# Aires et volumes

**1.3.16** Calculer l'aire du domaine limité par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe $Ox$ et les droites $x = a$, et $x = b$ :

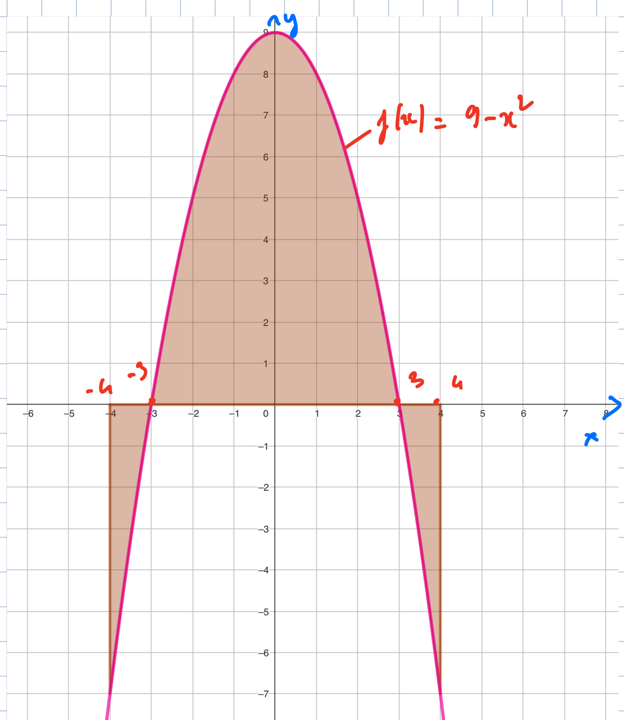
a) $f(x) = 9 - x^2$, $a = -4$, $b = 4$ ;

b) $f(x) = \dfrac{4}{x^2} - 1$, $a = 1$, $b = 4$ ;

c) $f(x) = \cos(3x)$, $a = 0$, $b = \dfrac{\pi}{2}$ ;

d) $f(x) = \sqrt{2x - 4}$, $a = 2$, $b = 10$.

a)




$* \; f(-x) = 9 - (-x)^2 = 9 - x^2 = f(x)$

$\Rightarrow f(x)$ est paire $\Rightarrow$ symétrique par rapport à $Oy$

$*$ Zéros de $f(x)$

$\Rightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow 9 - x^2 = 0$

$\Leftrightarrow (3 - x)(3 + x) = 0$

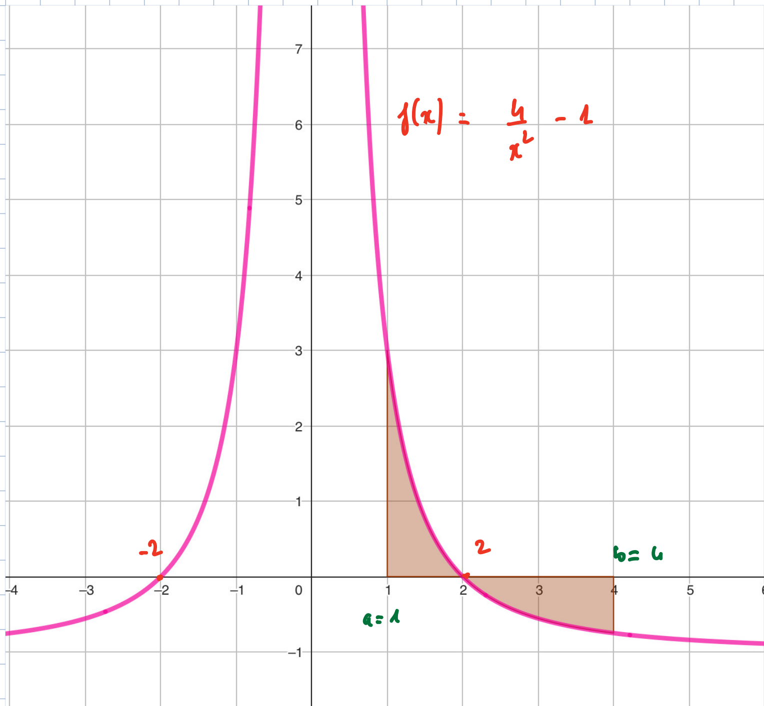
$\Rightarrow x_1 = -3 \,,\; x_2 = 3$

$$\Rightarrow A = 2\left[\int_0^3 (9 - x^2)\,dx - \int_3^4 (9 - x^2)\,dx\right]$$

$$\Rightarrow A = 2\left[9x - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^3 - \left(9x - \frac{x^3}{3}\Bigg|_3^4\right)\right] = 2\left[18 - 0 - \left(36 - \frac{64}{3} - 18\right)\right]$$

$$\Rightarrow A = 2 \cdot \frac{64}{3} = \boxed{\frac{128}{3}\ u^2}$$

b)




* $f(x)$ est paire
* zéros de $f(x)$ : $\frac{4}{x^2} - 1 = 0 \iff 4 = x^2 \iff 4 - x^2 = 0$

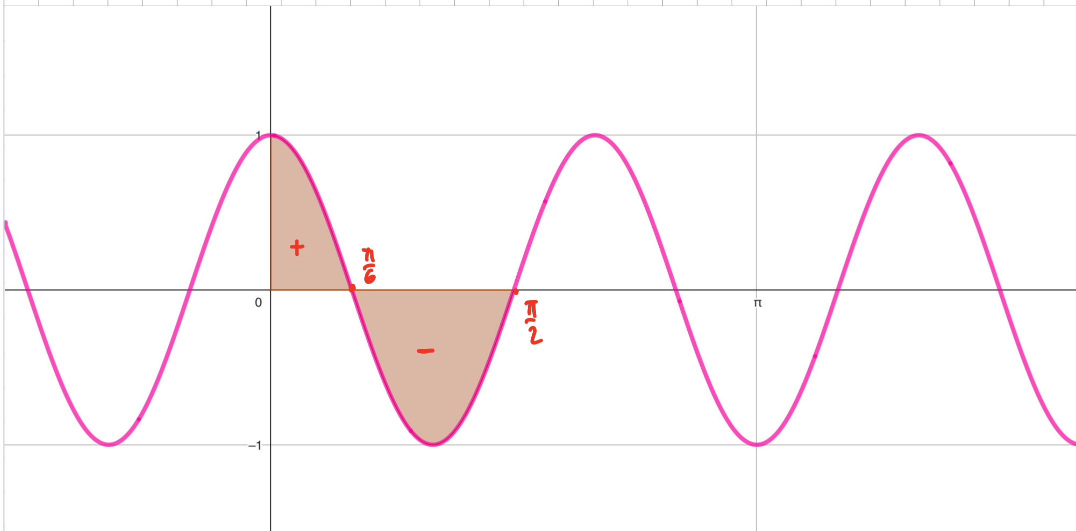
$\iff (2-x)(2+x) = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \; , \; x_2 = 2$

$$\Rightarrow A = \int_1^2 \left(\frac{4}{x^2} - 1\right) dx - \int_2^4 \left(\frac{4}{x^2} - 1\right) dx = \int_1^2 \left(4x^{-2} - 1\right) dx - \int_2^4 \left(4x^{-2} - 1\right) dx$$

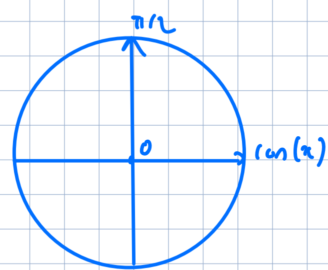
$$= \frac{4x^{-1}}{-1} - x \Big|_1^2 - \left(\frac{4x^{-1}}{-1} - x\right)\Big|_2^4 = -\frac{4}{x} - x \Big|_1^2 - \left(-\frac{4}{x} - x\right)\Big|_2^4$$

$$= -4 + 5 - (-5 + 4) = \boxed{2u^2}$$

c)



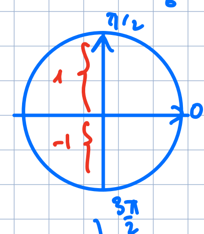

* zéros de $f(x)$ : $\cos(3x) = 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$




$$\Rightarrow 3x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \\ -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6}$ et $x_2 = \frac{\pi}{2}$ (sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$)

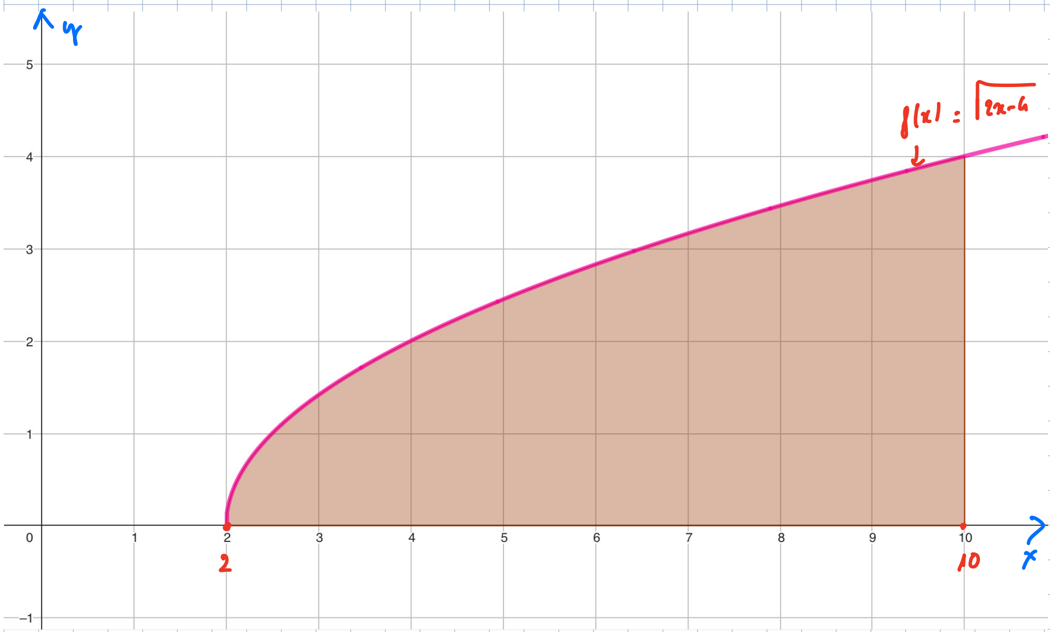
$$\Rightarrow A = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(3x)\,dx}_{\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \underset{f'(x)}{3} \cdot \underset{\cos(f(x))}{\cos(3x)}\,dx} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{3}\sin(3x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$




$$\Rightarrow A = \frac{1}{3}\sin\left(3\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{3}\sin(0) - \left(\frac{1}{3}\overbrace{\sin\left(3\frac{\pi}{2}\right)}^{-1} - \frac{1}{3}\sin\left(3\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{3} - 0 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = \boxed{1\,u^2}$$

d)




$*$ Zeros de $f$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-4} = 0 \Leftrightarrow 2x-4 = 0$

$\Rightarrow x = 2$

$$\Rightarrow A = \int_2^{10} \sqrt{2x-4}\,dx = \int_2^{10} (2x-4)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^{10} 2 \cdot (2x-4)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \left.\frac{(2x-4)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_2^{10} = \frac{1}{2} \left.\frac{(2x-4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_2^{10}$$

$$\Rightarrow A = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}_{\frac{1}{3}} \left.\sqrt{(2x-4)^3}\right|_2^{10} = \frac{64}{3} - 0 = \boxed{\frac{64}{3}\,u^2}$$

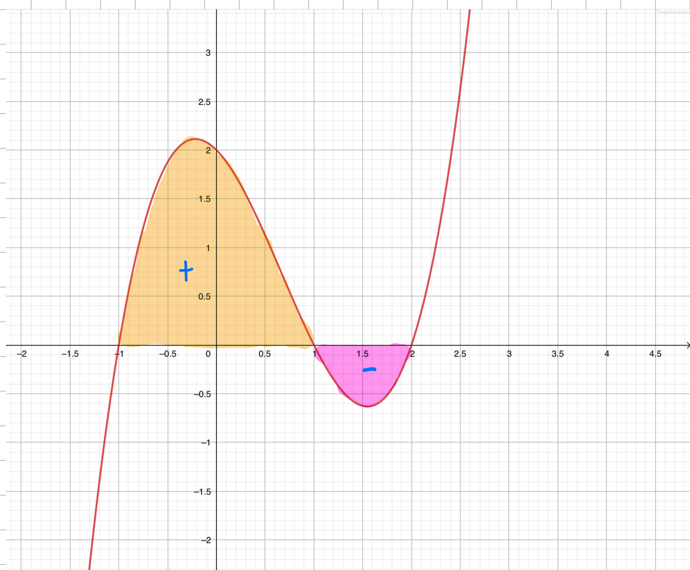
**1.3.17**

~~**2.2.25**~~ Calculer l'aire du domaine borné limité par la courbe d'équation $y = f(x)$ et l'axe $Ox$ :

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

b) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

a)




Zéros de $f(x)$ :

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \iff x^2(x-2) - 2(x-2) = 0$$

$$\iff (x-2)(x-1)(x+1) = 0 \quad \text{(ou par Horner)}$$

$$\Rightarrow x_1 = -1, \; x_2 = 1 \text{ et } x_3 = 2$$

$$\Rightarrow A = \int_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2 - x + 2)\,dx - \int_{1}^{2} (x^3 - 2x^2 - x + 2)\,dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \Big|_{-1}^{1} - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{1}^{2}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 2 - \left(4 - \frac{16}{3} - 2 + 4 - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = \boxed{\frac{37}{12}\ u^2}$$

b) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

zéros : $x = 0$ , $x = \pm 2$

$$f(-x) = (-x)\sqrt{4-(-x)^2} = -x\sqrt{4-x^2} = -f(x)$$

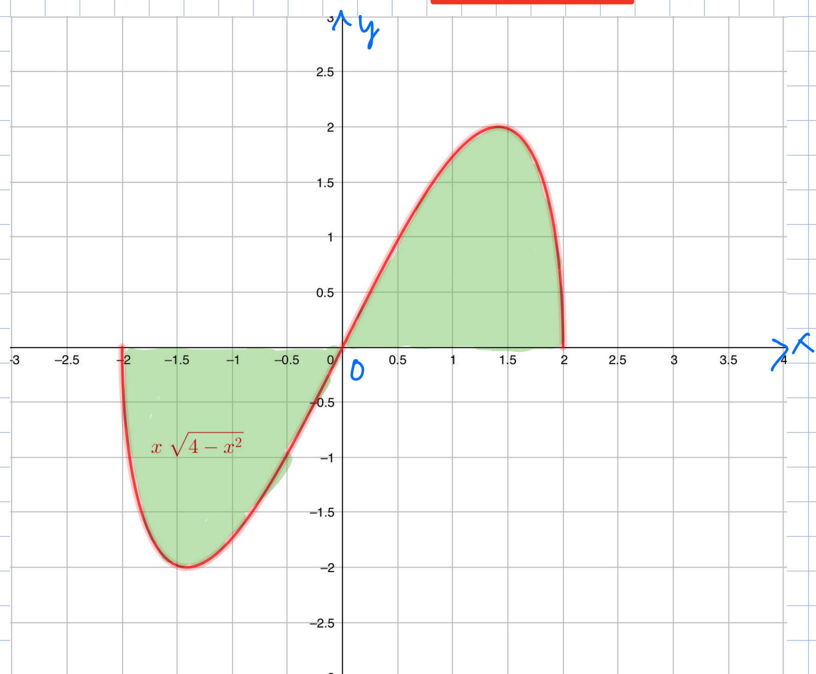
$\Rightarrow$ $f$ est impaire $\Rightarrow$ symétrie par rapport à l'origine.

$$\Rightarrow \int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^2 -2x\sqrt{4-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \underbrace{-2x}_{u'}\underbrace{(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}_{u^{1/2}}dx$$

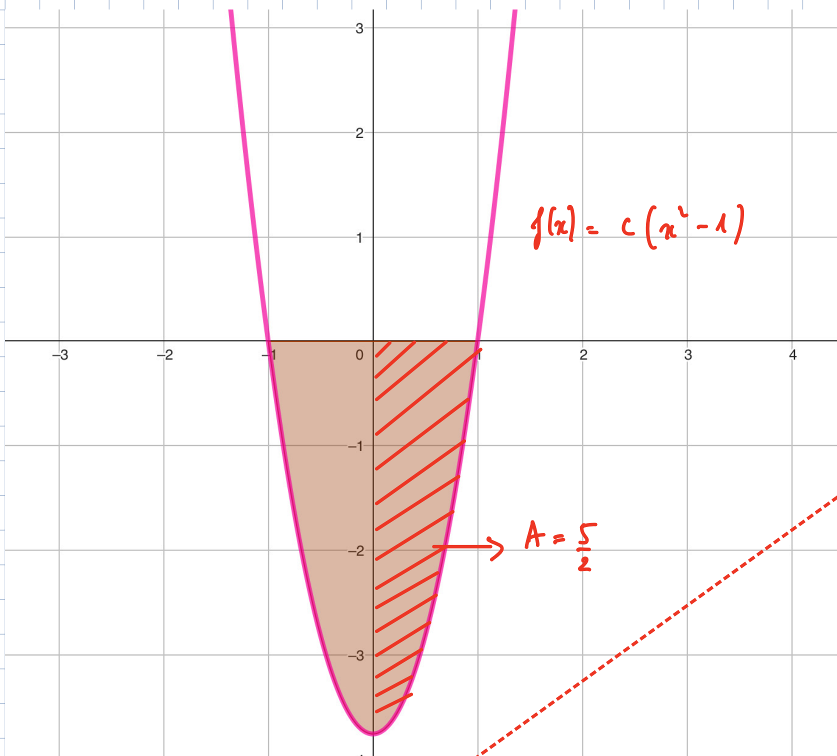
$$= -\frac{1}{2}\,\frac{(4-x^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_0^2 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2$$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{(4-x^2)^3}\Bigg|_0^2 = -\frac{1}{3}\sqrt{(4-4)^3} - \left(-\frac{1}{3}\sqrt{(4-0)^3}\right) = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow A = 2\cdot\frac{8}{3} = \boxed{\frac{16}{3}\ u^2}$$



**1.3.18** Déterminer la valeur du nombre réel positif $c$ pour que l'aire du domaine plan limité par l'axe $Ox$ et la parabole d'équation $y = c\,(x^2 - 1)$ soit égale à 5.




! $f(x) = c\,(x-1)(x+1)$

| $x$ | | $-1$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$*\quad f(-x) = c\,((-x)^2 - 1) = c\,(x^2 - 1) = f(x) \Rightarrow f(x)$ est paire

$$\Rightarrow A = -2 \int_0^1 c\,(x^2 - 1)\,dx = 5$$

$$\Rightarrow -2\left[\int_0^1 cx^2\,dx - \int_0^1 c\,dx\right] = -2\,c\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + 2cx\Big|_0^1 = 5$$

$$\Rightarrow -2\,c\,\frac{1}{3} - 0 + 2c - 0 = 5 \Rightarrow -\frac{2}{3}c + 2c = 5$$

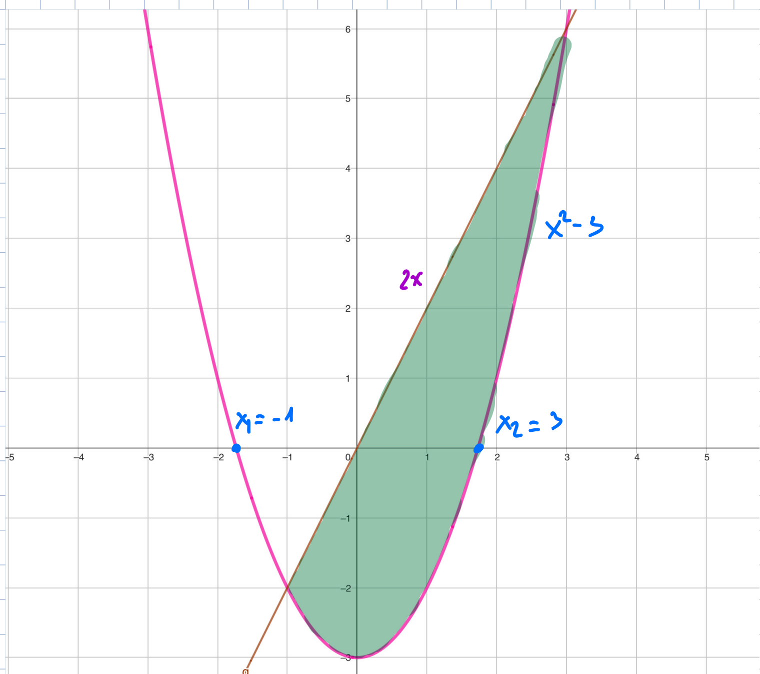
$$\Rightarrow -2 + 6c = 15 \Rightarrow 4c = 15 \Rightarrow \boxed{c = \frac{15}{4}}$$

**1.3.19** Calculer l'aire du domaine borné limité par les graphes des fonctions $f$ et $g$ :

a) $f(x) = x^2 - 3, \quad g(x) = 2x$

b) $f(x) = x^2, \quad g(x) = 8 - x^2$

a)




* point d'intersection : $f(x) = g(x) \iff x^2 - 3 = 2x$

$\iff x^2 - 2x - 3 = 0 \iff (x+1)(x-3) = 0$

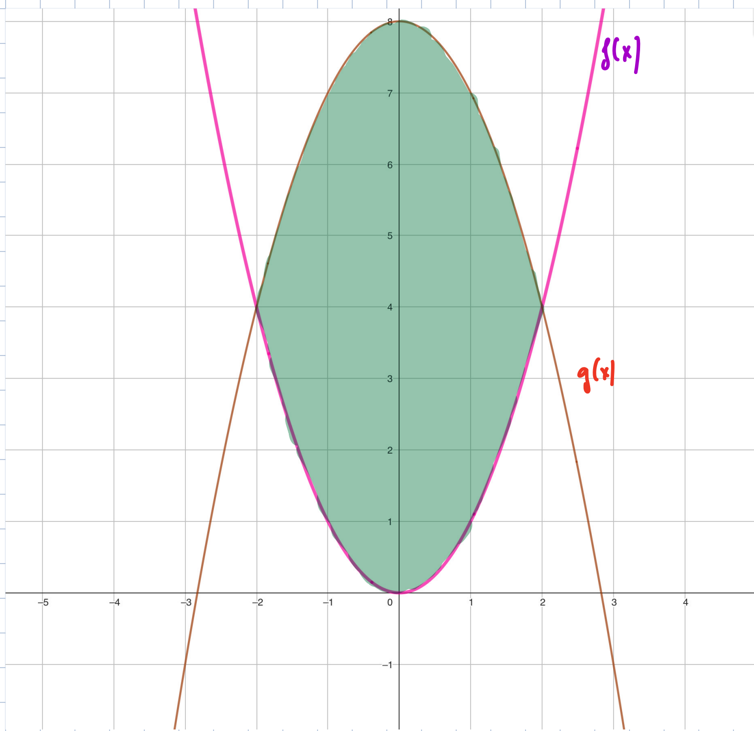
$\Rightarrow x_1 = -1 \,, \; x_2 = 3$

$$\Rightarrow A = \int_{-1}^{3} \big(g(x) - f(x)\big)\,dx = \int_{-1}^{3} (2x - x^2 + 3)\,dx = x^2 - \frac{x^3}{3} + 3x \,\Big|_{-1}^{3}$$

$$\Rightarrow A = 9 - \frac{3^3}{3} + 9 - \left(1 + \frac{1}{3} - 3\right) = 9 + 2 - \frac{1}{3} = 11 - \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{32}{3}\, u^2}$$

b) $f(x) = x^2$ , $g(x) = 8 - x^2$




* points d'intersection : $f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 = 8 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 8 = x^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \, , \, x_2 = 2$

$$\Rightarrow A = 2\int_0^2 \left(g(x) - f(x)\right) dx = 2\int_0^2 \left(8 - x^2 - x^2\right) dx = 2\int_0^2 \left(8 - 2x^2\right) dx$$

$$A = 2\left(8x - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 2\left(8\cdot 2 - 2\cdot\frac{2^3}{3} - 0\right)$$

$$A = 2\left(16 - \frac{16}{3}\right) = 2\left(\frac{48-16}{3}\right) = \boxed{\frac{64}{3}\ u^2}$$

c) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x, \quad g(x) = x^3 - 7x^2 + 12x$

d) $f(x) = x(6 - 2x^2), \quad g(x) = x(2 - x^2)$

c) * Intersection :

$$f(x) = g(x) \iff x^3 - 5x^2 + 6x = x^3 - 7x^2 + 12x$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 2x(x-3) = 0$$

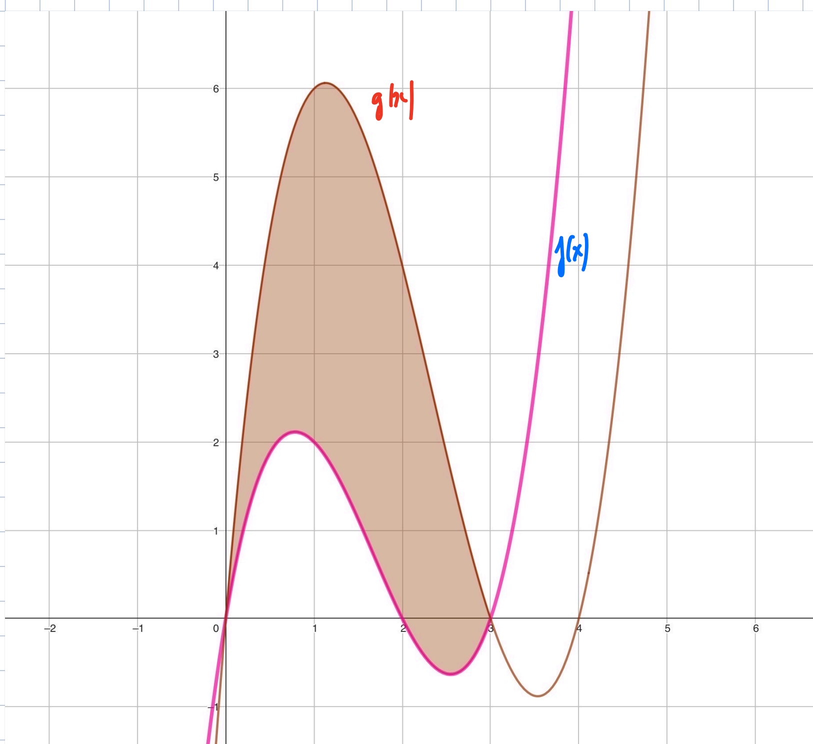
$$\Rightarrow x_1 = 0 \; , \; x_2 = 3$$

* Signe : $2x(x-3)$

| $x$ | | $0$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x(x-3)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$$\Rightarrow A = -\int_0^3 (2x^2 - 6x)\, dx = -\left(\frac{2x^3}{3} - 3x^2\right)\Bigg|_0^3 = -(18 - 27 - 0)$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 9u^2}$$



d) $f(x) = x(6-2x^2)$ , $g(x) = x(2-x^2)$

* <u>points d'intersection</u> : $f(x) = g(x) \iff x(6-2x^2) = x(2-x^2)$

$\Rightarrow x(6-2x^2) - x(2-x^2) = x[6-2x^2-2+x^2] = 0$

$\Rightarrow x(4-x^2) = x(2-x)(2+x) = 0$

$\Rightarrow x_1 = -2$ , $x_2 = 0$ , $x_3 = 2$

* <u>Signe</u> :

| $x$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x(2-x)(2+x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

$$\Rightarrow A = -\int_{-2}^{0} x(4-x^2)\,dx + \int_{0}^{2} x(4-x^2)\,dx = -\left(2x^2-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-2}^{0} + \left(2x^2-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{2}$$

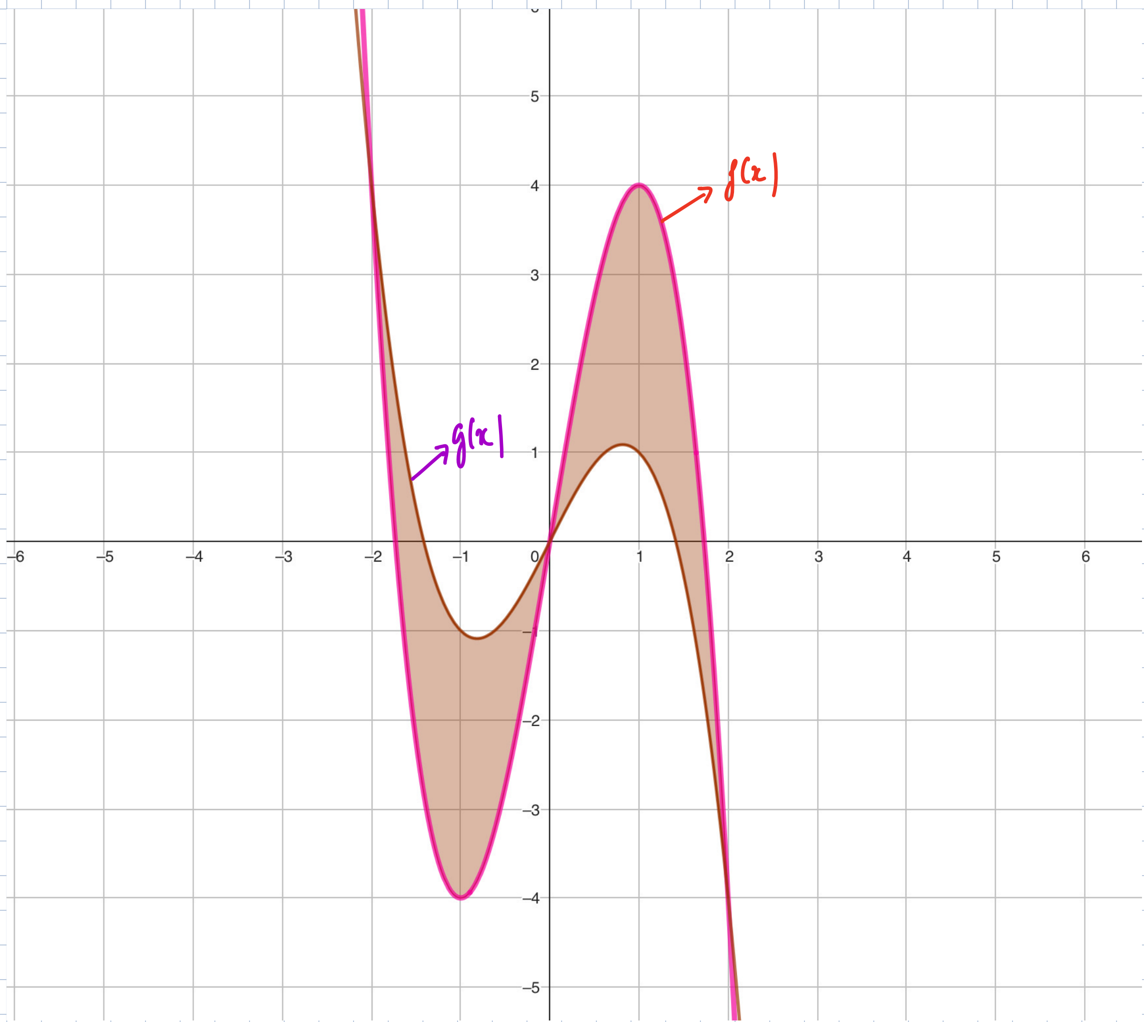
$$\Rightarrow A = -\left(0-0-\left(2(-2)^2-\frac{(-2)^4}{4}\right)\right) + \left(2\cdot 2^2-\frac{2^4}{4}-0+0\right)$$

$$= -(-8+4) + (8-4) = 4+4 = \boxed{8u^2}$$

ou $x(4-x^2) = (-x)(4-(-x)^2) = -x(4-x) \Rightarrow$ paire

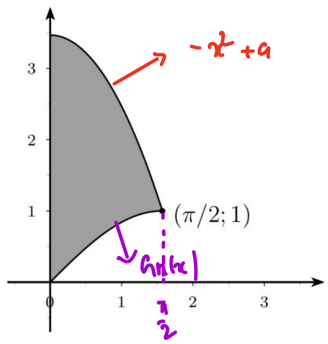
$$\Rightarrow A = 2\int_0^2 x(4-x^2)\,dx = 2\int_0^2 (4x-x^3)\,dx = 2\left(2x^2-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2$$

$$= 2(4-0) = 8u^2$$


f(x)
g(x)

**1.3.20** Calculer d'abord la valeur du paramètre $a$, puis l'aire du domaine grisé.

a) $y = \sin(x), \quad y = -x^2 + a$




a) Point d'intersection $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4} + a \Rightarrow 1 = -\frac{\pi^2}{4} + a$

$\Rightarrow a = 1 + \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow y = -x^2 + 1 + \frac{\pi^2}{4}$

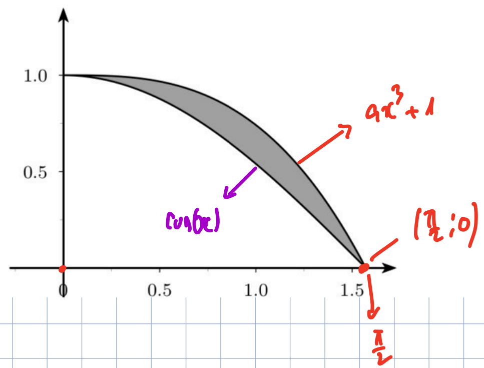
$$\Rightarrow A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-x^2 + 1 + \frac{\pi^2}{4} - \sin(x)\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x + \frac{\pi^2}{4}x + \cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow A = \left[-\frac{x^3}{3} + \cos(x) + x\left(\frac{\pi^2}{4} + 1\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi^3}{24} + 0 + \left(\frac{\pi^2}{4} + 1\right)\frac{\pi}{2} - 1$$

$$A = -\frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi^3}{8} + \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{-\pi^3 + 3\pi^3 + 12\pi - 24}{24}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{\pi^3 + 6\pi - 12}{12} \ u^2}$$

b) $y = \cos(x), \quad y = ax^3 + 1$




Point d'intersection : $\left(\frac{\pi}{2} ; 0\right)$

$\Rightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = a\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + 1 \quad \Rightarrow \quad a\frac{\pi^3}{8} + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{8}{\pi^3}$

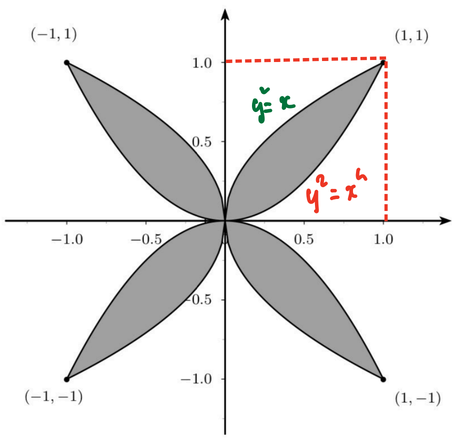
donc $\quad y = -\frac{8}{\pi^3} x^3 + 1$

$\Rightarrow \quad A = \int_0^{\pi/2} \left(ax^3 + 1 - \cos(x)\right) dx = \left. \frac{ax^4}{4} + x - \sin(x) \right|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow \quad A = \frac{a\pi^4}{64} + \frac{\pi}{2} - 1 = -\frac{8}{\pi^3} \cdot \frac{\pi^4}{64} + \frac{\pi}{2} - 1$

$\Rightarrow \boxed{A = \frac{3\pi}{8} - 1 \ u^2}$

c) $y^2 = ax^4, \quad x^2 = y^4$




$y^4 = x^2 \Rightarrow y^2 = \sqrt{x^2} = x \Rightarrow y = \sqrt{x}$

point d'intersection : $(1;1) \Rightarrow a \cdot 1^4 = 1 \Rightarrow a = 1$

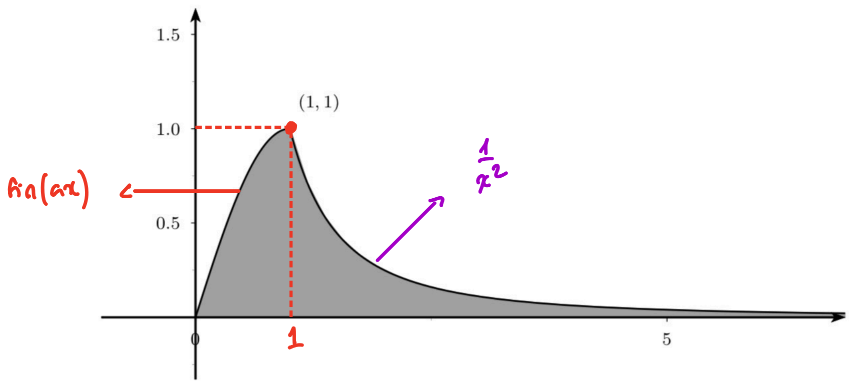
donc $y^2 = x^4 \Rightarrow y = x^2$

$\Rightarrow A = 4\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = 4\int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x^2)\,dx = 4 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 - 4 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^1$

$\Rightarrow A = \frac{8}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^1 - \frac{4}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{8}{3}\,1 - 0 - \left(\frac{4}{3} \cdot 1 - 0\right)$

$\Rightarrow A = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{A = \frac{4}{3}\,u^2}$

d) $y = \sin(ax), \quad y = \dfrac{1}{x^2}$




$*$ point d'intersection : $(1;1) \Rightarrow 1 = \sin(a) \Rightarrow a = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow y = \sin\left(\frac{x\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow A = \int_0^1 \sin(ax)\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

intégrale généralisée !

$$A = -\frac{1}{a}\int_0^1 -a\cdot\sin(ax)\,dx + \int_1^{+\infty} x^{-2}\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax)\Big|_0^1 + \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^{+\infty}$$

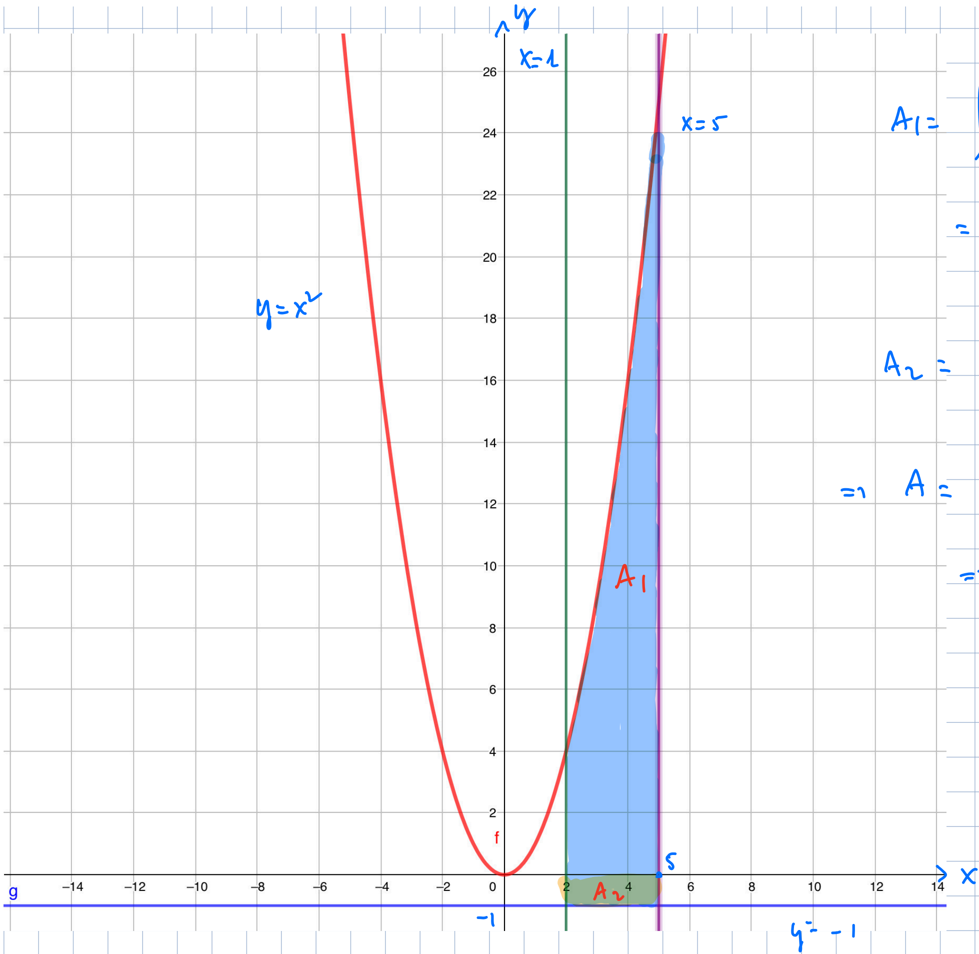
$$A = -\frac{1}{a}\cos(ax)\Big|_0^1 - \frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = -\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\Big|_0^1 - \underbrace{\frac{1}{+\infty}}_{=0} + 1$$

$$A = -\frac{2}{\pi}\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0} + \frac{2}{\pi}\cos(0) - 0 + 1$$

$$A = \frac{2}{\pi}\cdot 0 + \frac{2}{\pi} + 1 \Rightarrow \boxed{A = \frac{2}{\pi} + 1 \quad u^2}$$

~~2.2.29~~ 1.3.21 Calculer l'aire du domaine borné limité par les courbes données par les équations

$$y = x^2, \quad y = -1, \quad x = 2 \quad \text{et} \quad x = 5$$




$$A_1 = \int_2^5 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^5$$

$$= \frac{125}{3} - \frac{8}{3} = 39\ u^2$$

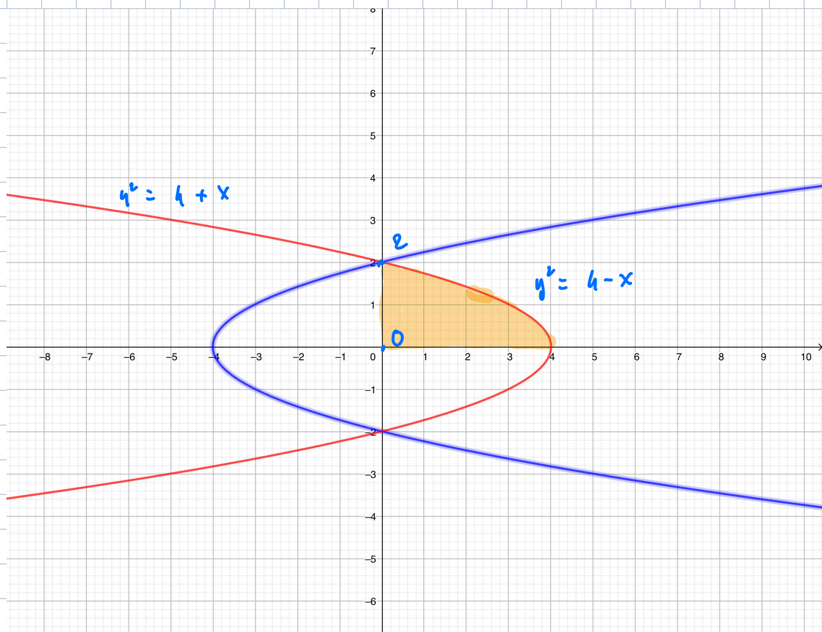
$$A_2 = 1 \cdot 3 = 3\ u^2$$

$$\Rightarrow A = A_1 + A_2 = 39 + 3$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 42\ u^2}$$

~~2.2.30~~ 1.3.22 Calculer l'aire du domaine borné limité par les courbes données par les équations

$$y^2 = 4 - x \quad \text{et} \quad y^2 = 4 + x$$




$* \quad y^2 = 4 - x \Rightarrow x = 4 - y^2$

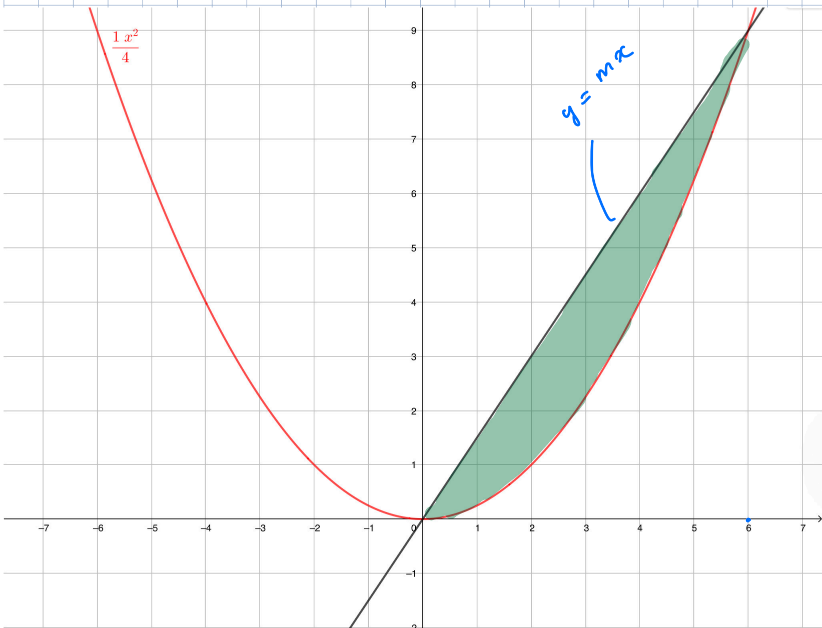
$* \quad y^2 = 4 + x \Rightarrow x = y^2 - 4$

$$\Rightarrow A = 4 \int_0^2 (4 - y^2)\,dy$$

$$= 4\left(4y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 4\left(8 - \frac{8}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{64}{3} u^2}$$

~~2.2.31~~ 1.3.23 Calculer le réel $m > 0$ de façon que l'aire limitée par les courbes $y = \frac{1}{4}x^2$ et $y = mx$ soit égale à 9.




Zéros :

$\frac{1}{4}x^2 = mx$

$\Rightarrow x^2 = 4mx$

$\Rightarrow x^2 - 4mx = 0$

$\Rightarrow x(x - 4m) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ et $x = 4m$

$$A = \int_0^{4m} \left(mx - \frac{1}{4}x^2\right) dx = 9 \iff \left(\frac{mx^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_0^{4m} = 9$$

$$\iff m\frac{16m^2}{2} - \frac{64m^3}{12} - 0 = 9$$

$$\iff 8m^3 - \frac{16m^3}{3} = 9 \iff \frac{8m^3}{3} = 9$$

$$\iff 8m^3 = 27 \iff m^3 = \frac{27}{8} \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

D'où $\boxed{m = \frac{3}{2}}$

~~2.2.32~~ 1.3.24 Le domaine délimité par la courbe d'équation $y = f(x)$ et l'axe $Ox$ tourne autour de cet axe. Calculer son volume, sachant que :

a) $f(x) = x^2 + 2\,x$ b) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

a) $f(x) = x^2 + 2x$

Les zéros : $f(x) = 0 \iff x^2 + 2x = 0$

$\iff x(x+2) = 0 \Rightarrow x = 0$ et $x = -2$

$$\Rightarrow V = \pi \int_{-2}^{0} f^2(x)\, dx = \pi \int_{-2}^{0} (x^2+2x)^2\, dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{0} (x^4 + 4x^3 + 4x^2)\, dx = \pi \left( \frac{x^5}{5} + \frac{4x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^{0}$$

$$= \pi \left( \frac{x^5}{5} + x^4 + \frac{4x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^{0} = \pi \cdot (0) - \pi \cdot \left( \frac{(-2)^5}{5} + (-2)^4 + \frac{4(-2)^3}{3} \right)$$

$$V = -\pi \left( -\frac{32}{5} + 16 - \frac{32}{3} \right) = -\frac{\pi}{15} \left( (-32) \cdot 3 + 16 \cdot 15 - 32 \cdot 5 \right)$$

$$= -\frac{\pi}{15} \cdot (-96 + 240 - 160) = -\frac{\pi}{15} \cdot (-16) = \boxed{\frac{16}{15} \pi\ u^3}$$

b) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Les zéros : $1 - x^2 = 0 \iff (1-x)(1+x) = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1$

$$V = \pi \int_{-1}^{1} f^2(x)\, dx = \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)\, dx = \pi \int_{-1}^{1} dx - \pi \int_{-1}^{1} x^2\, dx$$

$$= \pi x \Big|_{-1}^{1} - \pi \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{1} = \pi - (-\pi) - \left( \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) \right)$$

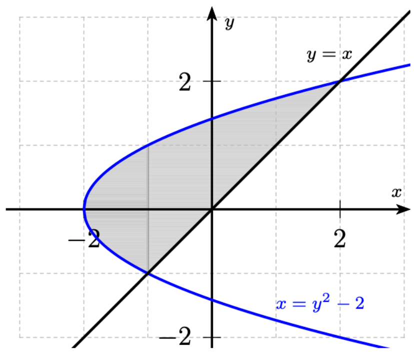
$$= \pi + \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{6\pi - 2\pi}{3} = \boxed{\frac{4\pi}{3}\ u^3}$$

1.2.25

**~~2.2.33~~** Calculer l'aire du domaine borné limité par la courbe d'équation $x = y^2 - 2$ et la droite $y = x$,

a) en prenant $x$ comme variable d'intégration ;

b) en prenant $y$ comme variable d'intégration.




a) $x = x^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1 \quad x_2 = 2$

$$\mathcal{A} = 2\int_{-2}^{-1} \sqrt{x+2}\, dx + \int_{-1}^{2} (\sqrt{x+2} - x)\, dx =$$

$$2\left(\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}\right)\Bigg|_{-2}^{-1} + \frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3} - \frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{4}{3} + \frac{16}{3} - 2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}\ \mathrm{u}^2$$

b) $\mathcal{A} = \displaystyle\int_{-1}^{2} (y - y^2 + 2)\, dy = \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + 2y\Bigg|_{-1}^{2} = 2 - \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 2 = \frac{9}{2}\ \mathrm{u}^2$

~~2.2.34~~ 1.3.26 Le domaine délimité par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe $Ox$ et les droites $x = a$ et $x = b$ tourne autour de l'axe $Ox$. Esquisser le corps ainsi obtenu et calculer son volume :

a) $f(x) = x + 1, \quad a = 1, b = 3$

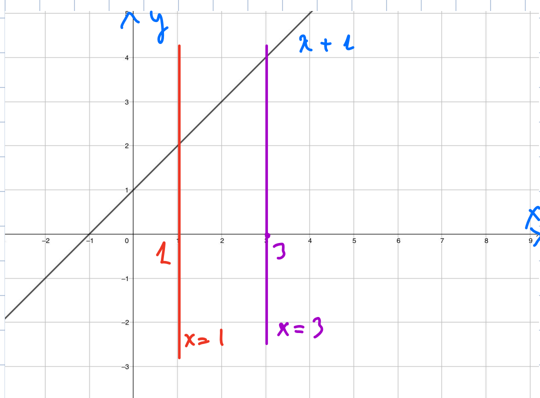
b) $f(x) = x^2, \quad a = 0, b = 4$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}, \quad a = 1, b = 2$

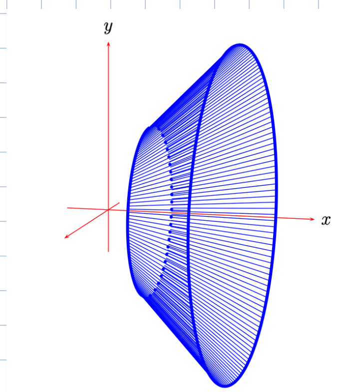
d) $f(x) = \cos(x), \quad a = -\dfrac{\pi}{2}, b = \dfrac{\pi}{2}$

a) $f(x) = x+1$ , $a = 1$ , $b = 3$

$$\Rightarrow V = \pi \int_1^3 (x+1)^2\,dx = \frac{\pi}{3} (x+1)^3 \Big|_1^3 = \frac{\pi}{3}(64-8) = \boxed{\frac{56}{3}\pi\ u^3}$$

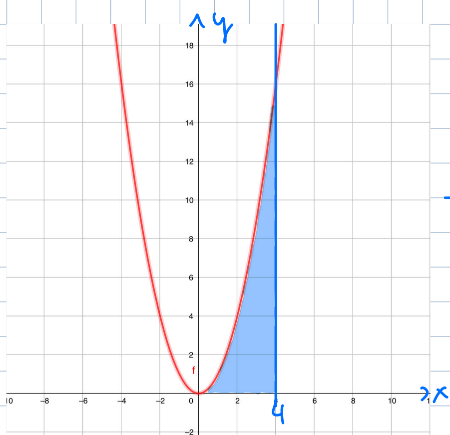



$\longrightarrow$

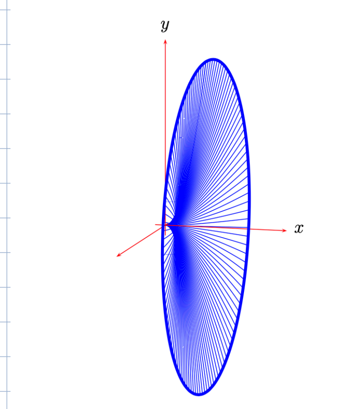



b) $f(x) = x^2$ , $a = 0$ , $b = 4$

$$\Rightarrow V = \pi \int_0^4 (x^2)^2\,dx = \pi \frac{x^5}{5} \Big|_0^4 = \pi \cdot \frac{(4)^5}{5} - 0 = \boxed{\frac{1024}{5}\pi\ u^3}$$




$\longrightarrow$



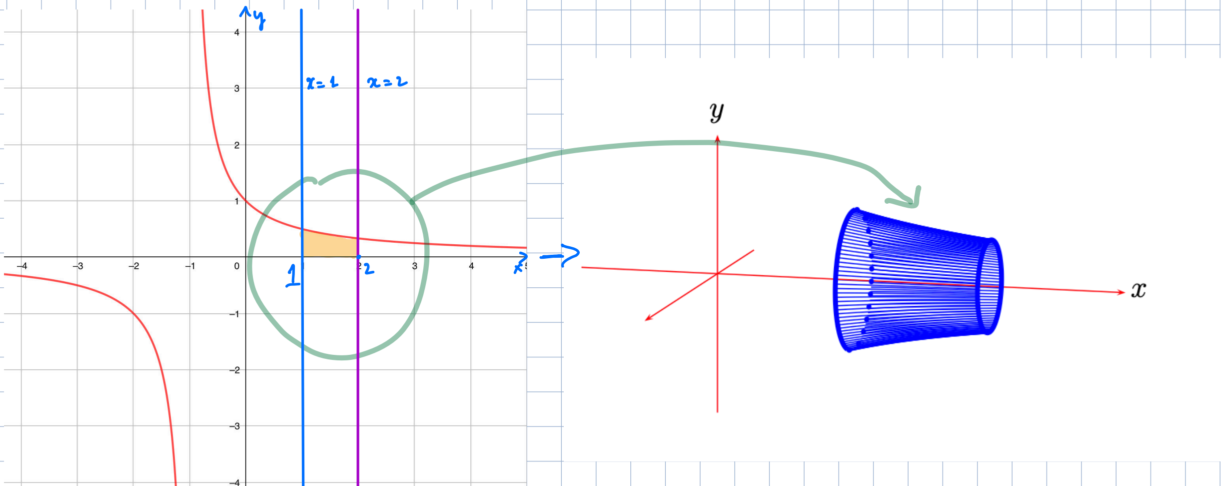
c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ , $a = 1$ , $b = 2$

$$V = \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1}\right)^2 dx = \pi \int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2}\, dx = \pi \int_1^2 (x+1)^{-2}\, dx$$

$$= \pi \left. \frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} \right|_1^2 = \pi \left. \frac{(x+1)^{-1}}{-1} \right|_1^2 = -\pi \left. \frac{1}{x+1} \right|_1^2$$

$$= -\pi \frac{1}{3} - \left(-\pi \frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{-2\pi + 3\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{V = \frac{\pi}{6}\ u^3}$$




~~2.2.35~~ 1.3.27 Le domaine borné délimité par la courbe d'équation

$$y = k\,(1 - k\,x)\,\sqrt{x}$$

pour $k > 0$ et l'axe $Ox$ tourne autour de cet axe. Montrer que le volume du corps ainsi obtenu est indépendant de la valeur du paramètre $k$.

$$k\,(1 - kx)\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \,,\ x_2 = \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow k^2\pi \int_0^{\frac{1}{k}} (1-kx)^2 \cdot x\, dx = k^2\pi \int_0^{1/k} (x - 2kx^2 + k^2x^3)\cdot x\, dx = k^2\pi \left( \frac{x^2}{2} - \frac{2kx^3}{3} + \frac{k^2x^4}{4} \right) \Bigg|_0^{1/k}$$

$$= k^2\pi \left( \frac{1}{2k^2} - \frac{2}{3k^2} + \frac{1}{4k^2} \right) = k^2\pi \cdot \frac{1}{12k^2} = \boxed{\frac{\pi}{12}\ u^3}$$

1.3.28

~~2.2.36~~ Le domaine délimité par les courbes d'équations $y = f(x)$, $y = g(x)$ et l'axe $Ox$ tourne autour de cet axe. Calculer son volume :

a) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2$

b) $f(x) = x^2 - 2x + 6$ et $g(x) = -x^2 + 10$

Rappel : Aire $= \int_a^b (\text{dessus} - \text{dessous})\, dx$

Remarque :

Si on ne sait pas (absence de dessin) quelle courbe est au-dessus, on choisit au hasard et on prend la valeur absolue de la réponse.

a) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2$

Les zéros : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x} = x^2 \Leftrightarrow x = x^4$

$\Leftrightarrow x^4 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 ; x_2 = 1$

$$\Rightarrow V = \pi \left| \int_0^1 (f^2(x) - g^2(x))\, dx \right| = \pi \left| \int_0^1 (x - x^4)\, dx \right|$$

$$= \pi \left| \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 \right| = \pi \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right| = \pi \left| \frac{5-2}{10} \right|$$

$$\boxed{V = \frac{3}{10} \pi \; u^3}$$

* Si on prend : $V = \pi \left| \int_0^1 (g^2(x) - f^2(x))\, dx \right|$

alors on a : $V = \pi \left| \int_0^1 (x^4 - x)\, dx \right| = \pi \left| \left[ \frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \right|$

$$\Rightarrow V = \pi \left| \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \right| = \pi \left| \frac{2-5}{10} \right| = \pi \left| \frac{-3}{10} \right|$$

$$\Rightarrow \boxed{V = \pi \cdot \frac{3}{10} \; u^3}$$

b) $f(x) = x^2 - 2x + 6$ et $g(x) = -x^2 + 10$

Les zéros : $f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 2x + 6 = -x^2 + 10$

$\Rightarrow x^2 + x^2 - 2x + 6 - 10 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$

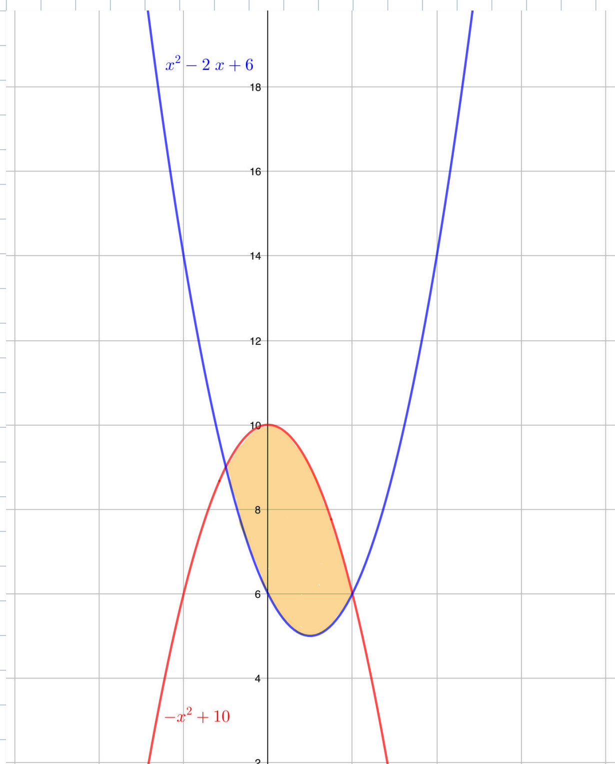
$\Rightarrow 2(x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \;;\; x_2 = 2$

$$\Rightarrow V = \pi \int_{-1}^{2} \left(g^2(x) - f^2(x)\right) dx = \pi \int_{-1}^{2} \left((-x^2+10)^2 - (x^2-2x+6)^2\right) dx$$

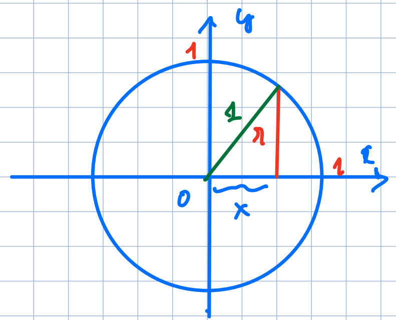
$$\Rightarrow V = \pi \int_{-1}^{2} \left(x^4 - 20x^2 + 100 - x^4 - 4x^2 - 36 + 4x^3 - 12x^2 + 24x\right) dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} \left(4x^3 - 36x^2 + 24x + 64\right) dx = \pi \left(x^4 - 12x^3 + 12x^2 + 64x\right)\Big|_{-1}^{2}$$

$$= \pi (96 + 39) \Rightarrow \boxed{V = 135\pi \ u^3}$$



1.3.29 ~~2.2.37~~ La base d'un solide est le disque du plan $Oxy$ centré à l'origine et de rayon 1. Chaque section du solide par un plan perpendiculaire à l'axe $Ox$ est un disque. Après avoir montré que l'aire de la section située à l'abscisse $x$ vaut $A(x) = \pi\,(1 - x^2)$, en déduire par calcul le volume de ce solide.




- Équation du cercle (disque)

$x^2 + y^2 = 1$

- Calcul $r$ : Pythagore : $1 = x^2 + r^2$

$\Rightarrow r^2 = 1 - x^2 \Rightarrow r = \sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow$ L'aire du disque de rayon $r = \sqrt{1-x^2}$

$A = \pi . r^2 = \pi\left(1 - x^2\right)$

$\Rightarrow V = 2\pi \int_0^1 (1-x^2)\,dx = 2\pi \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 2\pi\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{4}{3}\pi u^3}$

**2.2.38** Les axes de coordonnées et la parabole $y = -x^2 + 2x + 3$ délimitent un domaine contenu dans le premier quadrant. Déterminer l'équation de la droite verticale (valeur approchée) qui partage ce domaine en deux parties de même aire.

* zéros : $-x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1 ,\ x_2 = 3$

$\Rightarrow \int_0^3 (-x^2 + 2x + 3)\,dx = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \Big|_0^3 = -9 + 9 + 9 = 9$

* $x = m$

$\Rightarrow \int_0^m (-x^2 + 2x + 3)\,dx = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \Big|_0^m = -\frac{m^3}{3} + m^2 + 3m = \frac{9}{2}$

$\Rightarrow 2m^3 - 6m^2 - 18m + 27 = 0 \Rightarrow \boxed{m \simeq 1{,}2091}$

$\Rightarrow \boxed{x \simeq 1{,}2091}$

1.3.31

~~2.2.39~~ On considère le domaine plan limité par les courbes d'équations $y = x^2 + 2$ et $y = 3x$. Poser le calcul permettant de déterminer le volume du solide engendré par la révolution de ce domaine autour de :

a) l'axe $Ox$ ;

b) l'axe $Oy$ ;

c) la droite $x = 1$ ;

d) la droite $x = 2$ ;

e) la droite $y = 3$ ;

f) la droite $y = 6$.

a) $y = x^2 + 2$ et $y = 3x$ $\rightarrow$ axe $Ox$

Les zéros : $x^2 + 2 = 3x \iff x^2 - 3x + 2 = 0 \iff (x-1)(x-2) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 1 \; ; \; x_2 = 2$

on choisit au hasard la courbe :

$$V = \pi \left| \int_1^2 \left( (x^2+2)^2 - (3x)^2 \right) dx \right| = \pi \left| \int_1^2 \left( (x^4 + 4x^2 + 4) - 9x^2 \right) dx \right|$$

$$V = \pi \left| \int_1^2 \left( x^4 + 4x^2 + 4 - 9x^2 \right) dx \right| = \pi \left| \int_1^2 (x^4 - 5x^2 + 4)\, dx \right|$$

$$= \pi \left| \left( \frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 4x \right) \Big|_1^2 \right| = \pi \left| \frac{32}{5} - \frac{1}{5} - \left( 5 \cdot \frac{8}{3} - 5 \cdot \frac{1}{3} \right) + 4 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \right|$$

$$= \pi \left| \frac{31}{5} - \frac{40}{3} + \frac{5}{3} + 8 - 4 \right| = \pi \left| \frac{31}{5} - \frac{35}{3} + 4 \right| = \pi \left| \frac{31 \cdot 3 - 35 \cdot 5 + 4 \cdot 15}{15} \right|$$

$$= \pi \left| \frac{93 - 175 + 60}{15} \right| = \underbrace{\pi \left| \frac{-22}{15} \right|}_{\text{valeur absolue de } \frac{-22}{15} = \frac{22}{15}} = \boxed{\frac{22}{15} \pi \; u^3}$$

b) autour de l'axe Oy : $y = x^2+2 \Rightarrow x^2 = y-2 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{y-2}}$

$y = 3x \Rightarrow x = \frac{y}{3}$

On prend les deux bornes en x : $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$ puis on calcule les deux bornes en y.

* $x = 1 \Rightarrow y = 3 \rightarrow$ borne en y
* $x = 2 \Rightarrow y = 6 \rightarrow$ borne en y

$\Rightarrow$ on calcule l'intégrale par rapport à y :

$$V = \pi \int_3^6 \left( \left(\sqrt{y-2}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2 \right) dy = \pi \int_3^6 \left(y-2-\frac{y^2}{9}\right) dy$$

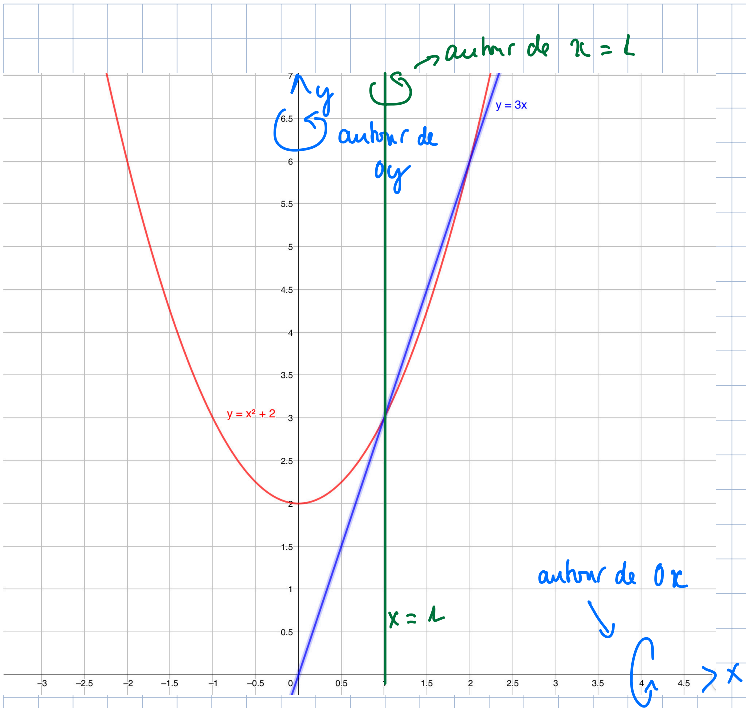
$$\Rightarrow V = \pi \int_3^6 \left(\frac{9y-18-y^2}{9}\right) dy = \frac{\pi}{9}\int_3^6 (9y-18-y^2)\, dy$$

$$= \frac{\pi}{9}\left(9\frac{y^2}{2} - 18y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_3^6 = \frac{\pi}{9}\left(9\cdot\frac{6^2}{2} - 9\cdot\frac{3^2}{2} - (18\cdot 6 - 18\cdot 3) - \left(\frac{6^3}{3} - \frac{3^3}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{9}\left(\frac{9\cdot 36}{2} - \frac{9\cdot 9}{2} - 108 + 54 - \frac{216}{3} + \frac{27}{3}\right)$$

$$= \frac{\pi}{9}\left(162 - \frac{81}{2} - 54 - 72 + 9\right) = \frac{\pi}{9}\left(45 - \frac{81}{2}\right) = \frac{\pi}{9}\left(\frac{90-81}{2}\right)$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{9}\cdot\frac{9}{2} \Rightarrow \boxed{V = \frac{\pi}{2}\ u^3}$$




c) autour de la droite $x = 1$

⇒ même démarche que autour de $Oy$ (axe $Oy$ c-à-d : $x = 0$)

→ on décale $x = \sqrt{y-2}$ et $x = \frac{y}{3}$ de $1$

$$\Rightarrow V = \pi \int_3^6 \left( \left( \sqrt{y-2} - 1 \right)^2 - \left( \frac{y}{3} - 1 \right)^2 \right) dy$$

$$= \pi \int_3^6 \left( y - 2 - 2\sqrt{y-2} + 1 - \left( \frac{y^2}{9} - \frac{2y}{3} + 1 \right) \right) dy$$

$$= \pi \int_3^6 \left( y - 2 - 2\sqrt{y-2} \cancel{+1} - \frac{y^2}{9} - \frac{2y}{3} \cancel{-1} \right) dy$$

$$= \pi \left( \frac{y^2}{2} - 2y - \frac{4}{3}\sqrt{(y-2)^3} - \frac{y^3}{27} + \frac{y^2}{3} \right) \Bigg|_3^6$$

$$= \pi \left( 10 - \frac{32}{3} - \frac{9}{2} + 4 + \frac{4}{3} \right) = \boxed{\frac{\pi}{6}\ u^3}$$

d) $V = -\pi \int_3^6 \left[ \left(\sqrt{y-2} - 2\right)^2 - \left(\frac{y}{3} - 2\right)^2 \right] dy$

$= -\pi \int_3^6 \left( y - 2 - 4\sqrt{y-2} - \frac{y^2}{9} + \frac{4y}{3} \right) dy$

$= -\pi \left( \frac{y^2}{2} - 2y - \frac{8}{3}\sqrt{(y-2)^3} - \frac{y^3}{27} + \frac{2y^2}{3} \right)\Big|_3^6$

$= -\pi \left( 22 - \frac{64}{3} - \frac{9}{2} + 1 + \frac{8}{3} \right) = \boxed{\frac{\pi}{6} u^3}$

e) $V = \pi \int_1^2 \left[ (3x-3)^2 - (x^2-1)^2 \right] dx = \pi \int_1^2 (-x^4 + 11x^2 - 18x + 8)\, dx$

$= \pi \left( -\frac{x^5}{5} + \frac{11x^3}{3} - 9x^2 + 8x \right)\Big|_1^2 = \pi \left( -\frac{32}{5} + \frac{88}{3} - 20 + \frac{1}{5} - \frac{11}{3} + 1 \right)$

$= \boxed{\frac{7}{15}\pi u^3}$

f) $V = -\pi \int_1^2 \left[ (3x-6)^2 - (x^2-4)^2 \right] dx = -\pi \int_1^2 (-x^4 + 17x^2 - 36x + 20)\, dx$

$= -\pi \left( -\frac{x^5}{5} + \frac{17x^3}{3} - 18x^2 + 20x \right)\Big|_1^2 = -\pi \left( -\frac{32}{5} + \frac{136}{3} - 32 + \frac{1}{5} - \frac{17}{3} - 2 \right)$

$= \boxed{\frac{8}{15}\pi u^3}$

~~2.2.40~~ 1.3.72 La base d'un solide est délimitée par les courbes d'équations

$$x = y^2 \quad \text{et} \quad x = 9$$

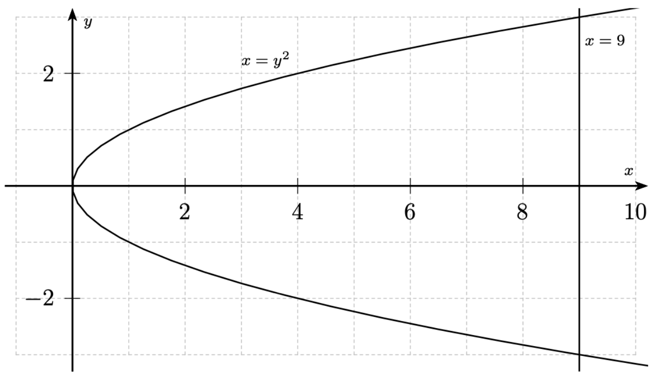
Calculer le volume de ce solide, sachant que chaque section de celui-ci par un plan perpendiculaire à l'axe $Ox$ est :

a) un carré ;

b) un demi-cercle ;

c) un triangle équilatéral ;

d) un trapèze dont la base supérieure mesure la moitié de la base inférieure et dont la hauteur mesure le quart de la base inférieure.




a) $A(x) = (2\sqrt{x})^2 = 4x \qquad \mathcal{V} = \int_0^9 4x\,dx = 2x^2\Big|_0^9 = 162 \text{ u}^3$

b) $A(x) = \dfrac{\pi}{2} \cdot (\sqrt{x})^2 = \dfrac{\pi x}{2} \qquad \mathcal{V} = \dfrac{\pi}{2}\int_0^9 x\,dx = \dfrac{\pi}{4}x^2\Big|_0^9 = \dfrac{81}{4}\pi \text{ u}^3$

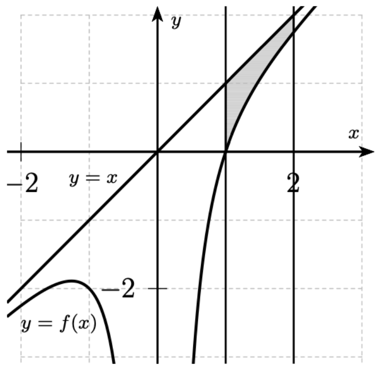
c) $A(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{3x} = \sqrt{3}x \qquad \mathcal{V} = \sqrt{3}\int_0^9 x\,dx = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2\Big|_0^9 = \dfrac{81\sqrt{3}}{2} \text{ u}^3$

d) $A(x) = \dfrac{(2\sqrt{x} + \sqrt{x})\sqrt{x}}{4} = \dfrac{3x}{4} \qquad \mathcal{V} = \int_0^9 \dfrac{3x}{4}\,dx = \dfrac{3x^2}{8}\Big|_0^9 = \dfrac{243}{8} \text{ u}^3$

1.3.33

**~~2.2.41~~** Calculer l'aire du domaine compris entre les droites $x = 1$ et $x = 2$, l'asymptote oblique et le graphique de la fonction $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$.

$$f(x) = x - \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad (\text{AO}) : y = x$$




$$\mathcal{A} = \int_1^2 \left( x - \frac{x^3 - 1}{x^2} \right) dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\bigg|_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}\ \text{u}^2$$