Probabilités

Les probabilités sont nées à propos des jeux de hasard au 17ème siècle et sont devenues indispensables dans de très nombreux domaines de l'activité scientifique, parmi lesquels on peut citer l'économie, la sociologie, la psychologie, la génétique,...

La théorie des probabilités traite des expériences dont les résultats dépendent du hasard. Les probabilités sont des grandeurs servant à évaluer les chances qu'un phénomène se produise.

1. Calculs de probabilités par dénombrement

Exemple d'introduction

On lance un dé équilibré.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir 6 ?

1 chance sur 6 $\Rightarrow \frac{1}{6} = 0,1\overline{6} \cong 16,67\%$

b) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

2, 4 ou 6 $\Rightarrow$ 3 chances sur 6 $\Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$

Exemple

On tire 5 cartes d'un jeu de poker (52 cartes). Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux fois rois.

$C^{52}_{5} = 2598960$; $C^{4}_{2} \cdot C^{48}_{3} = 103776$

$\Rightarrow \frac{103776}{2598960} \cong 4\%$

Définition intuitive

La formule de Laplace définit intuitivement la probabilité d'un événement :

$$\boxed{\text{Probabilités} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}}$$

Remarques

On remarque qu'une probabilité peut se donner de trois manières différentes :

- fraction (qu'on réduira si nécessaire)
- code à virgule
- pourcentage (souvent arrondi à 2 décimales)

Attention

Cette définition ne peut s'appliquer que si les cas possibles ont tous la même probabilité de se produire. on dit alors qu'ils sont **équiprobables**.

On utilise souvent les méthodes de l'analyse combinatoire pour dénombrer les cas favorables et les cas possibles.

N'importe quel processus où intervient le hasard, comme lancer en l'air une pièce de monnaie, lancer un dé, tirer une carte d'un jeu de cartes, déterminer si un article manufacturé est défectueux ou mesurer la pression artérielle d'un individu, est une **expérience**. La conséquence d'une expérience est une **issue**. L'ensemble U de toutes les issues possibles d'une expérience donnée est **l'univers** de l'expérience.

Définitions

a) Expérience aléatoire

Une expérience est aléatoire si

- le résultat ne peut pas être prédit avec certitude
- on sait à l'avance quels sont les résultats possibles

Chaque résultat d'une expérience aléatoire est aussi appelé **réalisation** ou **issue**.

b) Univers

L'univers d'une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes les issues possibles. On le note U.

c) Événement

Un événement est un sous-ensemble de l'univers U. C'est donc un ensemble d'issues possibles, mais pas forcément de toutes les issues possibles.

Exemple 1

Si l'expérience consiste à lancer en l'air une pièce de monnaie et que nous désignions par F ou P l'issue consistant à obtenir, respectivement, face ou pile, alors l'univers U peut être désigné par :

$$U = \{F, P\}$$

Exemple 2

Expérience aléatoire : lancer un dé équilibre.

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Événements possibles :

a) A = "obtenir 6" = $\{6\}$

b) B = "obtenir un nombre pair" = $\{2;4;6\}$

c) C = "obtenir un nombre plus grand que 4" = $\{5;6\}$

d) D = "obtenir un nombre positif" = $\{1;2;3;4;5;6\}$

e) E = "obtenir un nombre négatif" = $\{\ \} = \emptyset$

Exemple 3

L'expérience consiste à lancer deux fois un dé.
Si l'on s'intéresse au nombre obtenu à chaque lancer, l'univers est formé de $6^2 = 36$ couples.

$$U = \{(1;1); (1;2); (1;3); (1;4); ...; (6;4); (6;5); (6;6)\}$$

Le sous-ensemble A de U

$$A = \{(1;1); (2;2); (3;3); (4;4); (5;5); (6;6)\}$$

est l'événement "*les deux dés donnent le même nombre*".

On dit que l'événement A est **réalisé** si les deux dés donnent le même nombre et qu'il n'est **pas réalisé** dans le cas contraire.

L'événement U est toujours réalisé, car il contient toutes les issues possibles. On l'appelle **événement certain**.

L'événement $\emptyset$ (l'ensemble vide) n'est jamais réalisé, car il ne contient aucune issue possible. On l'appelle **événement impossible**.

d) Issues équiprobables

Les issues d'une expérience aléatoire sont équiprobables si elles ont la même chance (ou probabilités) de se produire.

Exemples

— Lancer un dé équilibre $U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ toutes ces issues sont équiprobables.

— Lancer d'une pièce de monnaie équilibrée : $U = \{Pile; Face\}$ équiprobables.

— Note au prochain test de probabilités : $U = \{1; 1{,}5; 2; 2{,}5; ...; 6\}$ PAS équiprobables.

Opérations sur les événements

a) L'événement **contraire** de A est $U \setminus A$. On le note $\overline{A}$. Il se réalise chaque fois que A ne se réalise pas.

b) L'événement A **ou** B est $A \cup B$. Il se réalise chaque fois que A se réalise ou que B se réalise (ou que les deux se réalisent).

c) L'événement A **et** B est $A \cap B$. Il se réalise chaque fois que A et que B se réalisent simultanément.

d) Deux événement A et B qui ne peuvent pas se réaliser simultanément sont **incompatibles**. On a alors $A \cap B = \emptyset$ (A et B n'ont pas d'issues communes).

Exemple

On lance un dé.

L'univers est $U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

L'événement "obtenir un multiple de 3" est $A = \{3; 6\}$

L'événement "obtenir un nombre pair" est $B = \{2; 4; 6\}$

L'événement "obtenir un nombre inférieur à 3" est $C = \{1; 2\}$

L'événement contraire de A est $\overline{A} = \{1; 2; 4; 5\}$

L'événement A **ou** B est $A \cup B = \{2; 3; 4; 6\}$

L'événement A **et** B est $A \cap B = \{6\}$

L'événement A **et** C sont incompatibles car $A \cap C = \emptyset$

Axiomes du calcul des probabilités

A chaque événement A de U, on associe un nombre réel $P(A)$ satisfaisant les axiomes de Kolmogorov :

1) $P(A) \geq 0$
2) $P(U) = 1$
3) Si A et B sont incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Le nombre $P(A)$ est alors appelé **probabilité** de l'événement A.
L'axiome 3 se généralise à plusieurs événements incompatibles 2 à 2.

Propriétés des probabilités

1) $0 \leq P(A) \leq 1$ ← La probabilité se trouve toujours entre 0 et 1, donc entre 0% et 100%
2) $P(U) = 1$
3) $P(\emptyset) = 0$ 100% − P(A) : complémentaire
4) $P(\overline{A}) = P(U - A) = 1 - P(A)$, et sa conséquence directe $P(\emptyset) = 0$ → $\bar{A}$: A ne se réalise pas
5) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
6) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
7) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
8) $P(A - B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

La probabilité associée à A mesure la proportion de A dans l'univers U. C'est comme si on considérait que U avait une aire de 1. On peut retrouver rapidement toutes ces propriétés par des considérations sur les aires.

Remarque

Lorsque U est un ensemble fini, il suffit d'attribuer un nombre entre 0 et 1 à chaque événement élémentaire de manière à ce que la somme des probabilités associées aux événements élémentaires soit égale à 1.

Calcul de probabilités lorsque toutes les issues sont équiprobables

Si toutes les issues sont équiprobables (donc tous les éléments de l'univers ont la même probabilités de se produire), on peut calculer la probabilité d'un événement E avec la formule suivantes :

$$\boxed{\mathrm{P(E)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{\text{nombre d'éléments dans E}}{\text{nombre d'éléments dans U}} = \frac{|E|}{|U|}}$$

Pour dénombrer les cas favorables et les cas possibles lors d'expérience aléatoire plus complexes, on utilise les outils d'analyse combinatoire.

Exemple 1

On lance trois fois un dé équilibré et on écrit le résultat sous la forme d'un nombre à 3 chiffres.

Calculer la probabilité des événements suivants :

A : "obtenir un nombre inférieur à 200"

B : "obtenir un multiple de 2"

cas possibles : $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

cas favorables pour A : $1 \cdot 6 \cdot 6 = 36 \Rightarrow P(A) = \frac{36}{216} = \frac{1}{6} \cong 0,17$

cas favorables pour B : $6 \cdot 6 \cdot 3 = 108 \Rightarrow P(B) = \frac{108}{216} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$

Exemple 2

On tire 2 cartes d'un jeu de 52 cartes.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir 2 coeurs ?

Cas possibles : $C_2^{52} = 1326$

Cas favorables : $C_2^{13} = 78$

$\Rightarrow P(\text{2 coeurs}) = \frac{78}{1326} \cong 5,88\%$

b) Quelle est la probabilité d'obtenir 2 rois ?

Cas favorables : $C_2^4 = 6$, cas possibles : inchangé $\Rightarrow 1326$

$\Rightarrow P(2 \text{ rois}) = \frac{6}{1326} \approx 0{,}45\%$

c) Quelle est la probabilité d'obtenir l'as de pique et le 10 de trèfle ?

Cas favorables : 1 : $(C_1^1 \cdot C_1^1 = 1)$

$\Rightarrow P(\text{as de pique et 10 de trèfle}) = \frac{1}{1326} \approx 0{,}08\%$

Exemple 3

On tire 5 cartes d'un jeu de 36 cartes.

Calculer la probabilité des événements suivants :

A : "tirer les 4 as"

B : "tirer 5 cartes de la même couleur (= famille)"

C : "tirer au moins un as"

Cas possibles : $C_5^{36} = 376\,992$

$|A| = C_4^4 \cdot C_1^{32} = 32 \Rightarrow P(A) = \frac{32}{376\,992} \approx 0{,}008\%$

$|B| = C_1^4 \cdot C_5^9 = 504 \Rightarrow P(B) = \frac{504}{376\,992} \approx 0{,}13\%$

$|C| = \underbrace{376\,992}_{\text{tout}} - \underbrace{C_5^{32}}_{\text{aucun as}} = 175\,616 \Rightarrow P(C) = \frac{175\,616}{376\,992} \approx 46{,}58\%$

sauf

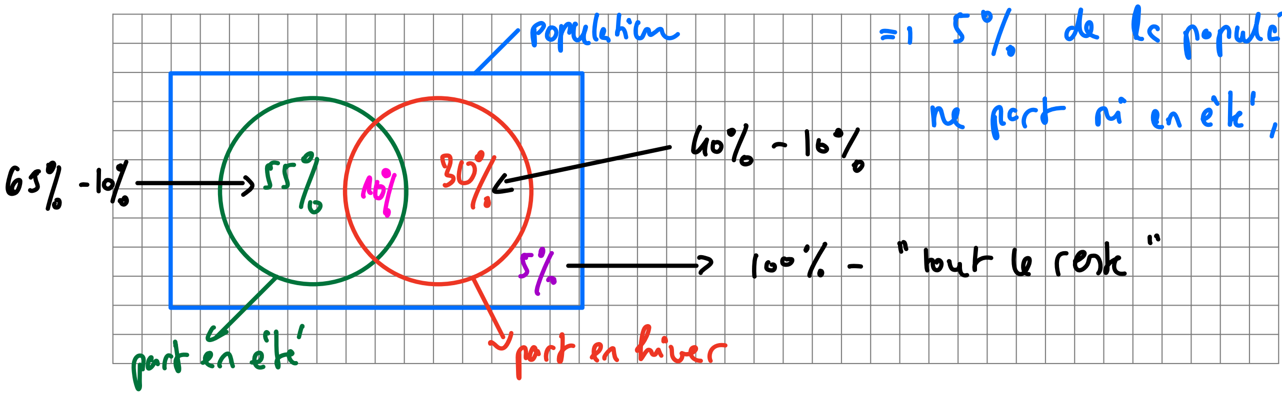
On peut aussi faire : $P(C) = \underbrace{100\% - P(\text{aucun as})}_{\text{(complémentaire)}} = 100\% - \frac{C_5^{32}}{C_5^{36}} \approx 46{,}58\%$

2. Représentation à l'aide d'un diagramme de Venn

Exemple 1

Un sondage a révélé que 65% de la population d'un pays part en vacances en été, et 40% part en vacances en hiver. On sait également que 10% de cette population part en vacances en été et en hiver.

Déterminer le pourcentage de la population qui ne part pas en vacances ni en été, ni en hiver.



⇒ 5% de la population ne part ni en été, ni en hiver

Exemple 2

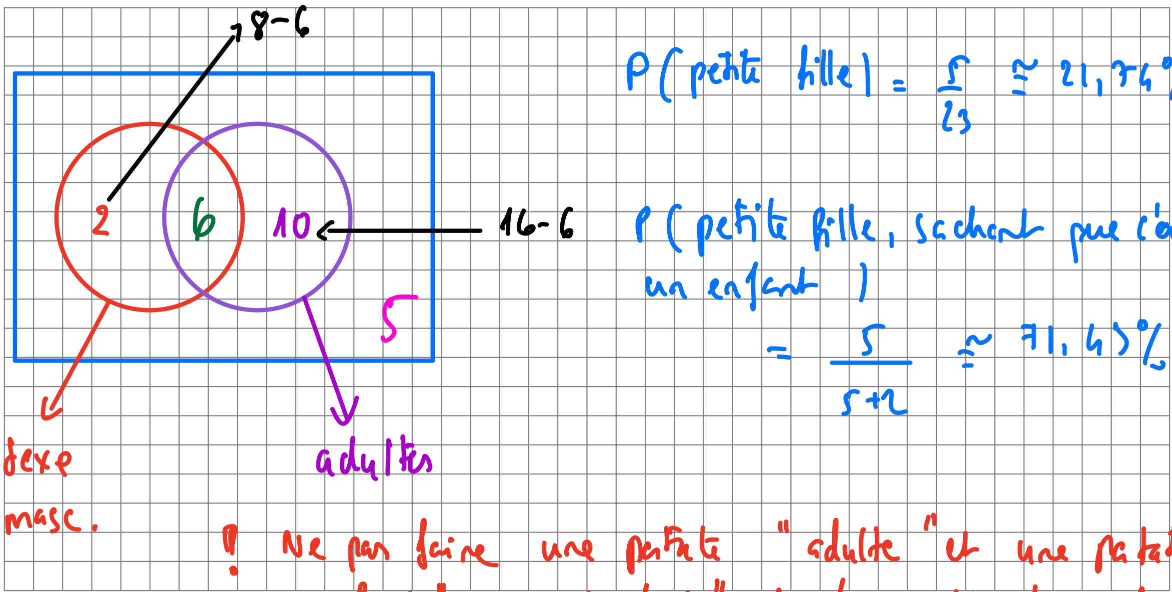
Dans un immeuble, il y a 23 habitants. Parmi eux, il y a 6 hommes adultes, 7 enfants, et 15 personnes de sex féminin.

↳ 23 - 15 = 8 masc

⇒ 23 - 7 = 16 adultes

a) Quelqu'un entre dans la maison. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une petite fille ?

b) On s'aperçoit que cette personne est un enfant. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une petite fille ?



$P(\text{petite fille}) = \frac{5}{23} \approx 21{,}74\%$

$P(\text{petite fille, sachant que c'est un enfant}) = \frac{5}{5+2} \approx 71{,}43\%$

! Ne pas faire une patate "adulte" et une patate "enfant", car "enfant" est le complémentaire de "adulte"

Exemple 3

350 personnes participent à une conférence. Au moment de leur inscription, on leur a demandé les langues qu'ils étaient capables de comprendre.

On sait que 120 personnes comprennent au moins le français, 200 personnes comprennent au moins l'anglais et 80 personnes comprennent au moins l'allemand. On sait de plus que 30 personnes comprennent au moins le français et l'anglais, et que 30 personnes comprennent seulement l'anglais et l'allemand. 5 personnes comprennent les 3 langues, et tous ceux qui comprennent le français et l'allemand comprennent également l'anglais.

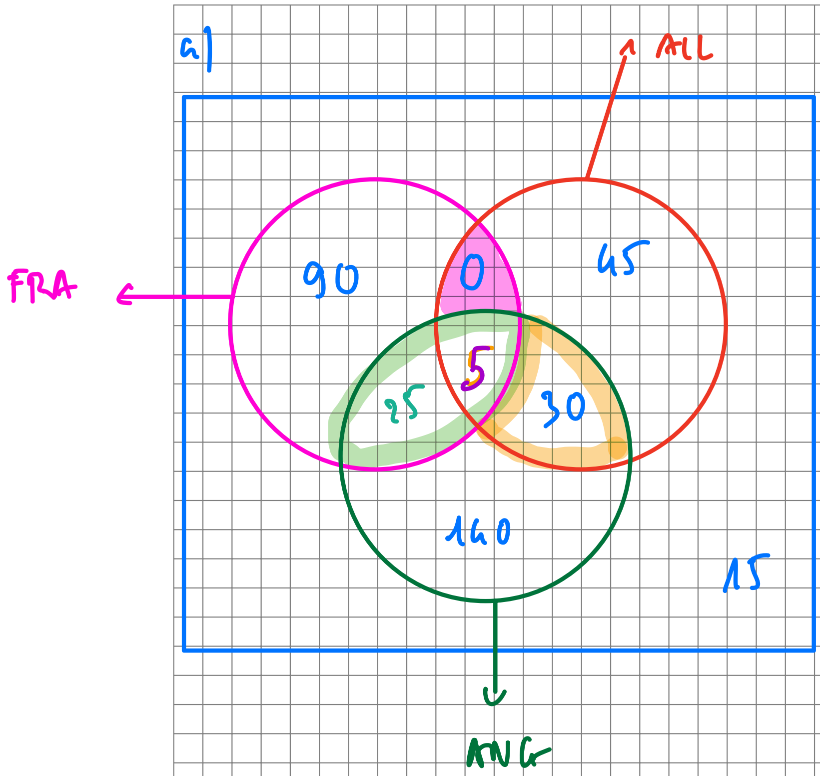
a) Représenter cette situation sous forme d'un diagramme de Venn.

b) Combien de personnes ne comprennent aucune des trois langues ?

c) Quel pourcentage des participants à la conférence comprend exactement 2 des trois langues ?

d) Parmi les personnes comprenant l'anglais, quel pourcentage comprend les 3 langues ?

a)



b) 15 personnes

c) $\frac{25+30+0}{350} \simeq 15,71\,\%$

d) $\frac{5}{200} = 2,5\,\%$

3. Probabilité conditionnelle

Définition de la probabilité conditionnelle

La probabilité d'un événement peut changer si l'on dispose d'une information sur le résultat obtenu.

Exemples

a) On lance un dé équilibré.

— Probabilité d'obtenir un 6 ? $\frac{1}{6}$

— Probabilité d'obtenir un 6 si l'on sait que le résultat est pair ? $\frac{1}{3}$

b) On s'intéresse à la température maximale d'une journée à la Tour-de-Peilz. La probabilité qu'il fasse au moins 20 degrés est-elle modifiée si l'on sait qu'on est en hiver ?

Oui ! (Même si on ne sait pas la calculer, on sait qu'elle va changer)

Probabilité conditionnelle (probabilité de A sachant B)

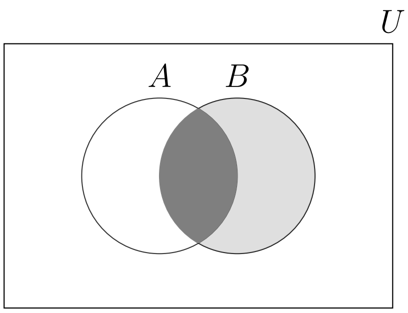
Soit A et B deux événements d'un univers U. On suppose que $P(B) \neq 0$. La probabilité que l'événement A se réalise, **sachant que** l'événement B de probabilité non nulle est réalisé s'appelle la probabilité conditionnelle de A sanchant B, et se note $P(A|B)$.

Calcul d'une probabilité conditionnelle lorsque les issues sont équiprobables

Si toutes les issues sont équiprobables, on peut calculer les probabilités en dénombrant les cas favorables et les cas possibles. On va faire de même pour une probabilité conditionnelle, en utilisant la formule suivantes :

inter

$$\boxed{P(A|B) = \frac{\text{nombre de cas vérifiant } A \text{ et } B}{\text{nombre de cas vérifiant } B} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$



Remarques

Au dénominateur, on n'a plus le nombre d'éléments dans l'univers complet, mais le nombre d'éléments de B. On parle alors d'univers restreint.

Il faut imaginer qu'on élimine toutes les issues qui deviennent impossibles maintenant qu'on sait que B est réalisé. Il ne reste donc plus que les issues dans B. C'est notre nouvel univers, et on choisira les cas favorables parmi ceux-ci seulement. => en haut, on a bien $|A \cap B|$ et non $|A|$

On a la formule équivalente suivante qui est aussi valable sans l'hypothèse $P(B) \neq 0$.

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)}$$

Exemple

On jette deux dés l'un après l'autre. On considère les événements suivants :

A : "la somme des deux résultats vaut 8 "
B : "on obtient 2 résultats différents"
C : "le premier résultat est un nombre impair"

Calculer $P(A)$, $P(A|B)$, $P(A|\bar{B})$, $P(B|A)$, $P(A|C)$ et $P(A|\bar{C})$.

$|U| = 6 \cdot 6 = 36$

$A = \{2-6 ; 6-2 ; 3-5 ; 5-3 ; 4-4\} \Rightarrow |A| = 5$

$|B| = 6 \cdot 5 = 30$

$|C| = 3 \cdot 6 = 18$

$\Rightarrow P(A) = \frac{5}{36} \cong 13,89\%$

$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{4}{30} \cong 13,33\%$

$P(A|\bar{B}) = \frac{|A \cap \bar{B}|}{|\bar{B}|} = \frac{1}{6} \cong 16,67\%$

$6 \leftarrow 36-30$ ou $6 \cdot 1$

$P(B|A) = \frac{|B \cap A|}{|A|} = \frac{4}{5} = 80\%$

$P(A|C) = \frac{|A \cap C|}{|C|} = \frac{2}{18} \cong 11,11\%$

$P(A|\bar{C}) = \frac{|A \cap \bar{C}|}{|\bar{C}|} = \frac{3}{18} \cong 16,67\%$

$18 \rightarrow 36-18$

4. Représentation à l'aide d'un arbre

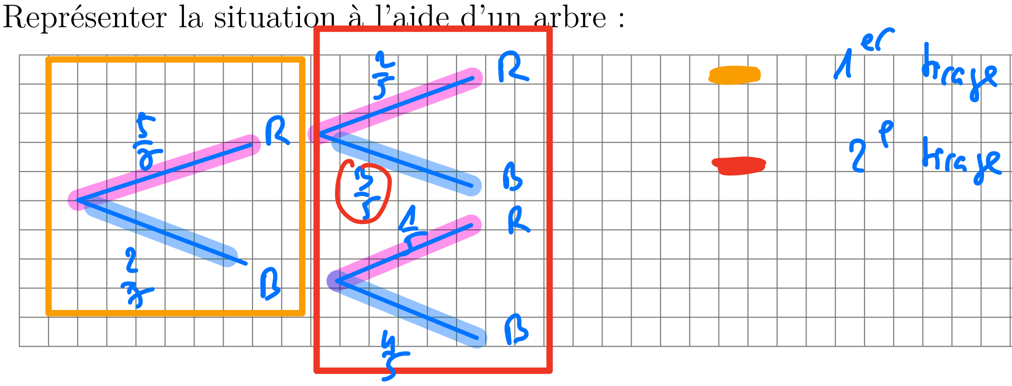
Lorsque les issues ne sont pas équiprobables, on ne peut plus utiliser les outils de combinatoire pour calculer des probabilités. On va alors représenter la situation à l'aide d'un arbre.

Cette méthode est utile pour calculer des probabilités lorsque l'expérience aléatoire consiste en des **épreuves successives**.

Exemple 1

Une première urne contient 5 billes rouges et 2 billes bleues. Une deuxième urne contient 1 bille rouge et 3 billes bleues. On tire une bille de la première urne, et on la place dans la deuxième urne. On tire ensuite une bille de la deuxième urne.

a) Représenter la situation à l'aide d'un arbre :



b) Quelle est la probabilité que la première bille soit rouge et la deuxième bleue ?

$\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{7} \approx 42,86\%$

c) Quelle est la probabilité que la deuxième bille soit bleue ?

$\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{5} = \frac{23}{35} \approx 65,71\%$

d) Quelle est la probabilité que la deuxième bille soit bleue, sachant que la première bille était rouge ?

$\frac{3}{5} = 60\%$

e) Quelle est la probabilité que la ~~deuxième~~ première bille ait été rouge, sachant que la ~~deuxime~~ deuxième bille était bleue ?

$P(1^e R \mid 2^e B) = \frac{P(1^e R \text{ et } 2^e B)}{P(2^e B)} = \frac{\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{5}} \approx 65,22\%$

Règles de construction et d'utilisation d'un arbre

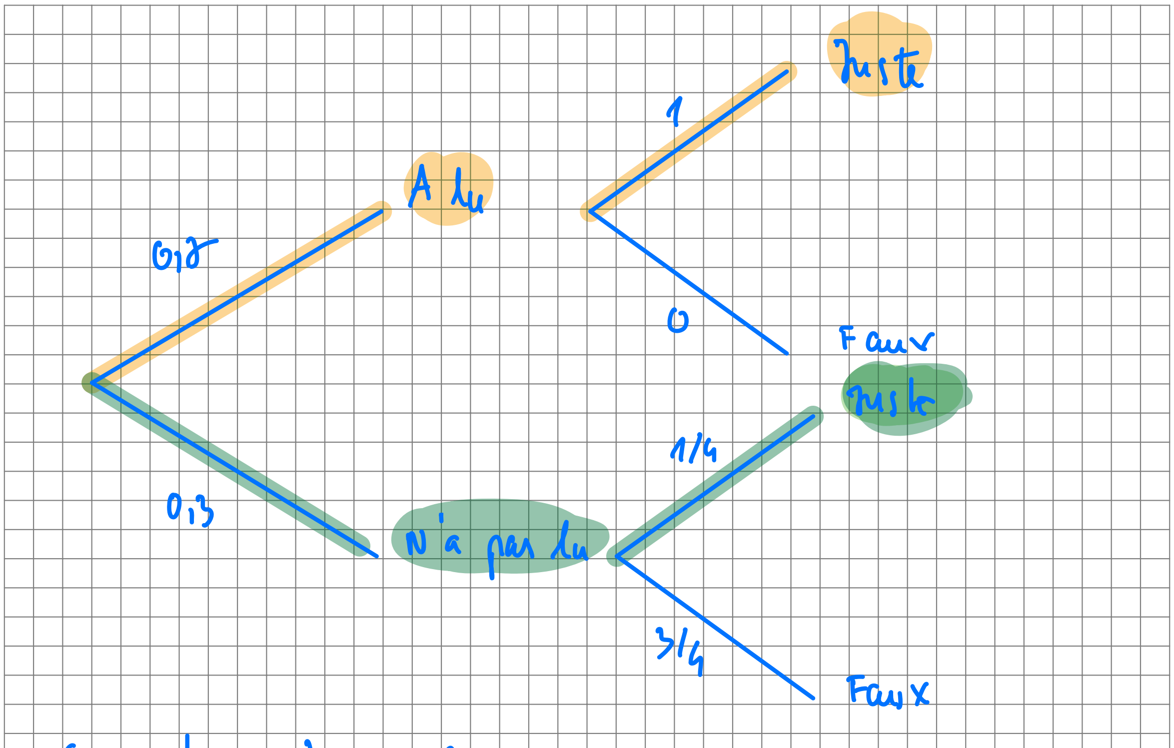
- L'arbre a autant "d'étages" qu'il y a d'expérience successives.
- Au bout de chaque branche, on note l'issue correspondant à cette expérience.
- Sur chaque branche, on note la probabilité d'obtenir cette issue, **sachant ce qui vient avant**.
- À chaque embranchement (ou sommet) de l'arbre, toutes les issues possibles **sachant ce qui vient avant** doivent être représentées par des nouvelles branches. La somme des probabilités des branches partant de chaque sommet doit donc toujours être égale à 1.
- Pour obtenir la probabilité de tous les événements successifs d'un chemin, on multiplie toutes les probabilités figurant sur ce chemin.

Exemple 2

Lors d'un contrôle de devoirs sur une lecture en français, les élèves doivent cocher la bonne réponse parmi 4 réponses différentes.

On estime que 70% des élèves ont lu leur livre, et cochent donc la bonne réponse à coup sûr. Les autres choisissent une réponse au hasard.

Si un élève a coché la bonne réponse, quelle est la probabilité qu'il ait lu le livre ?



$$P(A\text{ lu} \mid \text{Juste}) = \frac{P(A\text{ lu et Juste})}{P(\text{Juste})} = \frac{0{,}7 \cdot 1}{0{,}7 \cdot 1 + 0{,}3 \cdot \frac{1}{4}} \simeq 90{,}32\%$$

5. Événements indépendants

Définitions

Soit A et B deux événements d'un univers U.

a) On dit que A **est indépendant de** B lorsque

$$\boxed{P(A|B) = P(A)}$$

Autrement dit, le fait de savoir si B a eu lieu ne change pas la probabilité que A ait lieu.

b) On dit que A **et** B **sont indépendants** lorsque

  a) A est indépendant de B ;

  b) B est indépendant de A.

Propriétés

a) Soit A et B deux événements d'un univers U. Alors on a

$$\boxed{A \text{ est indépendant de } B \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

b) La formule $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ est symétrique, donc on a les équivalences

$$\boxed{\begin{array}{l} A \text{ est indépendant de } B \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \\ \Leftrightarrow P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A) \Leftrightarrow B \text{ est indépendant de } A \end{array}}$$

c) Ainsi, on a évidemment les équivalences

$$\begin{array}{ccc} \boxed{A \text{ est indépendant de } B \Leftrightarrow A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \Leftrightarrow B \text{ est indépendant de } A} \\ \Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow \\ \boxed{P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow P(B|A) = P(B)} \end{array}$$

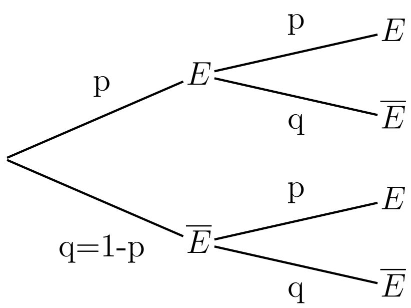
C'est pour cette raison que les les auteurs qui désirent éviter de définir l'indépendance à l'aide d'une probabilité conditionnelle utilisent l'équivalence suivante :

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

6. Probabilités de type binomiales

a) On appelle **"expérience binomiale"** (ou **"expérience de Bernouilli"**) une situation qui se visualise sous la forme d'un arbre régulier, où chaque embranchement comporte deux branches, dont les issues sont contraires l'une de l'autre (ou "complémentaires").

b) On peut visualiser cette situation en notant E (événement) l'une des issues possible et $\overline{E}$ son issue contraire, puis en notant p la probabilité de réalisation de E et q la probabilité de réalisation de $\overline{E}$ (on aura donc $q = 1 - p$).



c) On peut montrer que, si on répète n fois de suite l'expérience, alors la probabilité d'obtenir exactement k fois l'issue E est :

$$p\ (k \text{ fois } E \text{ en } n \text{ coups}) = C_k^n \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Références de ce résumé de cours :

— *Probabilités*, F. Ferrez, Gymnase de Burier

— *Monographie CRM : Probabilités*, Edition du Tricorne