Inéquations

3.3.23 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $2\,x + 5 \geq 1$

b) $5 - 2\,x \geq 1$

c) $-4\,a - 5 < a + 5$

d) $-(7 - 2\,x) - 8 > 0$

e) $1 - 3\,x \leq \frac{1}{3}\,x + 2$

f) $3\,(1 - x) > \frac{2}{5}\,x$

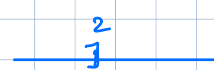
a) $2x + 5 \geqslant 1$

$\Rightarrow 2x \geqslant -4 \Rightarrow x \geqslant -2$

$\Rightarrow S = [-2\,;\,+\infty[$

b) $5 - 2x \geqslant 1$

$\Rightarrow -2x \geqslant -4 \Rightarrow 2x \leqslant 4 \Rightarrow x \leqslant 2$



$\Rightarrow S =]-\infty\,;\,2]$

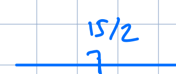
c) $-4a - 5 < a + 5$

$\Rightarrow -4a - a < 5 + 5 \Rightarrow -5a < 10 \Rightarrow a > -2$

$\Rightarrow S =]-2\,;\,+\infty[$

d) $-(7 - 2x) - 8 > 0$

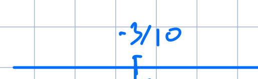
$\Rightarrow -7 + 2x - 8 > 0 \Rightarrow 2x > 15 \Rightarrow x > \frac{15}{2}$



$\Rightarrow S =]\frac{15}{2}\,;\,+\infty[$

e) $1 - 3x \leqslant \frac{1}{3}x + 2 \Rightarrow -\frac{1}{3}x - 3x \leqslant -1 + 2 \Rightarrow -\frac{10}{3}x \leqslant 1$

$\Rightarrow -10x \leqslant 3 \Rightarrow x \geqslant -\frac{3}{10}$



$S = [-\frac{3}{10}\,;\,+\infty[$

f) $3(1 - x) > \frac{2}{5}x \Rightarrow 3 - 3x > \frac{2}{5}x \Rightarrow -\frac{2}{5}x - 3x > -3$

$\Rightarrow -\frac{17x}{5} > -3 \Rightarrow -17x > -15 \Rightarrow x < \frac{15}{17} \Rightarrow S =]-\infty\,;\,\frac{15}{17}[$

3.3.24 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation proposée dans chacun des exercices ci-dessous.

a) $-3x^2 - 42x - 147 \geq 0$

b) $-4x^2 + 24x - 42 < 0$

c) $-4x^2 + 8x + 3 < 0$

d) $x^2 + 10x + 25 > 0$

e) $4x^2 > 0$

f) $-x^2 - 6x - 9 \geq 0$

g) $-x^2 + 14x - 48 > 0$

h) $-5x^2 + 30x - 40 > 0$

i) $-5x^2 - 20x - 20 > 0$

j) $-3x^2 + 42x - 143 \geq 0$

a) $-3x^2 - 42x - 147 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \quad -3(x^2 + 14x + 49) \geqslant 0$

$-3(x+7)^2 \geqslant 0$

x	$-\infty$		-7		$+\infty$
$-3(x+7)^2$		$-$	0	$-$	

$\Rightarrow \quad \underline{S = \{-7\}}$

b) $-4x^2 + 24x - 42 < 0$

$\Leftrightarrow \quad -2(\underbrace{2x^2 - 12x + 21}) < 0$

$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 21 = 144 - 168 < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$2x^2-12x+21$		$+$	
$-2(2x^2-12x+21)$		$-$	

$\Rightarrow \quad \underline{S = \mathbb{R}}$

c) $-4x^2 + 8x + 3 < 0 \iff 4x^2 - 8x - 3 > 0$

$$\Delta = 64 - 4(-4)\cdot 3 = 64 + 48 = 112 = 16\cdot 7 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4\sqrt{7}$$

$$x_1 = \frac{8 - 4\sqrt{7}}{8} = \frac{4(2-\sqrt{7})}{8} = \frac{2-\sqrt{7}}{2}$$

$$x_2 = \frac{8 + 4\sqrt{7}}{8} = \frac{4(2+\sqrt{7})}{8} = \frac{2+\sqrt{7}}{2}$$

x	$-\infty$		$\frac{2-\sqrt{7}}{2}$		$\frac{2+\sqrt{7}}{2}$		$+\infty$
$4x^2-8x-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S = \left]-\infty ; \frac{2-\sqrt{7}}{2}\right[\cup \left]\frac{2+\sqrt{7}}{2} ; +\infty\right[$$

3.3.25 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $x^3 - 4\,x^2 + x + 6 > 0$

b) $x^5 - 5\,x^3 + 4\,x \leq 0$

c) $x^3 - x^2 - x + 1 \leq 0$

d) $(x-2)\cdot(x^2+6\,x-1) > (x^2-4)\cdot(x^2+1)$

a) $x^3 - 4x^2 + x + 6 > 0$

Horner :

	1	-4	1	6
-1		-1	5	-6
	1	-5	6	0

$\Rightarrow x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x+1)\underbrace{(x^2 - 5x + 6)}$

$(x+1)(x-2)(x-3) > 0$

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-5x+6		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x^3-4x^2+x+6		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-1\,;\,2[\ \cup\ ]3\,;\,+\infty[$

b) $x^5 - 5x^3 + 4x \leq 0$

$\Leftrightarrow x\,\underbrace{(x^4 - 5x^2 + 4)} \leq 0$

$\Leftrightarrow x \cdot (x^2-4)(x^2-1) \leq 0$

$\Leftrightarrow x(x-2)(x+2)(x-1)(x+1) \leq 0$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
x		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2-1		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^5-5x^3+4x		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty\,;\,-2] \cup [-1\,;\,0] \cup [1\,;\,2]$

c) $x^3 - x^2 - x + 1 \le 0$

$\Leftrightarrow x^2(x-1) - (x-1) \le 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-1) \le 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-1) \le 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

$S =]-\infty ; -1] \cup \{1\}$

d) $(x-2)(x^2+6x-1) > (x^2-4)(x^2+1) \Leftrightarrow (x-2)(x^2+6x-1) > (x-2)(x+2)(x^2+1)$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+6x-1) - (x-2)(x+2)(x^2+1) > 0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+6x-1 - (x+2)(x^2+1)\right) > 0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+6x-1 - (x^3+x+2x^2+2)\right) > 0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+6x-1 - x^3-2x^2-x-2\right) > 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(-x^3-x^2+5x-3) > 0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left[-(x^3+x^2-5x+3)\right] > 0 \quad | \cdot (-1)$

$\Leftrightarrow (x-2)\underbrace{(x^3+x^2-5x+3)} < 0$

Horner

	1	1	-5	3
1		1	2	-3
	1	2	-3	$\boxed{0}$

$\Rightarrow (x-2)(x-1)\underbrace{(x^2+2x-3)} < 0$

$\Rightarrow (x-2)(x-1)(x-1)(x+3) < 0 \Rightarrow (x-2)(x-1)^2(x+3) < 0$

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-3 ; 1[\cup]1 ; 2[$

3.3.26 Résoudre les inéquations suivantes. Rappel : pour résoudre ce genre d'inéquation, on établie le signe de la fct associée.

a) $\dfrac{x^2-4}{x^2-x} > 0$

b) $\dfrac{x\,(2\,x-3)^2}{x^2-4} < 0$

c) $\dfrac{4\,x^2+4\,x+1}{x^2-1} > 3$

d) $\dfrac{2}{x^2} \geq 1-x$

e) $\dfrac{x-3}{x^2-3\,x+2} > 0$

f) $\dfrac{3\,x^2-7\,x-20}{x^2+4\,x-12} \leq 0$

g) $\dfrac{x+1}{x-1} \leq \dfrac{x-1}{x+1}$

h) $\dfrac{13}{2\,x+1} \geq 9-\dfrac{38}{4-x}$

i) $\dfrac{x-3}{-x^2+x-2} > 0$

j) $\dfrac{1}{x} \geq x$

k) $\dfrac{13}{2-x} \leq 7-\dfrac{4}{3\,x+1}$

l) $\dfrac{12\,x^2-13\,x-14}{x-2} < 0$

m) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2} < \dfrac{1}{x+3}$

n) $\dfrac{x}{3\,x-4} \geq \dfrac{1}{4}$

o) $\dfrac{1}{x+1} \leq \dfrac{x}{(x-2)(x+3)}$

p) $\dfrac{6}{4-x}-\dfrac{1}{1-x} \leq 1$

q) $1 \leq \dfrac{3}{2\,x-1} \leq 5$

r) $-2\,x \leq \dfrac{2\,x-1}{x} < 1$

a) $\dfrac{x^2-4}{x^2-x} > 0$ ED = $\mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{(x-2)(x+2)}{x(x-1)} > 0$

x	$-\infty$		-2		0		1		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
x^2-x		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$\dfrac{x^2-4}{x^2-x}$		$+$	0	$-$	||	$+$	||	$-$	0	$+$	

$S = \left]-\infty\,;-2\right[\cup \left]0\,;1\right[\cup \left]2\,;+\infty\right[$

b) $\dfrac{x(2x-3)^2}{x^2-4} < 0 \quad \Rightarrow \quad ED = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{x(2x-3)^2}{(x-2)(x+2)}$

x	$-\infty$		-2		0		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(2x-3)^2$		$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x(2x-3)^2}{x^2-4}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$S = \left]-\infty ; -2\right[\cup \left]0 ; \frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2} ; 2\right[$

c) $\dfrac{4x^2+4x+1}{x^2-1} > 3 \quad \Rightarrow \quad ED = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

$\Rightarrow \dfrac{4x^2+4x+1}{x^2-1} - 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{4x^2+4x+1-3(x^2-1)}{x^2-1} > 0$

$\Rightarrow \dfrac{4x^2+4x+1-3x^2+3}{x^2-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2+4x+4}{x^2-1} > 0$

$\Rightarrow \dfrac{(x+2)^2}{x^2-1} > 0$

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$(x+2)^2$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-1		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\dfrac{(x+2)^2}{x^2-1}$		$+$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

$S = \left]-\infty ; -2\right[\cup \left]-2 ; -1\right[\cup \left]1 ; +\infty\right[$

d) $\dfrac{2}{x^2} \geq 1 - x \quad \Rightarrow \quad ED = \mathbb{R}^*$

$\Rightarrow \dfrac{2}{x^2} - 1 + x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{2 - x^2 + x^3}{x^2} \geq 0$

$\Rightarrow \dfrac{x^3 - x^2 + 2}{x^2} \geq 0$

Chercher les zéros de $x^3 - x^2 + 2$ $\Rightarrow$ Horner :

	1	-1	0	2
-1		-1	2	-2
	1	-2	2	0

$\Rightarrow x^3 - x^2 + 2 = (x+1)(\underbrace{x^2 - 2x + 2})$

$\Delta < 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 > 0$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-2x+2		$+$		$+$		$+$	
x^2		$+$		$+$	0	$+$	
$\dfrac{(x+1)(x^2-2x+2)}{x^2}$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	

$\Rightarrow S = [-1 ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

f) $\dfrac{3x^2 - 7x - 20}{x^2 + 4x - 12} \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(3x+5)(x-4)}{(x+6)(x-2)} \leq 0 \qquad ED = \mathbb{R} \setminus \{-6 ; 2\}$

x	$-\infty$		-6		$-\frac{5}{3}$		2		4		$+\infty$
$3x^2-7x-20$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x^2+4x-12$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{3x^2-7x-20}{x^2+4x-12}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

$S =]-6 ; -\frac{5}{3}] \cup]-2 ; 4]$

3.3.27 Étudier le signe de chacune des fonctions trinômes du second degré f définies ci-dessous.

a) $f : x \longmapsto 3x^2 + 18x + 36$

b) $f : x \longmapsto -5x^2 + 60x - 180$

c) $f : x \longmapsto -8x^2 + 48x - 82$

d) $f : x \longmapsto -4x^2 - 80x - 391$

e) $f : x \longmapsto -4x^2 - 16x - 25$

a) $f : x \longmapsto 3x^2 + 18x + 36$

$f(x) = 3x^2 + 18x + 36$ → parabole convexe

$= 3(\underbrace{x^2 + 6x + 12})$

$\Delta = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = -12 < 0 \Rightarrow$ aucun zéro

→ $f(x)$ possède le même signe que a

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

b) $f(x) = -5x^2 + 60x - 180$ → parabole concave

$= -5(x^2 - 12x + 36) = -5(x-6)^2$

x	$-\infty$		6		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

même signe que $a = -5$

d) $f(x) = -4x^2 - 80x - 391$

$\Delta = 144$ → $x_1 = \dfrac{80 - 12}{-8} = -\dfrac{17}{2}$; $x_2 = \dfrac{80 + 12}{-8} = -\dfrac{23}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{23}{2}$		$-\frac{17}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3.3.28 Établir le tableau des signes des polynômes suivants, puis esquisser les graphes des fonctions correspondantes

a) $f(x) = x^4 - x^3 - 11\,x^2 + 9\,x + 18$

b) $f(x) = x^5 - 5\,x^4 + 10\,x^3 - 10\,x^2 + 5\,x - 1$

a) $f(x) = x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18$

On cherche les zéros de $f(x)$: $x = -1$

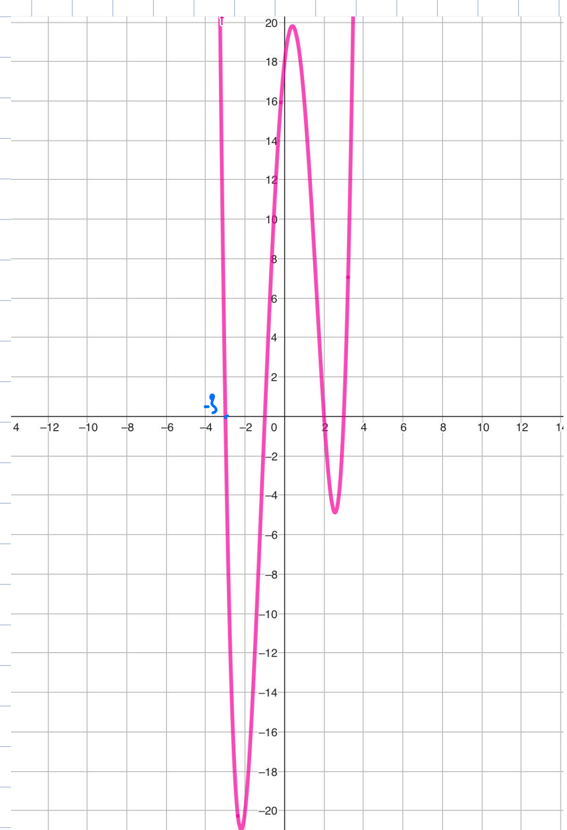
Horner :

	1	-1	-11	9	18
-1		-1	2	9	-18
	1	-2	-9	18	$\boxed{0}$

$\Rightarrow f(x) = (x+1)(x^3 - 2x^2 - 9x + 18) = (x+1)\left(x^2(x-2) - 9(x-2)\right)$

$= (x+1)(x-2)(x^2-9) = (x+1)(x-2)(x-3)(x+3)$

x	$-\infty$		-3		-1		$+2$		3		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-9		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	



3.3.29 Déterminer l'expression $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ de la fonction du 2[e] degré dont le graphe passe par les point A, B et C.

a) $A(-2;29)$, $B(3;19)$ et $C(1;5)$

b) $A(2;-17)$, $B(-3;-72)$ et $C(-2;-37)$

a) $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\begin{array}{lll} A \in f(x) \Rightarrow f(-2) = 29 \\ B \in f(x) \Rightarrow f(3) = 19 \\ C \in f(x) \Rightarrow f(1) = 5 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 4a - 2b + c = 29 \\ 9a + 3b + c = 19 \\ a + b + c = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a - 3b = 24 \\ 8a + 2b = 14 \\ c = 5 - a - b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a - 3b = 24 \\ 8a + 2b = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 8 \\ 4a + b = 7 \end{cases}$$

$$5a = 15 \Rightarrow a = 3$$

$$\Rightarrow b = a - 8 = 3 - 8 = -5 \quad \Rightarrow c = 5 - a - b = 5 - 3 + 5 = 7$$

$$\Rightarrow \underline{f(x) = 3x^2 - 5x + 7}$$