

## Fonctions quadratiques, graphes et optimisation

1) une fonction du 2<sup>e</sup> degré est une fonction de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des nombres réels

- le coefficient  $a$  doit être non nul
- le terme constant  $c$  s'appelle l'ordonnée à l'origine

2) le graphe d'une fonction du 2<sup>e</sup> degré est une parabole

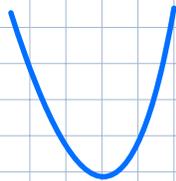
- on remplacera volontiers le codage  $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$  par

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

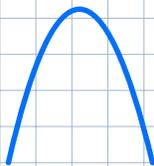
ou encore

$$y = ax^2 + bx + c$$

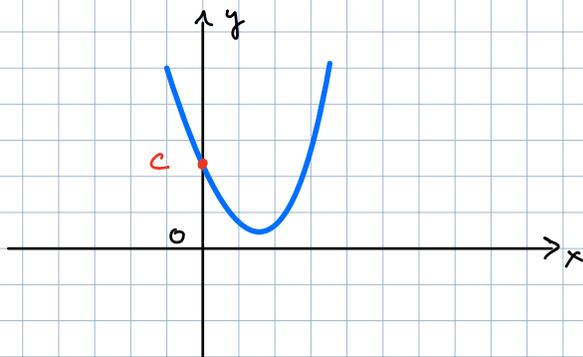
- si le coefficient  $a$  est positif, alors la parabole est convexe



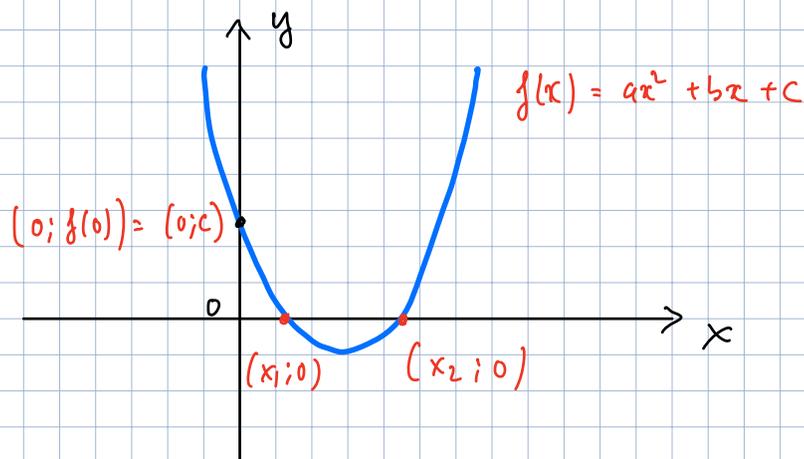
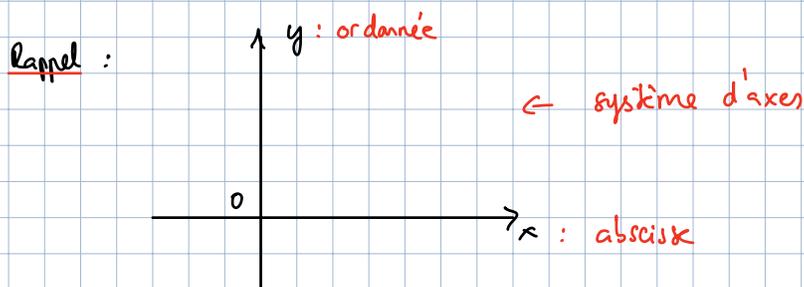
- si le coefficient  $a$  est négatif, alors la parabole est concave



- Comme  $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$ , on remarque que le coefficient constant  $c$  correspond à l'ordonnée à l'origine.



### 3) Intersection avec les axes de coordonnées



a) L'intersection avec l'axe vertical est le point  $(0; f(0)) = (0; c)$   
(axe  $Oy$ )

b) Pour déterminer les éventuels points d'intersection avec l'axe horizontal, il  
(axe  $Ox$ )  
faut résoudre l'équation  $f(x) = 0$  ( $\Rightarrow$ ) on calcule les zéros de la

fonction  $f$ .

$\Rightarrow$  On procède par factorisation ou à l'aide de la formule utilisant le discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$

Rappel :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

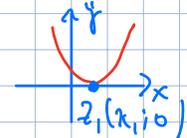
• si  $\Delta < 0 \Rightarrow$  aucun zéro  $\Rightarrow$  pas de point d'intersection avec l'axe horizontal



• si  $\Delta = 0 \Rightarrow$  un zéro (double)

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

$\Rightarrow$  un point d'intersection avec l'axe horizontal

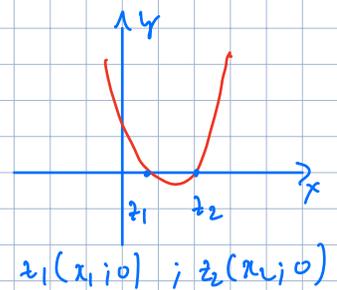


• si  $\Delta > 0 \Rightarrow$  deux zéros

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\Rightarrow$  deux points d'intersection avec l'axe horizontal



4) Sommet de la parabole, extremum de la fonction quadratique

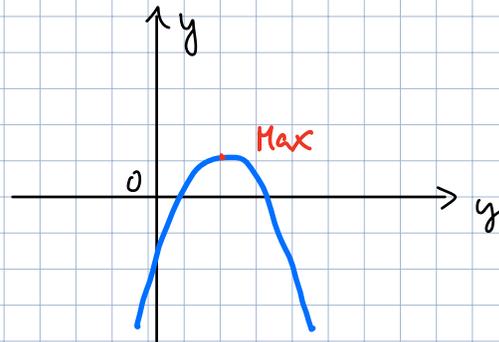
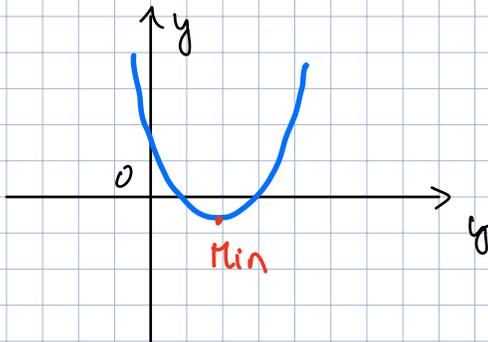
• Le sommet de la parabole a pour coordonnées :

$$S \left( \frac{-b}{2a} ; f\left(\frac{-b}{2a}\right) \right)$$

$$\text{ou } S \left( \frac{-b}{2a} ; -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

où  $\Delta = b^2 - 4ac$

- C'est un maximum de la fonction  $f$ , si  $a$  est négatif.
- C'est un minimum de la fonction  $f$ , si  $a$  est positif.

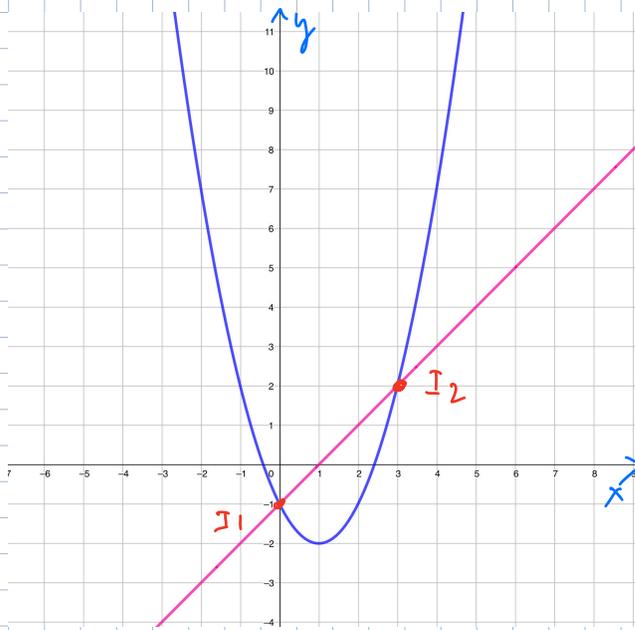


5) Axe de symétrie :

$$x = -\frac{b}{2a}$$

: droite verticale passant par le sommet.

6) Intersection entre une droite et une parabole :



Soient  $f(x) = x^2 - 2x - 1$  et  
 $g(x) = x - 1$

=> On cherche les valeurs de  $x$   
 pour lesquelles  $f(x) = g(x)$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 1 = x - 1 \quad | -x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \quad | CL$$

$$\Leftrightarrow x(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$$

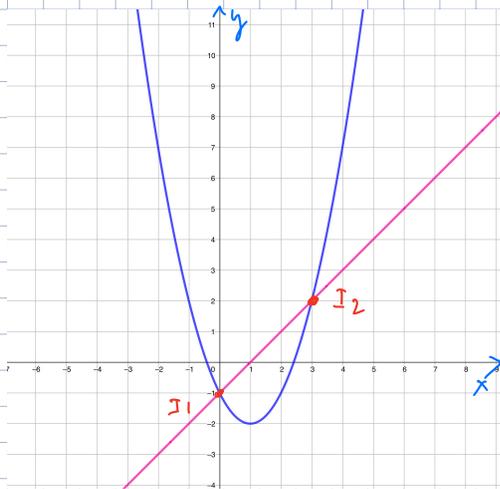
\* On remplace les  $x$  dans  $g(x)$  pour trouver la deuxième coordonnée :

$$x = 0 \Rightarrow y = x - 1 = 0 - 1 = -1 \Rightarrow I_1(0; -1)$$

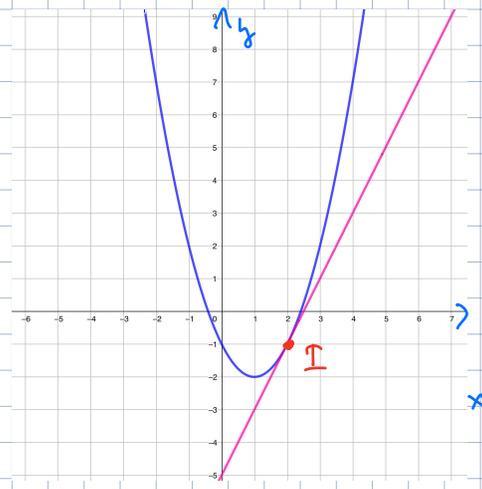
$$x = 3 \Rightarrow y = x - 1 = 3 - 1 = 2 \Rightarrow I_2(3; 2)$$

$\Rightarrow$  Deux points d'intersection :  $I_1(0; -1)$  et  $I_2(3; 2)$

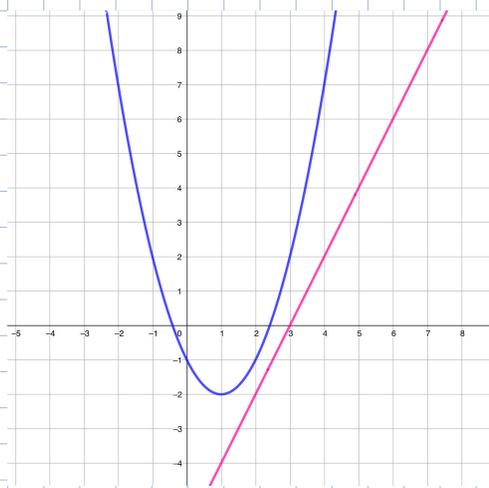
\* Lorsque l'on cherche les points d'intersection entre une droite et une parabole, trois cas sont possibles :



Deux intersections



Une intersection

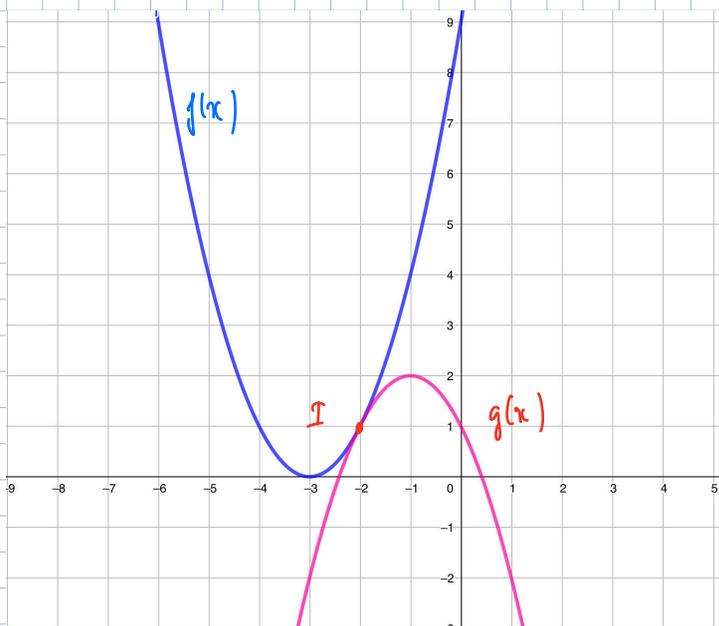


Aucune intersection

7) Intersection entre deux paraboles distinctes:

Sachant  $f(x) = x^2 + 6x + 9$  et  $g(x) = -x^2 - 2x + 1$

=> Les points d'intersection entre ces 2 paraboles ?



on cherche les valeurs de  $x$  pour lesquelles  $f(x) = g(x)$

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 = -x^2 - 2x + 1 \quad | + x^2 + 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 8x + 8 = 0 \quad | \text{CL}$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + 4x + 4) = 0 \quad | \text{CL}$$

$$\Leftrightarrow 2(x+2)^2 = 0$$

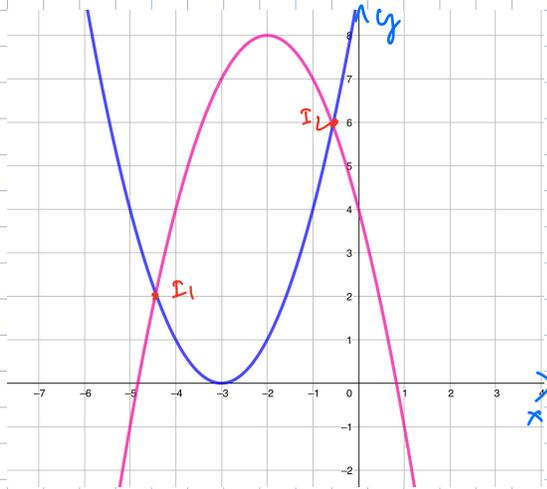
$$\Rightarrow x = -2$$

On remplace  $x = -2$  dans  $f(x)$  pour trouver la deuxième coordonnée:

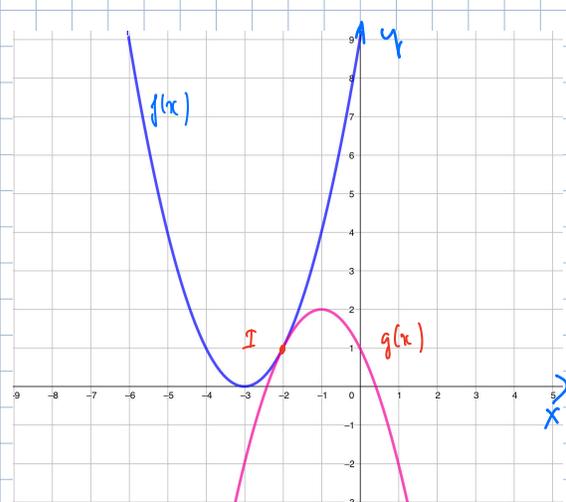
$$x = -2 \Rightarrow y = x^2 + 6x + 9 = (-2)^2 + 6(-2) + 9 = 1$$

=> Point d'intersection  $I(-2; 1)$

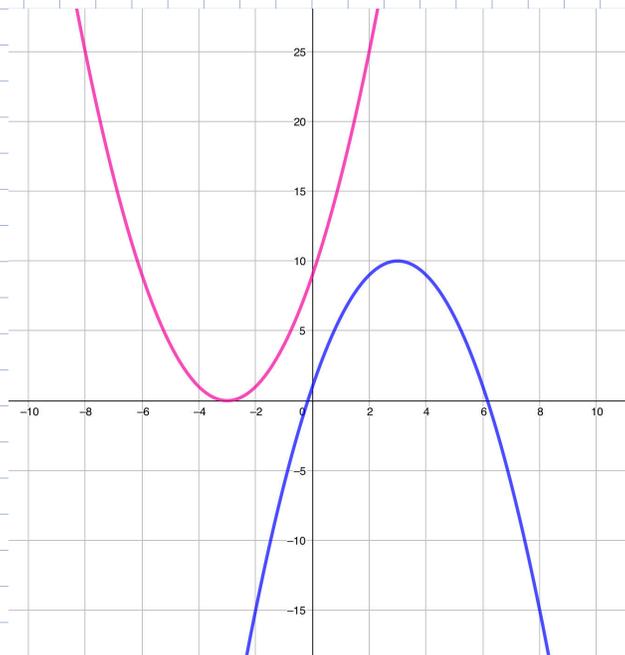
\* Lorsque l'on calcule l'intersection entre deux paraboles distinctes, trois cas sont possibles :



deux intersections



une intersection



Aucune intersection