Inéquations

1) Inéquation du premier degré :

a) Méthode générale :

i) Mettre les x d'un côté de l'inéquation et les "non-x" de l'autre.

ii) Réduire les termes semblables et mettre l'inconnue en évidence.

iii) Diviser les deux membres par le coefficients de x. Attention au signe !

iv) Écrire l'ensemble solutions S.

* Remarque :

Attention, si le coefficient de x est négatif, ne pas oublier de changer le sens de l'inéquation.

* Exemple :

$$4x + 3 < 6x - 5$$

$$\Leftrightarrow 4x - 6x < -3 - 5 \Leftrightarrow \boxed{-2x < -8} \Rightarrow x > 4$$

$2x = 8$

		4	
	$-$		$+$

$$\Rightarrow S = \left]4 ; +\infty\right[$$

b) Signe d'une expression du premier degré (binôme) $ax + b$

Le binôme $ax + b$ s'annule lorsque $x = -\frac{b}{a}$

Ensuite, si on résout successivement les inéquations $ax + b < 0$ et $ax + b > 0$, on peut constater que le signe d'une expression du premier degré se comporte de la même manière que l'on peut résumer de la manière suivante :

	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		Signe contraire de a	0	Signe de a	

2) Inéquations de degré supérieur à un :

La démarche générale est la suivante :

a) Mettre TOUS les termes du même côté.

b) Factoriser.

c) Étudier le signe de chacun des facteurs de la décomposition.

d) Appliquer la règle des signes pour déterminer le signe de $P(x)$

e) En déduire l'ensemble de solutions de l'inéquation.

* Exemples :

a) $(2x-5)(-3x+6) \leq 0$

b) $x^2 - 10 \geqslant 3x$

c) $(2x+1)(5-3x) \geq 0$

* Forme $(ax+b)^n$

Le signe de $(ax+b)^n$ dépend seulement du fait que n est pair ou impair.

i) n pair :

Si n est pair, le facteur est toujours ≥ 0. C'est une propriété des puissances. De plus, il n'est égal à 0 que si $ax+b=0$. On peut donc résumer le signe ainsi :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$(ax+b)^n$ avec n pair		$+$	0	$+$	

ii) n impair :

Si n est impair, on peut décomposer le facteur en deux. $(n-1)$ est pair et on pose $(ax+b)^n = (ax+b)^{n-1} \cdot (ax+b)$

Ainsi le facteur $(ax+b)^{n-1}$ est toujours ≥ 0 et donc le signe est celui de $(ax+b)$. On peut donc résumer le signe ainsi :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$(ax+b)^n$ avec n impair		signe contraire de a	0	signe de a	

* Exemple :

Résoudre $(x+4)^5 (x-3)^8 < 0$

3) Inéquations de degré deux :

Lorsque l'on doit résoudre une inéquation du deuxième degré, le signe dépend du nombre de solutions, donc du signe du discriminant Δ.

- Si $\Delta < 0$

Dans le cas où $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution.

Le signe de ce trinôme est donc le même que celui de a, $\forall x$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
ax^2+bx+c	signe de a

- Si $\Delta = 0$

Le trinôme s'écrit sous la forme : $ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

Autrement dit, il s'agit de a multiplié par un carré.

Donc le tableau de signe est :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$		$+$	0	$+$	
$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$		signe de a	0	signe de a	
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

* si $\Delta > 0$:

Nous savons que ax^2+bx+c s'annule pour les deux valeurs de x :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{où} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

et donc $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

Le tableau de signe général est :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x-x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-x_1)(x-x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$a(x-x_1)(x-x_2)$		Signe de a	0	Signe contraire de a	0	Signe de a	
ax^2+bx+c		Signe de a	0	Signe contraire de a	0	Signe de a	

Donc le trinôme est du même signe que a en dehors de ses zéros et du signe contraire entre ses zéros.

En résumé :

Le signe du trinôme $T(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ est le même que celui du coefficient a, sauf pour les valeurs de x comprises entre les zéros du trinôme, lorsqu'ils existent.

ou :

Le signe du trinôme est celui de a à l'extérieur des zéros, s'il y en a, sinon partout.