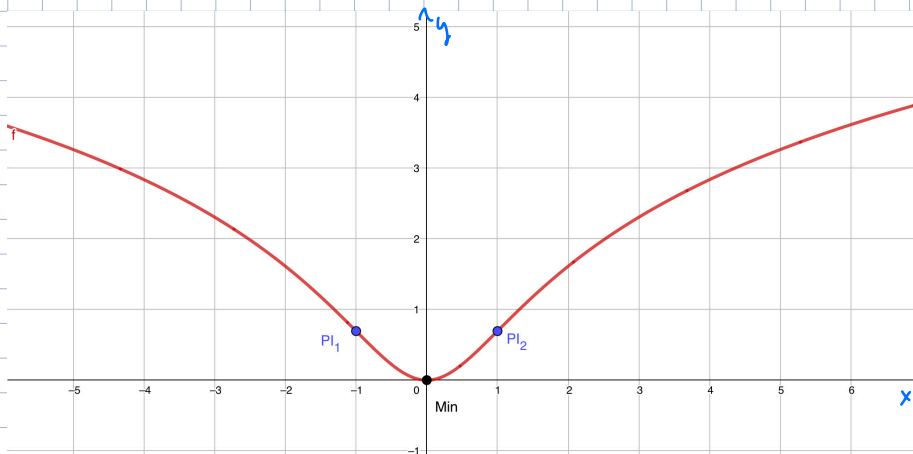
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	0	-
$f(x)$	$\cap$		$\cup$	$\cap$
		PI_1	PI_2	

$$PI_1: x = -1 \Rightarrow f(-1) = \ln((-1)^2+1) = \ln(2)$$

$$\Rightarrow PI_1(-1; \ln(2))$$

$$PI_2: x = 1 \Rightarrow f(1) = \ln(1^2+1) = \ln(2)$$

$$\Rightarrow PI_2(1; \ln(2))$$



c) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

* parité : ni paire, ni impaire

* $D_f = \mathbb{R}_+^*$

* zéro : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = \ln(1) \Leftrightarrow x = 1$

* Tableau de signe :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	///		- 0 +	+

* Asymptotes :

- AV : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(0_+)}{0_+} = -\infty$

$\Rightarrow$ AV : $x = 0$ à droite

- AH : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$

$\Rightarrow$ AH : $y = 0$ ($x \rightarrow +\infty$)

$\Rightarrow$ Position : $\delta(x) \approx f(x) - 0 = \frac{\ln(x)}{x}$
(formule p. 16)

* Etude de position :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\delta(x)$	///		- 0 +	+
position	dessous	dessous	dessus	dessus

* Extremums :

$$f'(x) = \left(\frac{\ln(x)}{x} \right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1(\ln(x))}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-\ln(x) + 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 = \ln(e)$$

$$\Rightarrow x = e$$

* Tableau de croissance :

x	$-\infty$	0	e	$+\infty$
$f'(x)$			+	-
$f(x)$			$\nearrow \frac{1}{e}$	

$$M_{\text{ax}} : x = e$$

$$\Rightarrow f(e) = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \text{Max} \left(e; \frac{1}{e} \right)$$

* Points d'inflexion :

$$f''(x) = \left(\frac{1 - \ln(x)}{x^2} \right)' = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1 - \ln(x))}{x^4}$$

$$= \frac{-x - 2x(1 - \ln(x))}{x^4} = \frac{x(-1 - 2(1 - \ln(x)))}{x^4}$$

$$= \frac{-1 - 2 + 2\ln(x)}{x^3} = \frac{2\ln(x) - 3}{x^3}$$

$$\Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\ln(x) - 3}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 2\ln(x) = 3 \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{3}{2}} = x$$

* Courbure :

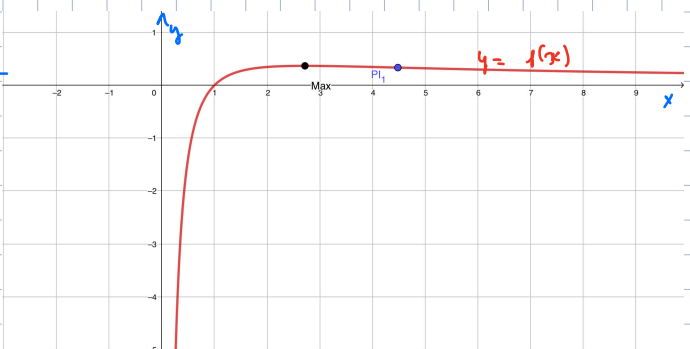
x	$-\infty$	0	$e^{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f''(x)$			-	+
$f(x)$			$\cap$	$\cup$

P.I.

$$P.I : x = e^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f(e^{\frac{3}{2}}) = \frac{\ln(e^{\frac{3}{2}})}{e^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow P.I \left(e^{\frac{3}{2}}; \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}} \right)$$



d) $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right)$

* parité : ni paire, ni impaire

* Df : conditions :
$$\begin{cases} \frac{2x}{x+1} > 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow D_f =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$2x$		-	-	+
$x+1$		-	+	+
$\frac{2x}{x+1}$		+	-	+

D_f D_f

* zéro : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) = \ln(1)$

$\Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} = 1 \Leftrightarrow 2x = x+1 \Leftrightarrow x = 1$

* Tableau de signe :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$	+		-	+	+

* Asymptotes :

- AV : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) = +\infty$

$\Rightarrow AV : x = -1 \text{ \AA gauche}$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) = -\infty$

$\Rightarrow AV : x = 0 \text{ \AA droite}$

- Att: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln\left(\left(\frac{2x}{x+1}\right)'\right)$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln\left(\frac{2}{1}\right) = \ln(2)$$

=> Att: $y = \ln(2)$

=> position: $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) - \ln(2) = \ln\left(\frac{\frac{2x}{x+1}}{2}\right)$

$$= \ln\left(\frac{2x}{x+1} \cdot \frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

* Etude de position:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f(x)$	+			-
position	Dessus			Desous

* Extremums:

$$f'(x) = \left(\ln\left(\frac{2x}{x+1}\right)\right)' = \frac{1}{\frac{2x}{x+1}} \cdot \left(\frac{2x}{x+1}\right)' = \frac{x+1}{2x} \cdot \left(\frac{2(x+1) - 2x \cdot 1}{(x+1)^2}\right)$$

$$= \frac{2x+2-2x}{2x(x+1)} = \frac{2}{2x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x(x+1)} = 0 \Rightarrow \text{pas de zéro de } f'(x)$$

* Tableau de Croissance:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+			+
$f(x)$	$\nearrow \ln(2)$			$\nearrow \ln(2)$

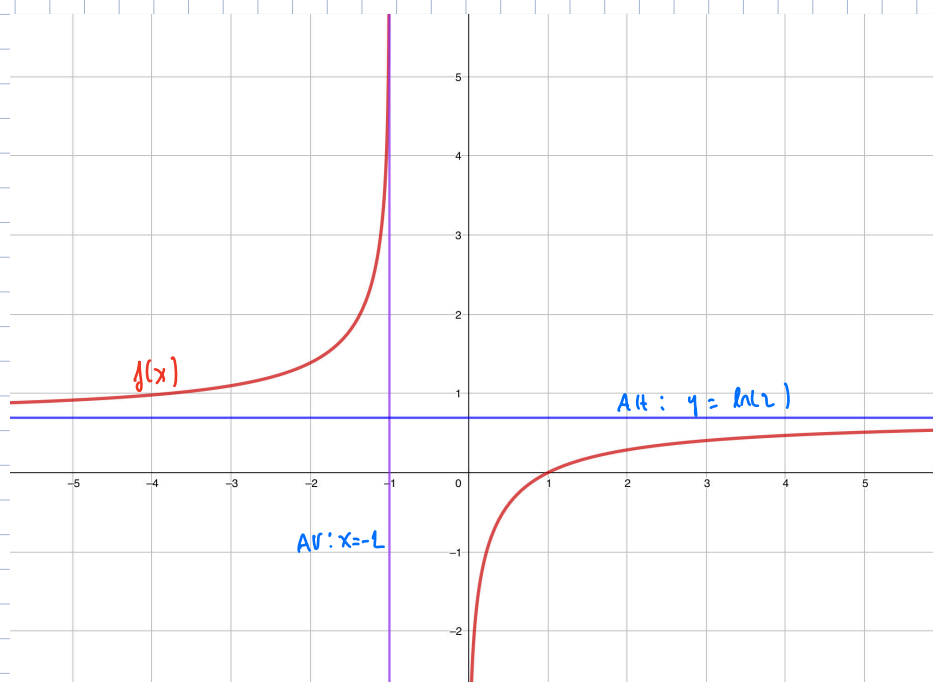
* Point d'inflexion:

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x(x+1)} \right)' = \frac{0 \cdot x(x+1) - 2x-1}{(x(x+1))^2} = \frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow -2x-1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \notin D_f$$

* Concavité:

x	$-\infty$	-1	$-1/2$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	/ / / / /			-
$f(x)$	U	/ / / / /			n



$$e) \quad f(x) = \frac{\ln(x) - 2}{\ln(x) - 1}$$

* Parité : ni paire, ni impaire

$$* \quad D_f = ? \quad \ln(x) - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \neq 1 \Leftrightarrow \ln(x) \neq \ln(e) \\ \Leftrightarrow x \neq e$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}^*_{+} \setminus \{e\}$$

$$* \quad \text{zéro : } f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x) - 2}{\ln(x) - 1} = 0 \Leftrightarrow \ln(x) - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \ln(x) = 2 \Leftrightarrow e^2 = x$$

* tableau de signe :

x	$-\infty$	0	e	e^2	$+\infty$	
$f(x)$			$+$	$-$		$+$

* Asymptotes :

$$- \text{AV} : \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x) - 2}{\ln(x) - 1} \stackrel{\substack{\text{"}\infty\text{"} \\ \frac{\infty}{\infty}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$$

$\Rightarrow$ point limite : $(0, 1)$ à droite.

$$\lim_{x \rightarrow e} f(x) = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(x) - 2}{\ln(x) - 1} = \frac{\ln(e) - 2}{\ln(e) - 1} = \frac{1 - 2}{1 - 1} = \frac{-1}{0} = \infty$$

$$\Rightarrow \text{AV : } x = e$$

$$- \text{AH} : \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) - 2}{\ln(x) - 1} \stackrel{\substack{\text{"}\infty\text{"} \\ \frac{\infty}{\infty}}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\Rightarrow \text{AH : } y = 1 \text{ quand } x \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \text{position : } g(x) = f(x) - 1 = \frac{\ln(x) - 2}{\ln(x) - 1} - 1 = \frac{\ln(x) - 2 - \ln(x) + 1}{\ln(x) - 1}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-1}{\ln(x)-1}$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{\ln(x)-1} = 0 \Leftrightarrow \text{pas de zéro, car: } \ln(x)-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq e$$

* Etude de position :

x	$-\infty$	0	e	$+\infty$
$f(x)$			+	-
position		Dessus	Dessous	

* Extremums :

$$f'(x) = \left(\frac{\ln(x)-2}{\ln(x)-1} \right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot (\ln(x)-1) - (\ln(x)-2) \cdot \frac{1}{x}}{(\ln(x)-1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{\ln(x)} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cancel{\ln(x)} + \frac{2}{x}}{(\ln(x)-1)^2} = \frac{\frac{1}{x}}{(\ln(x)-1)^2} = \frac{1}{x(\ln(x)-1)^2}$$

$\Rightarrow$ pas de zéro pour $f'(x)$

* Tableau de croissance :

x	$-\infty$	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	+	
$f(x)$		$+\infty$	$-\infty$	

* Points d'inflexion :

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x(\ln(x)-1)^2} \right)' = - \frac{(\ln(x)-1)^2 + 2(\ln(x)-1)}{x^2(\ln(x)-1)^4}$$

$$= - \frac{\ln(x)+1}{x^2(\ln(x)-1)^3}$$

$$\Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\ln(x)+1}{x^2(\ln(x)-1)^3} = 0 \Leftrightarrow -(\ln(x)+1) = 0$$

$$\Rightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow -\ln(x) = 1 \Leftrightarrow \ln(x^{-1}) = 1$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 1 = \ln(e)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = e \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

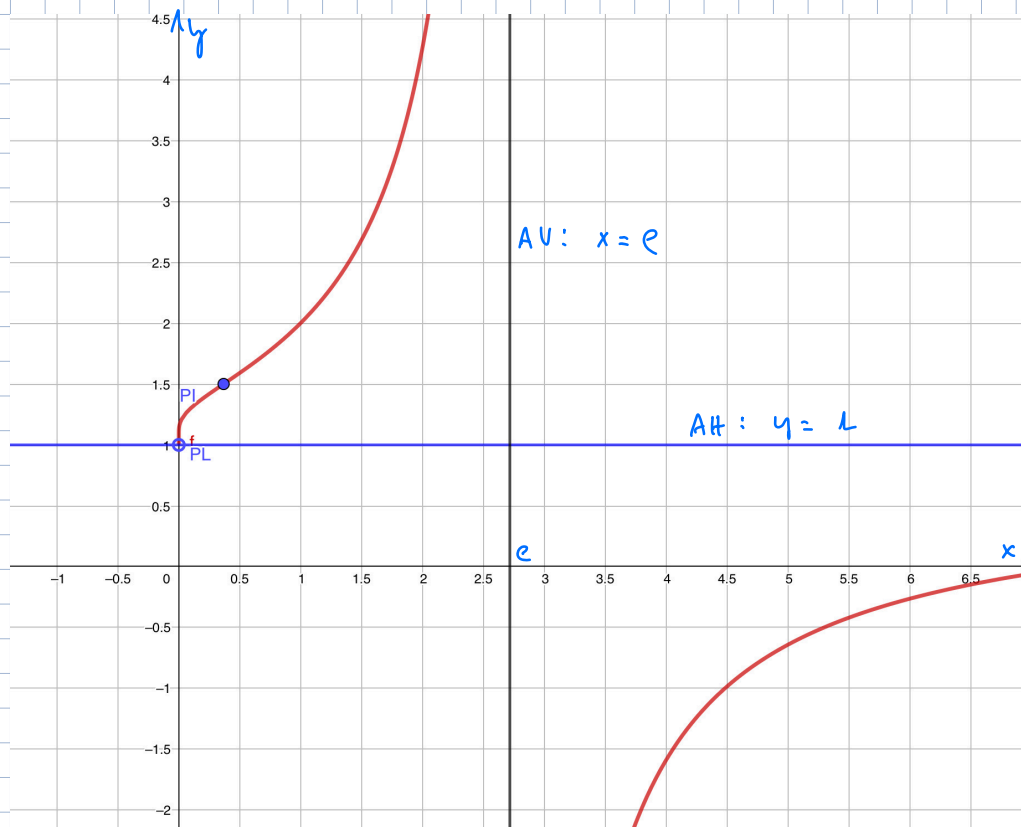
* concavité :

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{e}$	e	$+\infty$
$f''(x)$	///	-	0	+	-
$f(x)$	///	∩	PI	U	∩

$$PI : x = \frac{1}{e} \Rightarrow f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{e}\right) - 2}{\ln\left(\frac{1}{e}\right) - 1}$$

$$= \frac{\ln(e^{-1}) - 2}{\ln(e^{-1}) - 1} = \frac{-\ln(e) - 2}{-\ln(e) - 1}$$

$$= \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} \Rightarrow PI\left(\frac{1}{e} ; \frac{3}{2}\right)$$



$$f) f(x) = \ln(1+e^x) - x$$

* parité: ni paire, ni impaire

* Df = IR

* zéro: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(1+e^x) - x = 0 \Leftrightarrow \ln(1+e^x) = x$
 $\Leftrightarrow e^x = 1+e^x \Leftrightarrow 1=0$ impossible $\Rightarrow$ pas de zéro

* Tableau de signe:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		+

* Asymptotes:

- pas de AV

$$\begin{aligned} - \text{AH: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+e^x) - x = \ln(1+\underbrace{e^{-\infty}}_0) - (-\infty) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ pas de AH à gauche

ou:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^x) - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^x) - \ln(e^x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{BH}}{=}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{e^x}{e^x}\right) = \ln(1) \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{e^x} + 1\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1) = 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x} + 1\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1) = 0$$

$\Rightarrow$ AH: $y = 0$ quand $x \rightarrow +\infty$

$\frac{0}{0}$ - AO:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x) - x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} - 1$$

$$\Rightarrow m = \underbrace{\frac{\ln(1+e^{-\infty})}{-\infty}}_{\frac{0}{-\infty}} - 1 = -1$$

$$h = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(1+e^x) - x - (-1)x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(1+e^x) - x + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+e^x) = \ln(1+e^{-\infty})$$

$$= \ln(1) = 0$$

$$\Rightarrow \text{AO: } y = -x \text{ quand } x \rightarrow -\infty$$

$$\rightarrow \text{position: } \begin{cases} \delta(x) = f(x) - 0 & \text{quand } x \rightarrow +\infty \\ \delta(x) = f(x) - (-x) & \text{quand } x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \delta(x) = \begin{cases} \ln(1+e^x) - x & (\text{vers } x \rightarrow +\infty) \\ \ln(1+e^x) & (\text{vers } x \rightarrow -\infty) \end{cases}$$

* Étude de position:

pas de zéro pour $\delta(x)$ car $\delta(x) > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\delta(x)$		+
position		Dehors

* Extremums:

$$f'(x) = (\ln(1+e^x) - x)' = \frac{1}{1+e^x} (e^x) - 1 = \frac{e^x}{1+e^x} - 1$$

$$= \frac{e^x - 1(1+e^x)}{1+e^x} = \frac{e^x - 1 - e^x}{1+e^x} = \frac{-1}{1+e^x}$$

pas de zéros pour $f'(x)$ car $f'(x) < 0$

* Tableau de croissance:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	$\rightarrow 0$

* points d'inflexion :

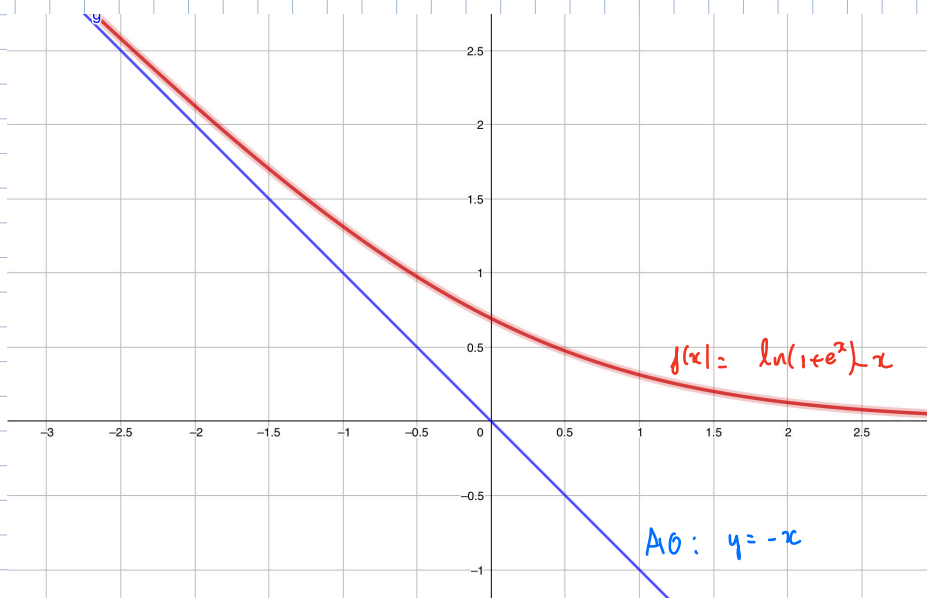
$$f''(x) = \left(\frac{-1}{1+e^x} \right)' = \frac{+1(e^x)}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

pas de zéro pour $f''(x)$ car $f''(x) > 0$

* Courbure :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f''(x)$		+
$f(x)$		U

=> pas de PI



1.1.15

23.21 Soit les courbes $\gamma_1 : y = e^{-x}$ et $\gamma_2 : y = e^{-x} \cos(x)$.

- Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes γ_1 et γ_2 sur $[-\pi; 3\pi]$.
- Prouver qu'en chacun de ces points, γ_1 et γ_2 sont tangentes.

a) $\gamma_1 \cap \gamma_2$ sur $[-\pi; 3\pi]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow e^{-x} &= e^{-x} \cos(x) \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x} - e^{-x} \cos(x) = 0 \\ \Rightarrow e^{-x} (1 - \cos(x)) &= 0 \quad \Rightarrow \cos(x) = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2\pi \end{cases} \quad \text{dans } [-\pi; 3\pi]$$

d'où 2 points d'intersection: $(0; 1)$ et $(2\pi; e^{-2\pi})$

b) $f(x) = e^{-x}$ et $g(x) = e^{-x} \cos(x)$
 $\Rightarrow f'(x) = -e^{-x}$ et $g'(x) = (e^{-x})' \cos(x) + e^{-x} (\cos(x))'$
 $= -e^{-x} \cos(x) + e^{-x} (-\sin(x))$
 $= -e^{-x} (\cos(x) + \sin(x))$

$$\Rightarrow f'(0) = -1 = g'(0)$$

$$\text{et } f'(2\pi) = -e^{-2\pi} = g'(2\pi)$$

D'où les tangentes aux points d'intersection sont de même pente

$\Rightarrow \gamma_1$ et γ_2 sont tangentes en leurs points d'intersection.

1.11.6

~~2.3.22~~ Déterminer l'équation de la tangente au graphe de $f(x) = 3^x$ en son point d'intersection avec l'axe Oy .

Intersection avec $Oy \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 3^0 = 1 \rightarrow T(0; 1)$

$$f(x) = 3^x = e^{\ln(3)x} \Rightarrow f'(x) = e^{\ln(3)x} \cdot (\ln(3)x)'$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3^x \ln(3) \Rightarrow f'(0) = \ln(3)$$

$$\Rightarrow (t): y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$y - 1 = \ln(3)(x - 0) \Rightarrow (t): y - 1 = \ln(3)x$$

$$\Rightarrow (t): \ln(3)x - y + 1 = 0$$

1.11.18

~~2.3.23~~ De l'origine, on mène la tangente à la courbe $y = \ln(x)$. Déterminer l'équation de cette tangente, ainsi que les coordonnées de son point de contact avec la courbe.

Rappel:

Équation de la tangente t à la courbe au point d'abscisse a :

$$T(a; f(a)) : y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

On pose $T(a; f(a))$

$$\bullet f(x) = \ln(x) \Rightarrow T \in f(x) \Rightarrow f(a) = \ln(a) \Rightarrow T(a; \ln(a))$$

$$\bullet f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{a} \Rightarrow (t): y - \ln(a) = \frac{1}{a}(x - a)$$

$$O(0; 0) \in (t) \Leftrightarrow 0 - \ln(a) = \frac{1}{a}(0 - a) \Leftrightarrow -\ln(a) = -1 \Leftrightarrow \ln(a) = 1$$

$$\Rightarrow a = e \Rightarrow (t): y - \ln(e) = \frac{1}{e}(x - e)$$

$$\Rightarrow y - 1 = \frac{1}{e}x - 1 \Leftrightarrow (t): ye - 1 = x - 1 \Leftrightarrow x - ye = 0$$

$$\text{et } T(e; 1)$$

118

~~1.1.18~~ Soit E et F les points d'inflexion de la courbe $y = \ln(x^2 + 1)$. On fait tourner le morceau de surface limité par le segment EF et la courbe autour de Oy . Calculer le volume du solide ainsi engendré.

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) \quad \Rightarrow \quad E \cap_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{(2x)'(x^2 + 1) - 2x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(x^2 + 1) - 2x(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

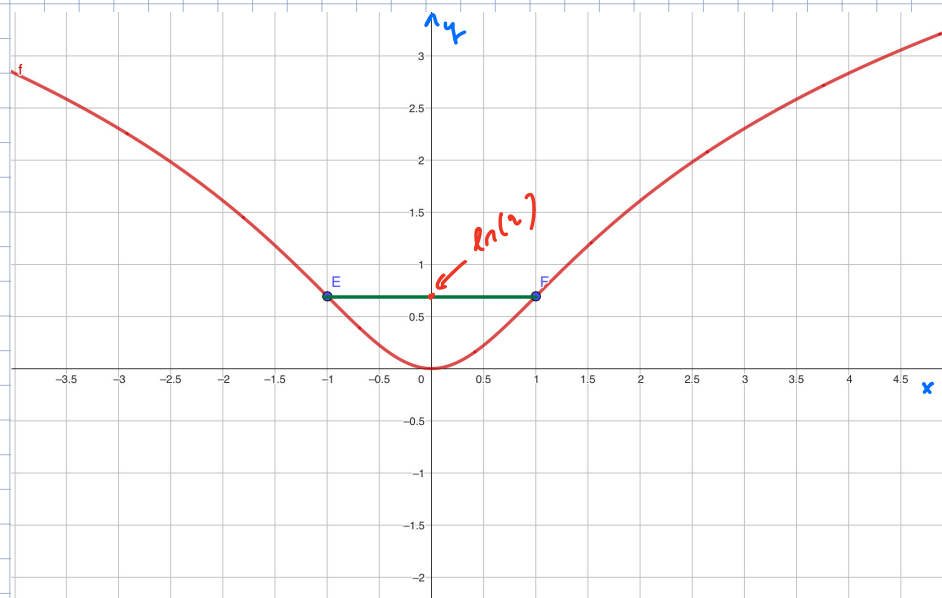
$$* \quad f''(x) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad 2(1 - x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$	$\cap$

$\uparrow$ PI_1 $\uparrow$ PI_2

points d'inflexion: $x = -1 \Rightarrow f(-1) = \ln(2) \Rightarrow PI_1(-1; \ln(2))$

$x = 1 \Rightarrow f(1) = \ln(2) \Rightarrow PI_2(1; \ln(2))$



$$y = \ln(x^2 + 1) \Rightarrow e^y = x^2 + 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{e^y - 1}$$

$$\begin{aligned} * \quad x = -1 \Rightarrow \sqrt{e^y - 1} = -1 \Rightarrow e^y - 1 = 1 \Rightarrow e^y = 2 \\ \Rightarrow y = \ln(2) \end{aligned}$$

$$* \quad x = 1 \Rightarrow y = \ln(2)$$

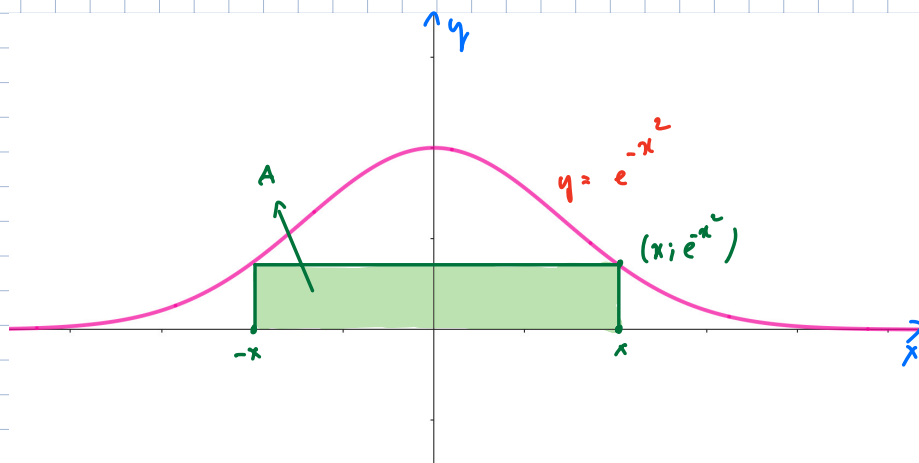
$$\Rightarrow V = \pi \int_0^{\ln(2)} (\sqrt{e^y - 1})^2 dy = \pi \int_0^{\ln(2)} (e^y - 1) dy$$

$$= \pi \int_0^{\ln(2)} e^y dy - \pi \int_0^{\ln(2)} 1 dy = \pi e^y \Big|_0^{\ln(2)} - \pi y \Big|_0^{\ln(2)}$$

$$\Rightarrow V = \pi (e^y - y) \Big|_0^{\ln(2)} = \pi (2 - \ln(2) - 1) = \pi (1 - \ln(2)) \text{ u}^3$$

1.1.19

~~23.25~~ Un rectangle $ABCD$ est tel que A et B sont sur Ox , alors que C et D sont sur la courbe $y = e^{-x^2}$. Calculer les coordonnées de ses sommets pour que son aire soit maximum.



La fonction $y = e^{-x^2}$ est paire, l'aire de $ABCD$ est illustrée comme ci-dessus.

$$\Rightarrow A(x) = 2x \cdot e^{-x^2} \quad \text{avec} \quad A(0) = 0 \quad \text{ED} = \mathbb{R}$$

$$\text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} A(x) = 0, \quad A'(x) = 2e^{-x^2} + 2x(-2x)e^{-x^2}$$

$$A'(x) = 2(1 - 2x^2)e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On garde la solution positive. Comme $A'(0) = 2 > 0$ et que $A'(\frac{\sqrt{2}}{2}) < 0$,

$$A \text{ est max pour } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ou :

$$A(x) = 2x e^{-x^2}, \quad \text{ED} = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow A'(x) = (2 - 4x^2)e^{-x^2} = 2(1 - 2x^2)e^{-x^2}$$

Tableau de croissance :

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$	
$A'(x)$		-	0	+	0	-
$A(x)$		$\searrow -\sqrt{\frac{2}{e}}$		$\nearrow \sqrt{\frac{2}{e}}$	$\searrow$	

$$\Rightarrow \text{Max} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; \sqrt{\frac{2}{e}} \right)$$

$$\Rightarrow A \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} ; 0 \right) , B \left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; 0 \right) , C \left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{e}}{e} \right) , D \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{e}}{e} \right)$$

1.1.20

~~23.27~~ Soit la fonction $f(x) = (x^2 + ax + b)e^x$. Déterminer a et b afin que le graphe de la fonction f soit tangent à l'axe Ox en $x = 1$.

$$f(x) = (x^2 + ax + b)e^x$$

$$f'(x) = (2x + a)e^x + (x^2 + ax + b)e^x$$

$$= e^x [2x + a + x^2 + ax + b]$$

$$= e^x [x^2 + x(2+a) + a+b]$$

" f tangent à l'axe Ox en $x = 1$ " $\Rightarrow f(1) = 0$

$\downarrow$
1 est un zéro de f

$$\Rightarrow (1 + a + b)e^1 = 0 \quad (\Rightarrow) \quad (a + b + 1)e = 0$$

$$\text{et } f'(1) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad e^1 [1 + 1(2+a) + a+b] = 0$$

$$(\Rightarrow) \quad e [1 + 2 + a + a + b] = 0$$

$$(\Rightarrow) \quad e [2a + b + 3] = 0$$

D'un système:

$$\begin{cases} (a + b + 1)e = 0 \\ (2a + b + 3)e = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} -a - b &= 1 \\ \underline{2a + b} &= -3 \\ a &= -2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b = 2 - 1 = 1$$

Donc

$$a = -2$$

$$b = 1$$

1.1.21

23.28 Soit les fonctions $f(x) = (x+1)e^{-x}$ et $g(x) = -e^x + a$. Déterminer a de sorte que les graphes de f et g se coupent en l'extremum de f .

$$f(x) = (x+1)e^{-x}$$

* $D_f = \mathbb{R}$

* $f'(x) = \left((x+1)e^{-x} \right)' = 1e^{-x} + (x+1)(e^{-x})'$

$$f'(x) = e^{-x} - e^{-x}(x+1) = \cancel{e^{-x}} - x\cancel{e^{-x}} - \cancel{e^{-x}} = -xe^{-x}$$

* zéro de $f'(x)$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -xe^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0$

* Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	
	$+$		$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 1$	$\searrow 0$

$\Rightarrow$ Max $(0; 1)$

f et g se coupent en l'extremum

$$\Rightarrow g(0) = 1 \Leftrightarrow -e^0 + a = 1$$

$$\Rightarrow a = e^0 + 1 = 2$$

Donc

$$a = 2$$

$$\Rightarrow g(x) = -e^x + 2$$

1.1.22 Déterminer les coordonnées d'un point P de la courbe $y = 2 \ln(x)$ ($x \geq 1$) de sorte que le triangle délimité par la normale en P à la courbe, la verticale passant par P et l'axe Ox soit d'aire maximale. Calculer cette aire.

$$f(x) = 2 \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x}$$

$$P \in f(x) \Rightarrow P(a; f(a)) \Rightarrow f(a) = 2 \ln(a) \Rightarrow P(a; 2 \ln(a))$$

$$\Rightarrow f'(a) = \frac{2}{a}$$

$$\Rightarrow \text{la normale : } (n): y = -\frac{a}{2}x + h \text{ et } P \in n \Rightarrow 2 \ln(a) = -\frac{a^2}{2} + h$$

$$\Rightarrow h = \frac{a^2}{2} + 2 \ln(a)$$

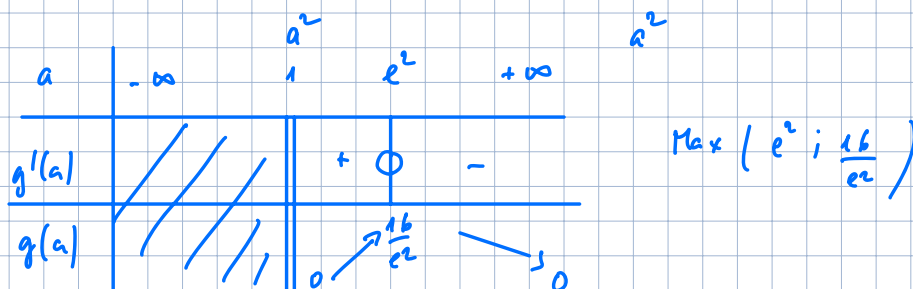
$$\text{donc } (n): y = -\frac{a}{2}x + \frac{a^2}{2} + 2 \ln(a)$$

$$* \text{ Zéros de } n : -\frac{a}{2}x + \frac{a^2}{2} + 2 \ln(a) = 0 \Rightarrow x = a + \frac{4 \ln(a)}{a}$$

$$* g(a) = \ln(a) \left(a + \frac{4 \ln(a)}{a} - a \right) = \ln(a) \left(\frac{4 \ln(a)}{a} \right) = \frac{4 \ln^2(a)}{a}$$

$$D_g = [1; +\infty[$$

$$\Rightarrow g'(a) = 8 \ln(a) - 4 \ln^2(a) = \frac{4 \ln(a)(2 - \ln(a))}{1}$$



$$\Rightarrow \text{Les coordonnées sont } P(e^2; 4) \text{ et } A = \frac{16}{e^2} \text{ u}^2$$

1.1.23

23.30 Considérons les fonctions $f(x) = (x-1)e^x$ et $g(x) = -e^{x-a} + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer a et b de telle manière que les graphes de f et g se coupent au point d'abscisse 1 à angle droit.

$$\begin{aligned} \Rightarrow f \cap g \text{ au point d'abscisse } 1 &\Rightarrow f(1) = (1-1)e^1 = 0 \\ &\Rightarrow g(1) = -e^{1-a} + b = 0 \end{aligned}$$

$$f'(x) = xe^x \Rightarrow f'(1) = e$$

$$g'(x) = -e^{x-a} \Rightarrow g'(1) = -e^{1-a}$$

$$\begin{aligned} \text{+ Angle droit} &\Rightarrow f'(1) \cdot g'(1) = -1 \\ &\Rightarrow e \cdot (-e^{1-a}) = -1 \\ &\Rightarrow -e \cdot e^{1-a} = -1 \Rightarrow e^{1+1-a} = 1 \\ &\Rightarrow e^{2-a} = 1 \Rightarrow e^{2-a} = e^0 \\ &\Rightarrow 2-a = 0 \Rightarrow a = 2 \end{aligned}$$

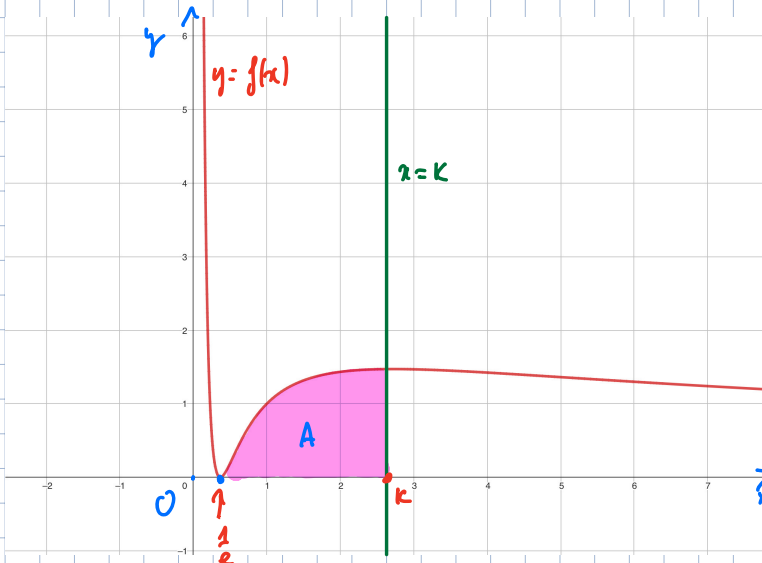
$$\Rightarrow -e^{-1} + b = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{e}$$

Donc $a = 2$, $b = \frac{1}{e}$

1.1.24 Soit la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{(1 + \ln(x))^2}{x}$$

Déterminer la valeur du nombre réel $k > 1$ pour laquelle l'aire de la région du plan comprise entre la courbe $y = f(x)$ et les droites $x = k$ et $y = 0$ soit égale à $8/3$.



$$* \text{ED}_f = \mathbb{R}_+^*$$

on cherche les zéros de $f(x)$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(1 + \ln(x))^2}{x} = 0$

$\Leftrightarrow 1 + \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$

$$A = \int_{\frac{1}{e}}^k f(x) dx = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{e}}^k \frac{(1 + \ln(x))^2}{x} dx = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{e}}^k \underbrace{(1 + \ln(x))^2}_{u(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'(x)} dx = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} (1 + \ln(x))^3 \Big|_{\frac{1}{e}}^k = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} (1 + \ln(k))^3 - \frac{1}{3} (1 + \ln(\frac{1}{e}))^3 = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \left(1 + \ln(k) \right)^3 - \frac{1}{3} \left(1 + \ln(e^{-1}) \right)^3 = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \left(1 + \ln(k) \right)^3 - \frac{1}{3} \left(1 - \underbrace{\ln(e)}_1 \right)^3 = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \left(1 + \ln(k) \right)^3 - \frac{1}{3} (1 - 1)^3 = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} \left(1 + \ln(k) \right)^3 = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \ln(k) \right)^3 = 2^3 \quad \Rightarrow \quad 1 + \ln(k) = 2$$

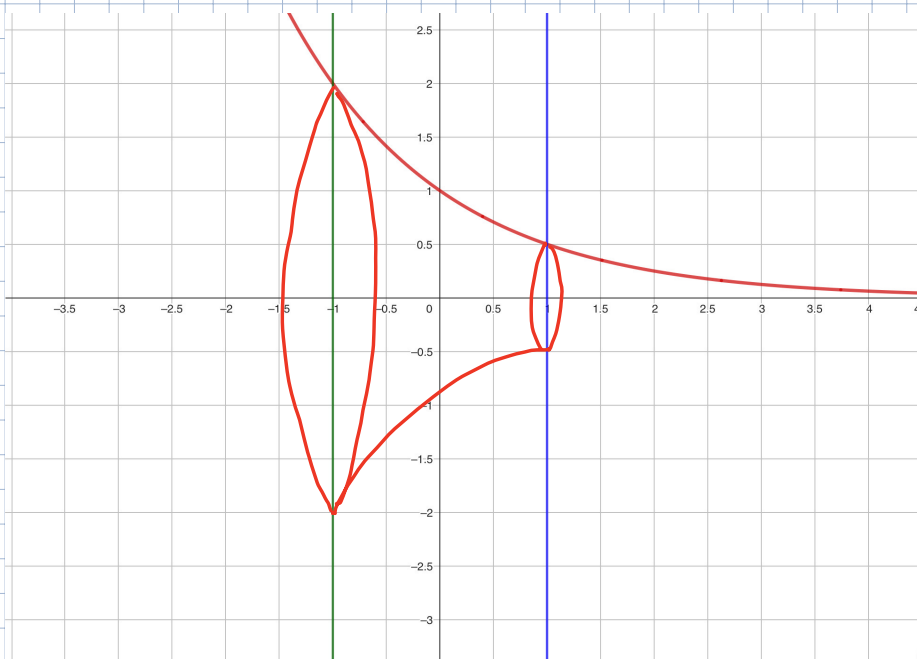
$\uparrow$
 $k > 1$

$$\Rightarrow \ln(k) = 1 \quad \Rightarrow \quad k = e$$

Donc $k = e$

1.1.25
23.32 On fait tourner autour de l'axe Ox la surface située sous la courbe $y = 2^{-x}$ et comprise entre les droites $x = -1$ et $x = 1$. Calculer le volume du solide ainsi engendré.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^{-\ln(2)x} \Rightarrow f^2(x) = e^{-2\ln(2)x} \\
 \Rightarrow V &= \pi \int_{-1}^1 e^{-2\ln(2)x} dx = -\pi \frac{e^{-2\ln(2)x}}{2\ln(2)} \Big|_{-1}^1 \\
 &= -\frac{\pi}{2\ln(2)} \left(\frac{1}{4} - 4 \right) = \frac{15\pi}{8\ln(2)}
 \end{aligned}$$



1.1.26

~~23.33~~ Sous quel angle les courbes $y = e^{x+2}$ et $y = e^{-x}$ se coupent-elles ?

$$\Rightarrow \text{Intersection: } e^{x+2} = e^{-x} \quad (\Leftrightarrow) \quad x+2 = -x \quad \Rightarrow x = -1$$

$$\Rightarrow y = e^{-1+2} = e^1 = e$$

$$\Rightarrow \Sigma(-1; e)$$

$$f(x) = e^{x+2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{x+2}$$

$$g(x) = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}$$

$$\Rightarrow m_1 = f'(-1) = e^1 = e$$

$$\Rightarrow m_2 = g'(-1) = -e^1 = -e$$

$$\text{Donc } \tan(\varphi) = \left| \frac{-e - e}{1 + e(-e)} \right| = \left| \frac{-2e}{1 - e^2} \right| = \left| \frac{2e}{1 - e^2} \right|$$

$$\Rightarrow \varphi \approx 40,40^\circ$$

1.1.27 Une étude a montré que l'indice de satisfaction (sur une échelle de 1 à 10) des clients abonnés à un service Internet était donné par la fonction s définie par

$$s(t) = \frac{20 \ln(t+1) + t}{t+1} \quad t \geq 1$$

où t représente le nombre de mois écoulés depuis le début de l'abonnement (cette fonction n'est valable qu'à partir de la fin du 1^{er} mois).

- Quel est l'indice de satisfaction après 5 mois d'abonnement (réponse à deux décimales) ?
- Si l'abonnement est conclu le 1^{er} janvier, au cours de quel mois l'indice de satisfaction est-il maximal ?
- Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t)$.

$$a) \quad t = 5 \Rightarrow s(5) = \frac{20 \ln(5+1) + 5}{5+1} = \frac{20 \ln(6) + 5}{6} \approx 6.81$$

$$b) \quad s'(t) = \left(\frac{20 \ln(t+1) + t}{t+1} \right)' = \frac{(20 \ln(t+1) + t)'(t+1) - (20 \ln(t+1) + t)(t+1)'}{(t+1)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{20}{t+1} + 1 \right)(t+1) - (20 \ln(t+1) + t) \cdot 1}{(t+1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{\frac{20(t+1)}{t+1}} + 1 \cdot (t+1) - 20 \ln(t+1) - t}{(t+1)^2}$$

$$= \frac{20 + \cancel{t+1} - 20 \ln(t+1) - \cancel{t}}{(t+1)^2} = \frac{21 - 20 \ln(t+1)}{(t+1)^2}$$

$$\Rightarrow s'(t) = 0 \Rightarrow \frac{21 - 20 \ln(t+1)}{(t+1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 21 - 20 \ln(t+1) = 0 \Rightarrow 21 = 20 \ln(t+1)$$

$$\Rightarrow \ln(t+1) = \frac{21}{20} \Rightarrow t+1 = e^{\frac{21}{20}} \Rightarrow t = e^{\frac{21}{20}} - 1$$

$$\Rightarrow t \approx 1,86$$

* Tableau de croissance :

$$s'(t) = \frac{21 - 20 \ln(t+1)}{(t+1)^2}$$

t	1	$e^{\frac{21}{20}} - 1$	$+\infty$
$s'(t)$	///	+	0
$s(t)$	///	→ Max	→

$$\text{Max: } s(e^{\frac{21}{20}} - 1) = ?$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow s(e^{\frac{21}{20}} - 1) &= \frac{20 \ln(e^{\frac{21}{20}} - 1 + 1) + e^{\frac{21}{20}} - 1}{e^{\frac{21}{20}} - 1 + 1} \\ &= \frac{20 \cdot \frac{21}{20} + e^{\frac{21}{20}} - 1}{e^{\frac{21}{20}}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow s(e^{\frac{21}{20}} - 1) = \frac{21 + e^{\frac{21}{20}} - 1}{e^{\frac{21}{20}}} = \frac{20 + e^{\frac{21}{20}}}{e^{\frac{21}{20}}} \approx 8$$

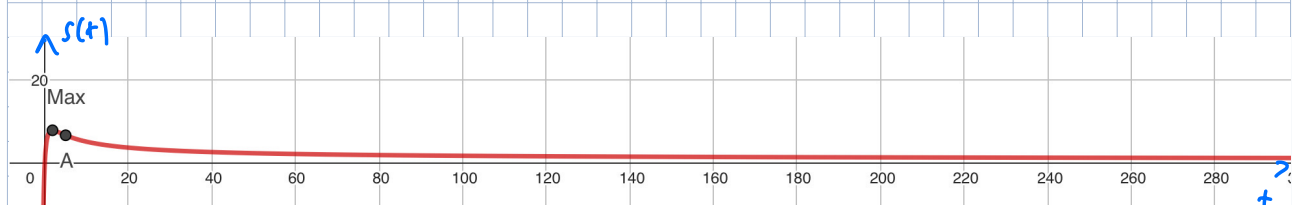
21. Au cours de février l'indice de satisfaction est maximal (= 8/10)

$$c) \lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{20 \ln(t+1) + t}{t+1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty} \text{ k}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(20 \ln(t+1) + t)'}{(t+1)'}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{20}{t+1} + 1}{1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{20}{t+1} + 1 = 1$$

$\downarrow$
 0

$$= 1 \quad \boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = 1}$$



1.1.28 Dans une école, une étude a montré que le degré d'intérêt (sur une échelle de 1 à 10) des élèves au cours d'une leçon de 45 minutes est donné par la fonction d définie par

facile
2m

$$d(t) = \frac{t \cdot e^{-\frac{t}{30}} + 2}{2}$$

où t représente le nombre de minutes écoulées depuis le début de la leçon.

- Quel est le degré de motivation des élèves en entrant en classe ?
- Quel est le degré de motivation des élèves après 20 minutes en classe ?
- Après combien de minutes le degré maximal est-il atteint ? Donner sa valeur maximale.

a) "en rentrant en classe" $\rightarrow t = 0$

$$\Rightarrow d(0) = \frac{0 \cdot e^{-\frac{0}{30}} + 2}{2} = \frac{0 + 2}{2} = 1$$

b) $t = 20 \text{ mn} \Rightarrow d(20) = \frac{20 \cdot e^{-\frac{20}{30}} + 2}{2} = \frac{20 \cdot e^{-\frac{2}{3}} + 2}{2}$

$$\Rightarrow d(20) = 10 \cdot e^{-\frac{2}{3}} + 1 \approx 6,13$$

c) $ED(d) = [0; 45]$ $\leftarrow$ cours de 45 mn $\rightarrow 0 \text{ mn} \leq 45 \text{ mn}$

$$d'(t) = \frac{(t \cdot e^{-\frac{t}{30}} + 2)' \cdot 2 + (t \cdot e^{-\frac{t}{30}} + 2) \cdot (2)'}{4}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{30}} + \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{30}\right) \cdot e^{-\frac{t}{30}} = -\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{30}} \left(\frac{t}{30} - 1\right)$$

$$d'(t) = 0 \Rightarrow \frac{t}{30} - 1 = 0 \Rightarrow t = 30$$

$$d(30) = \frac{30 \cdot e^{-\frac{30}{30}} + 2}{2} = \frac{15 + 2}{2} = \frac{17}{2}$$

$$\Rightarrow d(30) \approx 8,5$$

$\Rightarrow$ après 30 mn, le degré est maximal et vaut environ 8,5

t	0	30	45
$d'(t)$		+	-
$d(t)$		Max	

fascicule 21

1.1.29 La taille d'un arbre est souvent décrite par un modèle logistique. Supposons que la hauteur h (en mètres) d'un arbre de t années est donnée par la relation

$$h = \frac{40}{1 + 200 e^{-0,2t}}$$

- a) Quelle est la hauteur d'un arbre vieux de 30 ans?
- b) A quel âge l'arbre aura-t-il une hauteur de 16m?
- c) Quelle hauteur maximale l'arbre peut-il atteindre?

$$a) \quad h(30) = \frac{40}{1 + 200 e^{-0,2 \cdot 30}} \approx 26,74$$

$\Rightarrow$ un arbre de 30 ans mesure environ 26,74 m

$$b) \quad h = 16 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad 16 = \frac{40}{1 + 200 e^{-0,2t}}$$

$$\Rightarrow 16(1 + 200 e^{-0,2t}) = 40$$

$$\Rightarrow 16 + 3200 e^{-0,2t} = 40$$

$$\Rightarrow 3200 e^{-0,2t} = 24 \quad (\Rightarrow e^{-0,2t} = \frac{24}{3200} = \frac{3}{400})$$

$$\Rightarrow t = -5 \ln\left(\frac{3}{400}\right) \approx 24,46$$

Après 24 ans et demi, l'arbre mesurera 16 m

$$c) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{40}{1 + 200 e^{-0,2t}} = \frac{40}{1} = 40$$

$\underbrace{200 e^{-0,2t}}_{\rightarrow 0}$

La hauteur maximale qu'un arbre peut atteindre est de 40 m