26/2/25

Analyse combinatoire

Exercices supplémentaires

Exercices

1. Combien peut-on former de mots avec les lettres du mot FACULTÉ, s'ils doivent commencer par t et se terminer par une voyelle ?

2. Combien peut-on former de mots avec les lettres du mot COMPRIS, s'ils doivent commencer par i et se terminer par une consonne ?

3. On désire que 5 hommes et 4 femmes s'assoient sur un bac de telle manière que les femmes occupent les places paires. Combien de possibilités y a-t-il ?

4. Un manufacturier confectionne des chemises de 12 couleurs, chaque couleurs en 8 pointures de col et chaque pointure de col en 3 longueurs de manches. Combien de chemises différentes confectionnent-ils ?

5. Dans un magasin, les clients ont le choix de payer à différentes caisses. De combien de façons différentes peuvent se répartir :
   i) 5 clients à 3 caisses ?
   ii) 2 clients à 6 caisses ?

6. Sur un trajet d'un train, il y a 10 gares. On imprime un billet différent selon l'endroit où l'on prend le train et selon l'endroit où l'on projette de se rendre. Combien de sortes de billets doit-on faire imprimer si l'on considère aussi bien les voyages dans une direction que dans l'autre ?

7. Une ligue de football comprend 6 équipes. Combien de parties doivent se jouer dans une saison si chacune des équipes rencontre l'autre une fois à domicile ?

8. Huit nouveaux professeurs vont être envoyés dans 4 gymnases (les professeurs et les gymnases sont discernables).
   i) Combien y a-t-il d'affectations possibles ?
   ii) Qu'en est-il si l'on impose que chaque école recevra deux professeurs ?

9. Une classe du gymnase de Burier a reçu 4 billets pour le cirque Knie. Sachant que cette classe est composée de 19 élèves, calculer le nombre de façons de distribuer ces 4 billets dans chacun des cas suivants :
   i) les billets sont numérotés et chaque élève ne peut recevoir qu'un seul billet ;

ii) les billets sont numérotés et chaque élève peut recevoir plusieurs billet ;

iii) les billets ne sont pas numérotés et chaque élève ne peut recevoir qu'un seul billet.

10. Un professeur a onze amis très proches. Il souhaite en inviter cinq à dîner.

    i) Combien de groupes différents d'invités y a-t-il ?

    ii) Combien de possibilités y a-t-il si deux d'entre eux sont mariés et ne peuvent venir qu'ensemble ?

    iii) Combien de possibilités y a-t-il si deux d'entre eux sont en mauvais terme et ne peuvent pas être invités ensemble ?

11. Il y a quelques années, chaque classe de gymnase devait avoir une délégation de trois élèves (un laveur de tableaux, un chef et un secrétaire). Une classe est composée de 11 filles et 3 garçons.

    i) Combien y a-t-il de délégations possibles ?

    ii) Combien y a-t-il de délégations si le laveur de tableaux doit être un garçon ?

    iii) Combien y a-t-il de délégations possibles si les deux sexes doivent être présents dans la délégation ?

    iv) Voilà une variante du problème : supposons que chacun des délégués doit avoir un suppléant. Combien y a-t-il de délégations possibles si le délégué et le suppléant doivent être de sexe différent ?

12. La façade d'une maison compte 8 fenêtres, ces fenêtres peuvent être soit ouvertes soit fermées.

    i) De combien de manières différentes peut se présenter cette façade ?

    ii) Même question si on considère que chaque fenêtre a deux battants ?

    iii) Qu'en est-il si la première fenêtre est toujours ouverte et la 6 toujours fermée (fenêtres complètes, on n'oublie les battants).

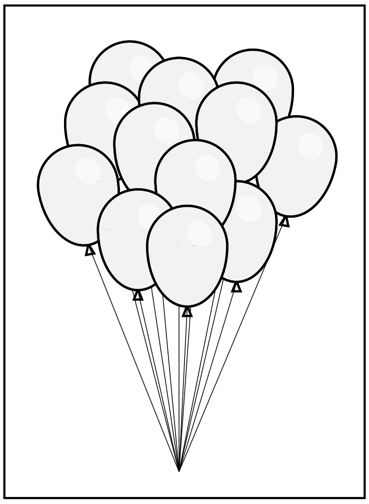
13. **(Burier 3M 6/2021)**

Cette année, l'affiche de la fête des couleurs sera une grappe de douze ballons colorés. Il y aura quatre ballons rouges, trois jaunes, trois bleus et deux verts. Un groupe de trois enfants doit colorier cette affiche.

i) Le premier enfant choisit trois ballons qu'il colorie en bleu. 220
Combien de possibilités a-t-il de les choisir ?

ii) Le deuxième enfant choisit, parmi les neuf ballons restants, trois ballons qu'il colorie, l'un en rouge, l'autre en jaune et le dernier en vert. 504
Combien de possibilités a-t-il de les choisir ?

iii) Le troisième enfant colorie les six ballons restants en respectant le solde des couleurs, c'est-à-dire trois rouges, deux jaunes et un vert. 60
Combien de possibilités a-t-il de les colorier ?



14. **(Burier 3C 6/2024)**

Un bateau de croisière peut accueillir 40 passagers, sans compter les membres de l'équipage. Parmi les passagers, il y a 22 femmes et 18 hommes, et plusieurs nationalités sont représentées : on compte 14 suisses, 12 allemands, 9 belges, et 5 hollandais.

a) Pour prendre les repas, les touristes ont 5 tables à disposition, chacune pouvant accueillir 8 personnes. On suppose que tous les voyageurs prennent leurs repas.

   1) De combien de manières différentes peut-on former un premier groupe de 8 personnes pour occuper une table ? 76'904'685

   2) On forme 5 groupes de 8 personnes. De combien de façons différentes peut-on attribuer une table à chacun des groupes ? 120

b) Au cours d'une croisière, le bateau s'arrête dans différents ports. Des excursions sont alors organisées pour les voyageurs.

   22'383'900

   1) De combien de manières différentes peut-on choisir 8 personnes pour une première excursion si l'on veut qu'il y ait autant de femmes que d'hommes ?

   $\approx 7.19 \cdot 10^{12}$

   2) La deuxième excursion se fait sur une longue pirogue pouvant accueillir 13 passagers assis les uns derrière les autres.
   On décide de répartir les places sur la pirogue en fonction des nationalités : d'abord 5 suisses, puis 3 belges, puis 4 allemands, et 1 hollandais à la dernière place.
   De combien de manières différentes peut-on remplir cette pirogue ?

   20'826

   3) Les 27 touristes qui ne sont pas partis lors de la deuxième excursion sont restés sur le bateau. Le capitaine du bateau organise alors un jeu pour 7 personnes, mais exige qu'au moins 5 suisses y participent.
   Combien de façons différentes existe-t-il de former un tel groupe de 7 personnes ?

15. **(Inspiration - Cité 3M 6/2023)**

La table ronde du Roi Arthur comporte le trône du roi et 12 sièges. Elle peut accueillir jusqu'à 12 chevaliers en plus du roi. Le roi est toujours assis sur son trône. Il a écrit sur 12 parchemins des quêtes différentes pour ses chevalliers.

i) Combien y a-t-il de façons d'asseoir les 12 chevaliers autours de la table ?

ii) Combien y a-t-il de façons de répartir les 12 parchemins et les 12 chevaliers autours de la table si chaque chevalier se voit attribuer un parchemin ?

iii) Si 6 chevaliers sont absents, combien y a-t-il de façons de répartir les 12 parchemins, de sorte que chaque chevalier présent reçoive 2 parchemins ?

iv) Si 3 chevaliers sont absents, combien y a-t-il de façons d'asseoir les chevaliers présents autour de la table, de sorte que Simonval et Mahédoc soient assis côte à côte ?

v) Si 3 chevaliers sont absents, combien y a-t-il de façons d'asseoir les chevaliers présents autour de la table, de sorte qu'il n'y ait pas trois sièges vides à la suite ?

CORRIGÉ

1) FACULTÉ → 7 lettres : 3 voyelles a, e et u

$$\underline{1}\quad \underline{5}\quad \underline{4}\quad \underline{3}\quad \underline{2}\quad \underline{1}\quad \underline{3}$$

commencer par t — terminer par une voyelle

$\Rightarrow \quad 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 1 \cdot 5! \cdot 3 = \boxed{360 \text{ mots}}$

2) COMPRIS → 7 lettres : 2 voyelles et 5 consonnes

$$\underline{1}\quad \underline{5}\quad \underline{4}\quad \underline{3}\quad \underline{2}\quad \underline{1}\quad \underline{5}$$

commencer par i — terminer par une consonne

$\Rightarrow \quad 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 = 1 \cdot 5! \cdot 5 = \boxed{600 \text{ mots}}$

3) 5 H + 4 F → 9

$$\underline{5}\quad \underline{4}\quad \underline{4}\quad \underline{3}\quad \underline{3}\quad \underline{2}\quad \underline{2}\quad \underline{1}\quad \underline{1}$$

paire paire paire paire

H F H F H F H F H

$\Rightarrow \quad 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 5! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!\,4! = \boxed{2880}$

4)

$$\underset{C}{\underline{12}}\quad \underset{P}{\underline{8}}\quad \underset{L}{\underline{3}}$$

C : couleur

P : pointure de col

L : Longueur de manches

$\Rightarrow \quad 12 \cdot 8 \cdot 3 = \boxed{288 \text{ chemises}}$

5) i) 5 clients à 3 caisses

caisse	3	3	3	3	3
	client	client	client	client	client

$\Rightarrow 3^5 = \boxed{243 \text{ façons}}$

ii) 2 clients à 6 caisses

caisse	6	6
	client	client

$\Rightarrow 6 \cdot 6 = 6^2 = \boxed{36 \text{ façons}}$

6)

10	9
Gare de départ	Gare d'arrivée

$\Rightarrow 10 \cdot 9 = \boxed{90 \text{ sortes de billets}}$

7)

6	5
D	Ext

$\Rightarrow 6 \cdot 5 = \boxed{30 \text{ parties}}$

D : domicile

Ext : extérieur

8) 8 Prof $\to$ 4 Gymnases

i)

Gymnase	4	4	. . .	4	4
	Prof 1	Prof 2		Prof 7	Prof 8

$\Rightarrow 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^8$

$= \boxed{65\,536 \text{ d'affectations}}$

ii) Pour le premier gymnase, on peut choisir 2 prof parmi 8 $\Rightarrow C^8_2$

$\Rightarrow$ pour le $2^e \Rightarrow C^6_2$, $3^e \Rightarrow C^4_2$ et pour $4^e \Rightarrow C^2_2$ $\Rightarrow C^8_2 \cdot C^6_2 \cdot C^4_2 \cdot C^2_2$

$\boxed{= 2520}$

9) 4 billets , 19 élèves

i)

E $\underset{B1}{\underline{19}}$ $\underset{B2}{\underline{18}}$ $\underset{B3}{\underline{17}}$ $\underset{B4}{\underline{16}}$ $\Rightarrow 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = A_4^{19} \boxed{= 93024}$

ii)

E $\underset{B1}{\underline{19}}$ $\underset{B2}{\underline{19}}$ $\underset{B3}{\underline{19}}$ $\underset{B4}{\underline{19}}$ $\Rightarrow 19 \cdot 19 \cdot 19 \cdot 19 = \bar{A}_4^{19} = \boxed{130\,321}$

iii) $C_4^{19} = \boxed{3876}$

* Remarques :

i) Il est plus simple de s'imaginer que chaque billet peut "choisir" un élève, mathématiquement parlant c'est identique. Le premier billet peut choisir entre 19 élèves, le deuxième billet entre 18 et ainsi de suite ..

iii) Ne pouvant pas distinguer les billets, il suffit de choisir un groupe de quatre élèves parmi les dix-neuf de la classe et leur donner à chacun n'importe lequel des billets "identiques" $\Rightarrow C_4^{19}$

10) 1 professeur $\rightarrow$ 11 amis

i) $C_5^{11} = \boxed{462}$

ii) • 2 mariés et 3 autres parmi 9

$C_2^2 \cdot C_3^9 = 1 \cdot 84 = 84$

ou

• 2 mariés ne sont pas invités et 5 autres parmi 9

$C_0^2 \cdot C_5^9 = 126$

Tot $= 84 + 126$

$= \boxed{210}$

iii) • 1 parmi 2 en mauvais terme et 4 autres parmi 9

$C^2_1 \cdot C^9_4$

ou

• 0 parmi 2 en mauvais terme et 5 autres parmi 9

$C^2_0 \cdot C^9_5$

$\Rightarrow \text{Tot} = C^2_1 \, C^9_4 + C^2_0 \cdot C^9_5 = 2 \cdot 126 + 1 \cdot 126 = \boxed{378}$

11) 11 F + 3 G = 14 → L, C, S

i) ordre compte → $A^{14}_3 = \boxed{2184}$

ou $\underset{L}{\underline{14}} \quad \underset{C}{\underline{13}} \quad \underset{S}{\underline{12}} \Rightarrow 14 \cdot 13 \cdot 12 = \boxed{2184}$

ii) 3 G → 1 Laveur → C^3_1

et 2 autres parmi 13, ordre compte (C et S) : A^{13}_2

$\Rightarrow C^3_1 \cdot A^{13}_2 = 3 \cdot 156 = \boxed{468}$

ou $\underbrace{\text{1 G parmi 3}}_{C^3_1}$ et $\underbrace{\text{2 personnes parmi 13 pour les deux postes restants en permutant les rôles}}_{C^{13}_2 \cdot 2!}$

$C^3_1 \cdot C^{13}_2 \cdot 2! = 3 \cdot 78 \cdot 2! = 468$

ou $\underset{L}{\underline{3}} \quad \underset{C}{\underline{13}} \quad \underset{S}{\underline{12}} \Rightarrow 3 \cdot 13 \cdot 12 = 3 \cdot A^{13}_2 = \boxed{468}$

iii) $C_3^{14} \cdot 3! - C_3^{3} \cdot 3! - C_3^{11} \cdot 3!$

$364 \cdot 6 - 1 \cdot 6 - 165 \cdot 6 = \boxed{1188}$

ou $A_3^{14} - A_3^{11} - A_3^{3} = 2184 - 990 - 6 = \boxed{1188}$

ou

$\underset{F}{\underline{11}} \quad \underset{F}{\underline{10}} \quad \underset{G}{\underline{3}} \qquad C_2^3 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 3 \cdot = 3 \cdot 330 = 990$

$\underset{G}{\underline{3}} \quad \underset{G}{\underline{2}} \quad \underset{F}{\underline{11}} \qquad C_2^3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 11 = 3 \cdot \cdot 3 \cdot 2 \cdot 11 = 198$

$\Rightarrow$ Tot : $990 + 198 = \boxed{1188}$

1 F et 1 G et 1 G : $A_1^{11} \cdot A_1^{3} \cdot A_1^{2} = 11 \cdot 3 \cdot 2 = 66$
L C S

ou 1 F et 1 F et 1 G : $A_1^{11} \cdot A_1^{10} \cdot A_1^{3} = 11 \cdot 10 \cdot 3 = 330$
L C S

ou 1 G et 1 G et 1 F : $A_1^{3} \cdot A_1^{2} \cdot A_1^{11} = 3 \cdot 2 \cdot 11 = 66$

ou 1 G et 1 F et 1 F : $A_1^{3} \cdot A_1^{11} \cdot A_1^{10} = 3 \cdot 11 \cdot 10 = 330$

ou 1 G et 1 F et 1 G : $A_1^{3} \cdot A_1^{11} \cdot A_1^{2} = 3 \cdot 11 \cdot 2 = 66$

ou 1 F et 1 G et 1 F : $A_1^{11} \cdot A_1^{3} \cdot A_1^{10} = 11 \cdot 3 \cdot 10 = 330$

$\Rightarrow$ Tot $= 66 + 330 + 66 + 330 + 66 + 330 = \boxed{1188}$

iv) $C_2^{14} = 91$ couples

couples F : $C_2^{11} = 55$

couples G : $C_2^{3} = 3$

$\Rightarrow$ couples mixtes : $91 - 55 - 3 = \underline{33}$

$\Rightarrow$ choisir 3 couples mixtes parmi 33 $\Rightarrow C_3^{33} = 5456$

2	2	2
Couple 1	Couple 2	Couple 3

$\Rightarrow C_3^{33} \cdot 2^3 \cdot P_3 =$

12) i)

2	2	2	2	2	2	2	2
F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8

$\Rightarrow 2^8 = \boxed{256}$

ii)

4	4	4	4	4	4	4	4
F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8

$\Rightarrow 4^8 = \boxed{65536}$

iii)

1	2	2	2	2	1	2	2
F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8

$\Rightarrow 1 \cdot 1 \cdot 2^6 = \boxed{64}$

13) $4R + 3J + 3B + 2V \Rightarrow 12$ ballons   colorier

i) Choix non ordonné de 3 ballons parmi 12

$$C^{12}_3 = \boxed{220 \text{ possibilités}}$$

ii) Choix ordonné de 3 ballons parmi 9

$$A^9_3 = \boxed{504 \text{ possibilités}}$$

iii) Permutation de 6 ballons avec répétition de 3 ballons R et deux Jaunes :

$$\bar{P}_6(3;2) = \frac{6!}{3!\,2!} = \boxed{60 \text{ possibilités}}$$

14) 40 passagers : 22 F + 18 H

14 S   12 All   9 B   5 Ito

a)

1) $C^{40}_8 = \boxed{76'904'685 \text{ manières différentes}}$

2) $P_5 = 5! = \boxed{120 \text{ manières différentes}}$

b) 1) $C^{22}_4 \cdot C^{18}_4 = \boxed{22'383'900 \text{ résultats possibles}}$

2) $C^{14}_5 \cdot C^9_3 \cdot C^{12}_4 \cdot C^5_1 \cdot P_5 \cdot P_3 \cdot P_4 = A^{14}_5 \cdot A^9_3 \cdot A^{12}_4 \cdot A^5_1 \cong \boxed{7{,}19 \cdot 10^{12}}$

3) 7 Suisses : C^9_7
6 Suisses : $C^9_6 \cdot C^{18}_1$
5 Suisses : $C^9_5 \cdot C^{18}_2$

$\Rightarrow C^9_7 + C^9_6 \cdot C^{18}_1 + C^9_5 \cdot C^{18}_2 = \boxed{20'826}$

15)

i) Le premier chevalier a 12 façons de s'asseoir, le second en aura 11, puis 10, d'où $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdots 1 = 12!$

$$= P_{12} = 12! = \boxed{479'001'600 \text{ façons}}$$

ii) Le premier chevalier a 12 façons de choisir un parchemin et 12 façon de s'asseoir avec autour de la table.

Le second en aura 11 façons de choisir son parchemin et 11 façons de s'asseoir autour de la table, ...

D'où $12 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 11 \cdots 1 \cdot 1 = \boxed{(12!)(12!)}$

$= (12!)^2$ façons de répartir les parchemins et les chevaliers autour de la table

iii) Le nombre de façon est donné par :

$$\underbrace{C_2^{12}}_{\substack{\text{façon de choisir} \\ \text{2 parchemins} \\ \text{parmi 12}}} \cdot \underbrace{C_2^{10}}_{\substack{\text{façon de choisir} \\ \text{2 parchemins} \\ \text{parmi 10} \\ \text{restants}}} \cdot \underbrace{C_2^{8}}_{\substack{\text{façon de choisir} \\ \text{2 parchemins} \\ \text{parmi 8} \\ \text{restants}}} \cdot \underbrace{C_2^{6}}_{\substack{\text{façon de choisir} \\ \text{2 parchemins} \\ \text{parmi 6} \\ \text{restants}}} \cdot \underbrace{C_2^{4}}_{\substack{\text{façon de choisir} \\ \text{2 parchemins} \\ \text{parmi 4} \\ \text{restants}}} \cdot \underbrace{C_2^{2}}_{\substack{\text{façon de choisir} \\ \text{2 parchemins} \\ \text{parmi 2} \\ \text{restants}}}$$

$$= \boxed{7'484'400}$$

iv) Le nombre de façons est donné par :

$$\underbrace{2}_{\substack{\text{nombre de} \\ \text{permutations de} \\ \text{Simonval et Malédoc} \\ \text{entre eux}}} \cdot \underbrace{11}_{\substack{\text{nombre de façon} \\ \text{de disposer Simonval} \\ \text{et Malédoc côte-à-côte} \\ \text{à table}}} \cdot \underbrace{A_7^{10}}_{\substack{\text{nombre de façons} \\ \text{d'arranger les 7} \\ \text{chevaliers restants} \\ \text{sur les 10 places restantes}}} = \boxed{13'305'600}$$

v) Le nombre de façons d'asseoir les chevaliers autour de la table de sorte qu'il y ait 3 sièges vides côte-à-côte est donné par

$$\underbrace{10}_{\text{nombre de façons d'avoir 3 sièges vides côte-à-côte}} \cdot \underbrace{9!}_{\text{nombre de façons de disposer les 9 chevaliers sur les 9 sièges restants}}$$

Ainsi, par complémentarité, le nombre de façons d'asseoir les chevaliers autour de la table de sorte qu'il n'y ait pas 3 sièges vides côte-à-côte est donné par :

$$\underbrace{A_9^{12}}_{\text{nombre de façons de placer 9 chevaliers sur 12 sièges libres}} - \underbrace{10 \cdot 9!}_{\text{nombre de façons d'asseoir les chevaliers de sorte qu'il y ait 3 sièges vides côte-à-côte}} = \boxed{76'204'800}$$