## 1.4 Produit scalaire et norme

### 1.4.1 Calculs de normes

a) Calculer la norme des vecteurs du plan ou de l'espace :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 6/10 \\ -4/5 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

b) Etablir que les vecteurs suivants sont unitaires : $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 6/\sqrt{45} \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/-3 \end{pmatrix}$.

c) On donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer

$$\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| + \|\vec{c}\|; \|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\|; \|-2\vec{a}\| + 2\|\vec{a}\|; \|\vec{a}\|\vec{c}; \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}; \left\|\frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}\right\|$$

d) On donne $\vec{d} = \begin{pmatrix} 8 \\ k-1 \end{pmatrix}$. Calculer le nombre $k$ sachant que la norme de $\vec{d}$ vaut 10.

e) On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calculer le nombre $m$ tel que

$$\|\vec{u} + m\vec{v}\| = \sqrt{82}$$

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{0+(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\|\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{3^2+8^2} = \sqrt{9+64} = \sqrt{73}$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \left\|\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{26}$

$\begin{pmatrix} \frac{6}{10} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \left\|\begin{pmatrix} \frac{6}{10} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left(\frac{6}{10}\right)^2+\left(\frac{-4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{100}+\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}} = 1$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2+2^2+(-2)^2} = 3$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{0+3^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

b) Les vecteurs sont unitaires car leur norme vaut $\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{36}{45}} = \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}} = 1$

c) $\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| + \|\vec{c}\| = \sqrt{9+16} + \sqrt{144+25} + \sqrt{36+0} = 5+13+6 = 24$

$\|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{81+1} = \sqrt{82}$

$\|-2\vec{a}\| + 2\|\vec{c}\| = \sqrt{36+64} + 2\sqrt{9+16} = 10+2\cdot 5 = 20$

$\|\vec{a}\|\,\vec{c} = \sqrt{9+16} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{9+16}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$

$\left\| \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} \right\| = \sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}} = 1$

d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 8 \\ k-1 \end{pmatrix}$ et $\|\vec{d}\| = 10 \Rightarrow \sqrt{64+(k-1)^2} = 10$

$\Leftrightarrow \sqrt{64+k^2-2k+1} = 10 \Leftrightarrow \sqrt{k^2-2k+65} = 10 \quad |^2$

$\Leftrightarrow k^2-2k+65 = 100 \Leftrightarrow k^2-2k+65-100 = k^2-2k-35 = 0$

$\Delta = 4-4\cdot 1(-35) = 4+140 = 144 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 12$

$\Rightarrow k_1 = \frac{2-12}{2} = -5$

$k_2 = \frac{2+12}{2} = 7 \quad \Rightarrow \boxed{k \in \{-5 ; 7\}}$

e) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} + m\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2m \\ 3+4m \end{pmatrix}$

On sait que $\| \vec{u} + m\vec{v} \| = \sqrt{82}$

$\Rightarrow \sqrt{(2-2m)^2+(3+4m)^2} = \sqrt{82} \quad |\,^2$

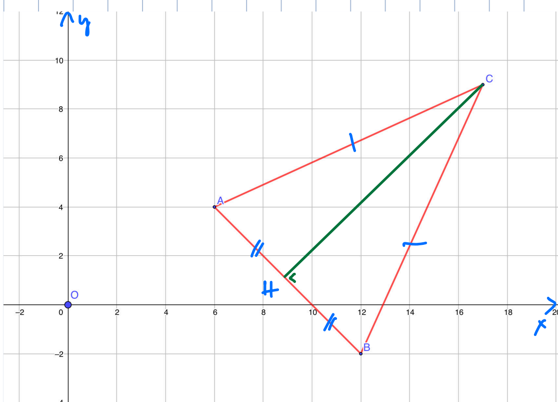
$(2-2m)^2 + (3+4m)^2 = 82$

$\Rightarrow 4 - 8m + 4m^2 + 9 + 24m + 16m^2 = 82$

$20m^2 + 16m - 69 = 0 \iff (10m+23)(2m-3) = 0$

$\Rightarrow \boxed{m \in \left\{ -\frac{23}{10} ; \frac{3}{2} \right\}}$

**1.4.3** Etablir que le triangle $ABC$ est isocèle, puis calculer son aire si $A(6;4)$, $B(12;-2)$ et $C(17;9)$.




$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$ ; $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix}$ ; $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \| \vec{AC} \| = \sqrt{11^2+5^2} = \sqrt{146}$

$\| \vec{BC} \| = \sqrt{5^2+11^2} = \sqrt{146}$

$\Rightarrow$ Donc $\Delta ABC$ est isocèle en $C$.

$\| \vec{AB} \| = \sqrt{6^2+(-6)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \quad \Rightarrow \| \vec{HB} \| = \frac{1}{2} \| \vec{AB} \| = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2}$

$= 3\sqrt{2}$

* La hauteur $CH$ : Pythagore : $\| \vec{BC} \|^2 = \| \vec{HB} \|^2 + \| \vec{CH} \|^2$

$\Rightarrow \| \vec{CH} \|^2 = \| \vec{BC} \|^2 - \| \vec{HB} \|^2 \Rightarrow \| \vec{CH} \| = \sqrt{146 - 18}$

$\Rightarrow \| \vec{CH} \| = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Aire du triangle $ABC$ : $A_{ABC} = \frac{1}{2} \| \vec{CH} \| \cdot \| \vec{AB} \| = \frac{1}{2} 8\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2}$

$\Rightarrow \boxed{A_{\Delta ABC} = 48 \ u^2}$

**1.4.4** Soit $A(7;1)$, $B(5;5)$, $C(5;-3)$ et $I(2;1)$. Prouver que les points $A$, $B$ et $C$ sont situés sur le même cercle centré en $I$.

$$\vec{AI} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{BI} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad \vec{CI} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

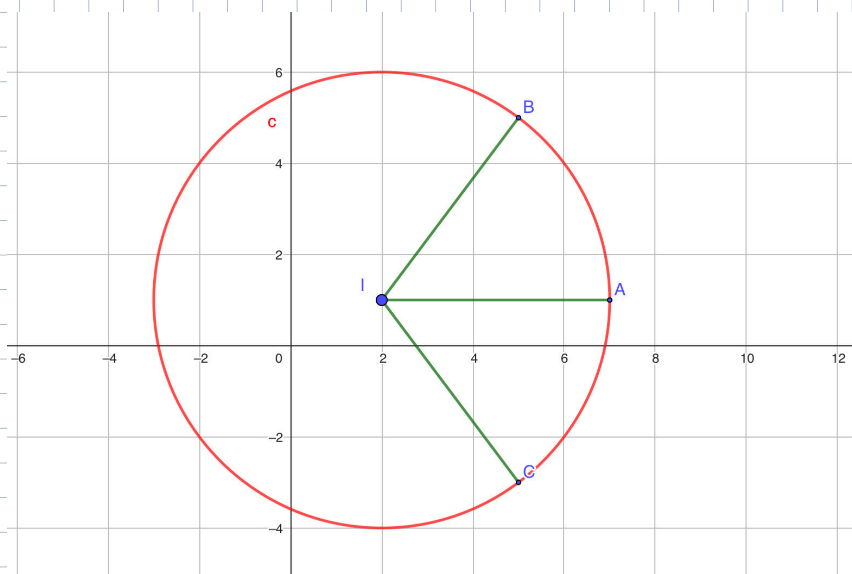
$$\Rightarrow \|\vec{AI}\| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = 5$$

$$\|\vec{BI}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

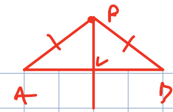
$$\|\vec{CI}\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\vec{AI}\| = \|\vec{BI}\| = \|\vec{CI}\| = 5}$$

$\therefore$ Les points sont sur un cercle de centre I et de rayon 5u.



**1.4.5** Déterminer $k$ pour que $P(2;-1)$ soit situé sur la médiatrice du segment $AB$, si $A(5;3)$ et $B(-2;k)$.



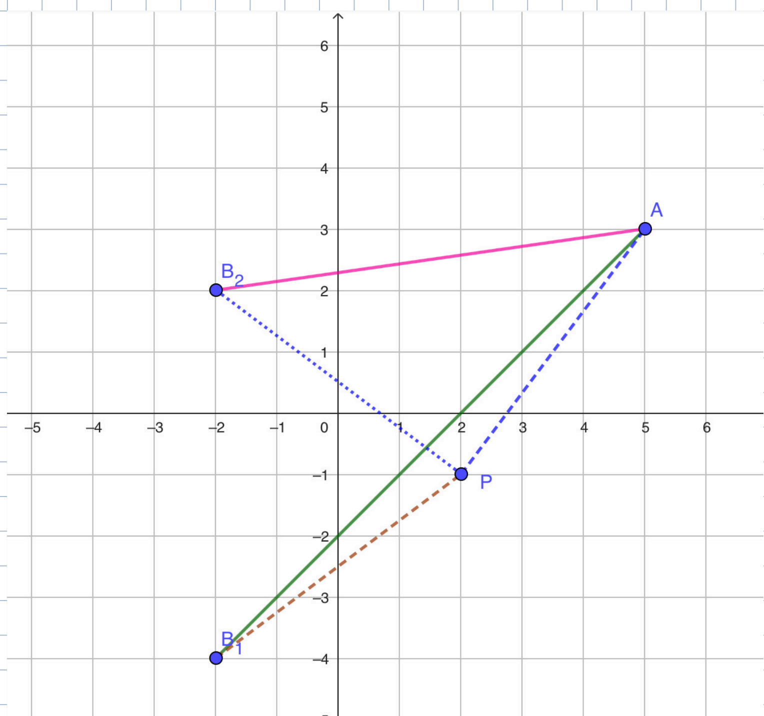

$$\vec{AP} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \; ; \; \vec{BP} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1-k \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{AP}\| = \sqrt{(-3)^2+(-4)^2} = 5 \implies \|\vec{AP}\| = \|\vec{BP}\| = 5$$

$$\implies \|\vec{BP}\| = \sqrt{4^2+(-1-k)^2} = 5 \iff 16+(-1-k)^2 = 25$$

$$\implies (-1-k)^2 = 9 \implies -1-k = \pm 3$$

- $-1-k = +3 \implies \boxed{k_1 = -4}$
- $-1-k = -3 \implies \boxed{k_2 = 2}$



**1.4.6** Soit $A(1;2)$, $B(3;8)$ et $P(x;y)$. A quelle condition sur $x$ et $y$ le point $P$ est-il situé sur la médiatrice de $AB$ ?

$\vec{AP} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$ ; $\vec{BP} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y-8 \end{pmatrix}$

Le point P est sur la médiatrice de AB $\Rightarrow \|\vec{AP}\| = \|\vec{BP}\|$

$\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y-8)^2} \quad \Big| \, {}^{\wedge}2$

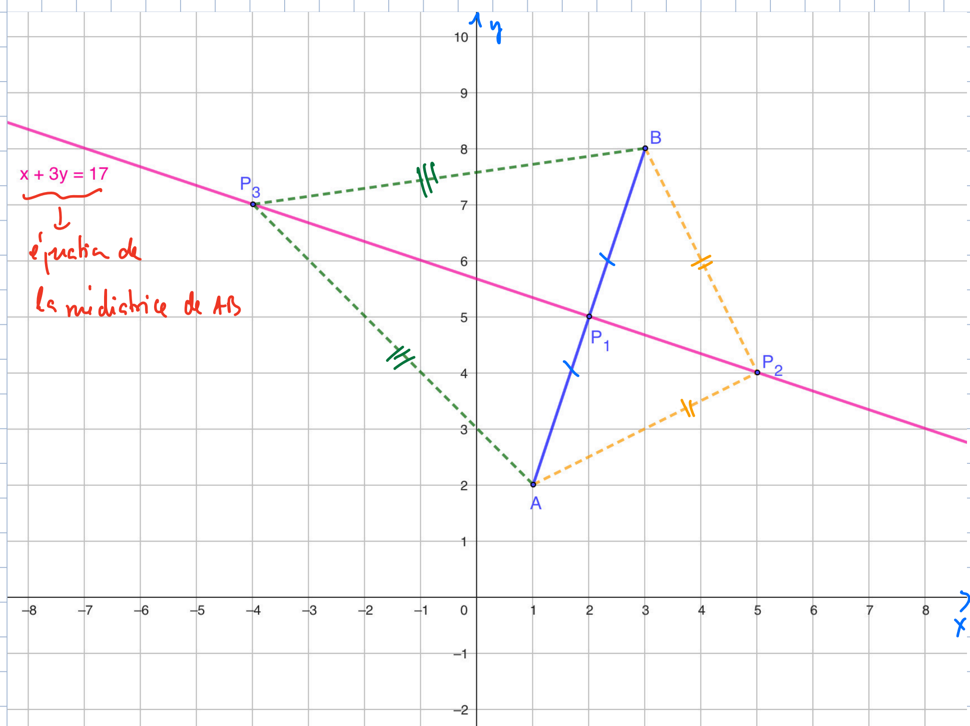
$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + (y-8)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 16y + 64$

$\Rightarrow 4x + 12y = 68 \quad \Big| \div 4$

$\Rightarrow x + 3y = 17$

Il faut que $(x ; y)$ satisfasse l'équation $\boxed{x + 3y = 17}$



**1.4.7** Déterminer le centre du cercle passant par les points $K(-3;6)$, $L(9;-10)$ et $M(-5;4)$.

On pose $C(x;y)$ centre du cercle passant par $K$, $L$ et $M$.

$$\vec{CK} = \begin{pmatrix} x+3 \\ y-6 \end{pmatrix} \; ; \; \vec{CL} = \begin{pmatrix} x-9 \\ y+10 \end{pmatrix} \; ; \; \vec{CM} = \begin{pmatrix} x+5 \\ y-4 \end{pmatrix}$$

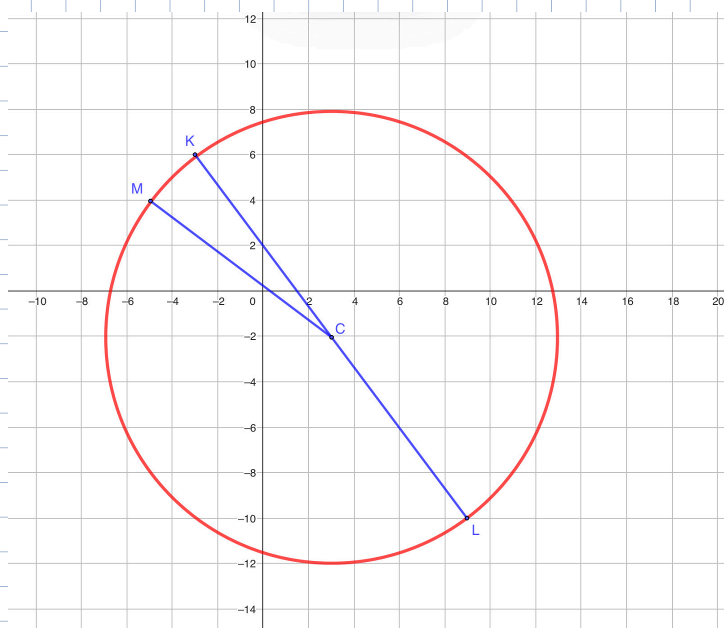
$$\Rightarrow \|\vec{CK}\| = \|\vec{CL}\| = \|\vec{CM}\| \Rightarrow \begin{cases} \|\vec{CK}\| = \|\vec{CL}\| \\ \|\vec{CK}\| = \|\vec{CM}\| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+3)^2 + (y-6)^2 = (x-9)^2 + (y+10)^2 \\ (x+3)^2 + (y-6)^2 = (x+5)^2 + (y-4)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 = x^2 - 18x + 81 + y^2 + 20y + 100 \\ x^2 + 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 = x^2 + 10x + 25 + y^2 - 8y + 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 24x - 32y = 136 \\ 4x + 4y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 17 \\ 4x + 4y = 4 \end{cases} \Rightarrow 7x = 21 \Rightarrow x = 3$$

$$\Rightarrow y = \frac{9-17}{4} = 2 \Rightarrow \boxed{C(3;-2)}$$



**1.4.9** Indiquer dans chacun des cas si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 53 \\ -41 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 41 \\ 53 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3/4 \end{pmatrix}$

Rappel : $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaire si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 7 + (-5) \cdot 3 = 14 - 15 = -1 \neq 0$

$\Rightarrow$ Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas perpendiculaires.

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 53 \\ -41 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 41 \\ 53 \end{pmatrix} = 53 \cdot 41 + (-41)(53) = 0$

$\Rightarrow$ Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires.

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \end{pmatrix} = (-8) \cdot 6 + 3 \cdot 16 = -48 + 48 = 0$

$\Rightarrow$ Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires.

d) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 5 + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \neq 0$

$\Rightarrow$ Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas perpendiculaires.

**1.4.11** Résoudre les problèmes suivants :

a) Calculer $m$, sachant que les vecteurs $\begin{pmatrix} m \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont perpendiculaires.

b) Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le nombre $k$ pour lequel les vecteurs $\vec{a} + k\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont perpendiculaires.

c) On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix}$. Déterminer un vecteur $\vec{w}$ et un nombre $k$, de telle sorte que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient perpendiculaires et que $\vec{v} = k\vec{u} + \vec{w}$.

d) Déterminer $a$ et $b$ pour que le vecteur $\begin{pmatrix} 7 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ soit à la fois orthogonal à $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ et à $\begin{pmatrix} -5 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}$.

a) $\begin{pmatrix} m \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ perpendiculaires $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} m \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 3m + (-2)\cdot 5 = 0 \Leftrightarrow 3m = 10 \Leftrightarrow \boxed{m = \frac{10}{3}}$

b) $(\vec{a} + k\vec{b})$ et $\vec{c}$ sont perpendiculaires $\Leftrightarrow (\vec{a} + k\vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2k \\ 2+k \\ -3+4k \end{pmatrix}$

Ainsi : $\begin{pmatrix} 1+2k \\ 2+k \\ -3+4k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1+2k)\,6 + (2+k)(-5) + (-3+4k)\cdot 0 = 0$

$\Leftrightarrow 6 + 12k - 10 - 5k = 0 \Leftrightarrow -4 + 7k = 0 \Rightarrow \boxed{k = \frac{4}{7}}$

c) $\vec{u}$ et $\vec{w}$ perpendiculaires $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \quad (*)$

• $\vec{v} = k\vec{u} + \vec{w} \Rightarrow \vec{w} = \vec{v} - k\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix} - k\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-k \\ 11-3k \end{pmatrix}$

De $(*) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3-k \\ 11-3k \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 1\cdot(-3-k) + 3(11-3k) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3 - k + 33 - 9k = 0$

$\Rightarrow \quad 30 - 10k = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = 3}$

$\Rightarrow \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -3-3 \\ 11-3\cdot 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}}$

d) $\begin{cases} \begin{pmatrix} 7 \\ a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} 7 \\ a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$

" à la fois orthogonal " $\Rightarrow$ système d'équations

$\begin{cases} 28 + 3a + 8b = 0 \\ -35 + 20a + 9b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 60a + 160b = -560 \\ -60a - 27b = -105 \end{cases} \Rightarrow 133b = -665$

$\Rightarrow b = -5 \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{-28+40}{3} = 4$

Donc $\boxed{a = 4}$ et $\boxed{b = -5}$