Fonctions

3.1 Ensembles et intervalles

3.1.1 Soit A une partie de $\mathbb{N}$ définie par

$$A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

Donner en notation énumérative les parties suivantes de A :

a) $B = \{x \in A \mid x \text{ est un multiple de } 3\}$.

b) $C = \{x \in A \mid x \text{ est un diviseur de } 24\}$.

c) $B \cap C$, $B - C$, $\complement_A(B) \cap \complement_A(C)$.

a) $B = \{0; 3; 6; 9\}$

b) $C = \{1; 2; 3; 4; 6; 8\}$

c) $B \cap C = \{3; 6\}$

" intersection "

$B - C = \{0; 9\}$

" B moins C "

$C_A(B) \cap C_A(C) = \{5; 7\}$

Complémentaire de B dans A

complémentaire de C dans A

$\{1; 2; 4; 5; 7; 8\} \cap \{0; 5; 7; 9\}$

3.1.2 Expliciter les ensembles suivants :

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x = 0\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{N} : (x^2 = y^2)\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+1| = 2\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x+3| \leq 2\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 = x\}$

a) $A = \{\underbrace{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x = 0}\}$

condition

Traduction : les x appartiennent à $\mathbb{R}$ tels que : $x^2 + x = 0$

$\Rightarrow x^2 + x = x(x+1) = 0 \Rightarrow$ $\underline{A = \{-1 ; 0\}}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{N} : (x^2 = y^2)\}$

$x^2 = y^2 \rightarrow y^2 \geq 0 \Rightarrow$ $\underline{B = \mathbb{Z}}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+1| = 2\}$

$\Rightarrow |x+1| = 2$ → $x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = 1$; → $x + 1 = -2 \Leftrightarrow x = -3$

$\Rightarrow$ $\underline{C = \{-3 ; 1\}}$

d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x+3| \leq 2\}$

$\Rightarrow |x+3| \leq 2$ →
- $x+3$ si $x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$ (1) $\Rightarrow x+3 \leq 2 \Leftrightarrow x \leq -1$
- $-(x+3)$ si $x+3 < 0 \Leftrightarrow x < -3$ (2) $\Rightarrow -(x+3) \leq 2 \Leftrightarrow x \geq -5$

$\Rightarrow$ $\underline{D = \{-5 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1\}}$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 = x\}$

$\Rightarrow x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1) = 0$

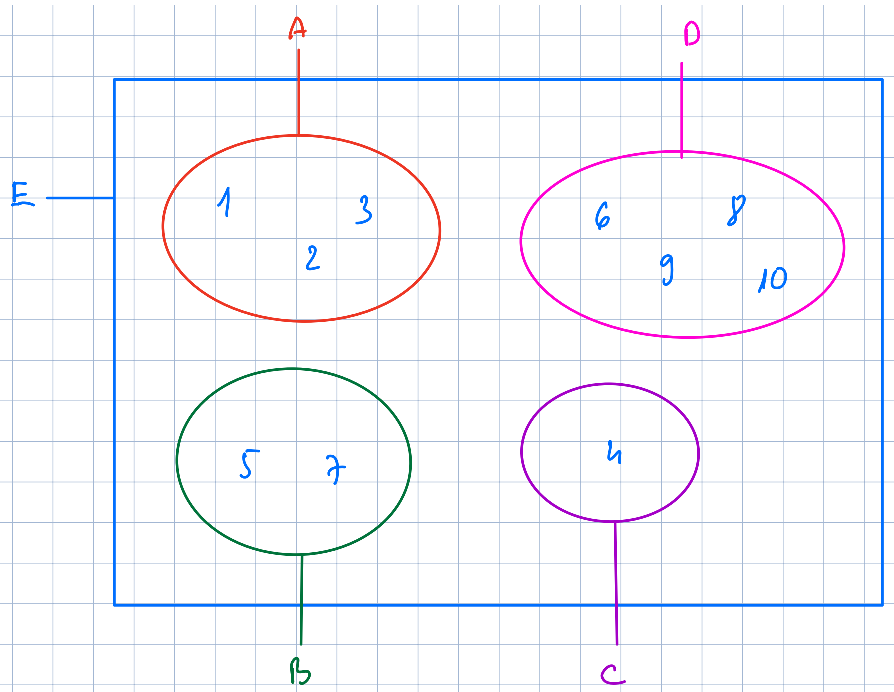
$\Rightarrow$ $\underline{E = \{-1 ; 0 ; 1\}}$

3.1.3 Soit l'ensemble

$$E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}.$$

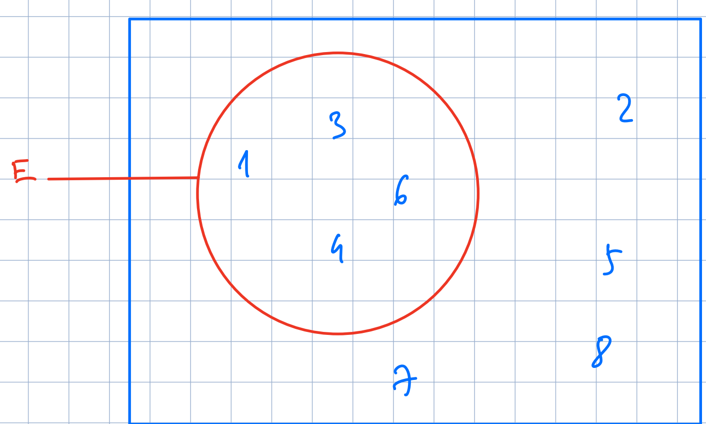
Trouver une partition de E comprenant 4 parties A, B, C, D telles que :

- $A \cup C = \{1; 2; 3; 4\}$
- $C \cup B = \{4; 5; 7\}$
- $E \cap D = \{6; 8; 9; 10\}$



3.1.4 Déterminer la partie E de $\mathbb{N}$ qui satisfait aux conditions :

- $E \subseteq \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
- $E \subseteq \{1; 3; 4; 6; 7; 8\}$
- $\{1; 3; 4; 6\} \subseteq E$



$E = \{1; 3; 4; 6\}$

3.1.5 Déterminer les sous-ensembles A et B de $\mathbb{Z}$ qui remplissent les conditions :

- $A \cup B = \subseteq \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
- $A \cap B = \emptyset$
- $\forall x \in A,\ \exists y \in B$ de sorte que $x - y = 1$ et $\forall y \in B,\ \exists x \in A$ de sorte que $x - y = 1$.

$A \cup B = \subseteq \{1;2;3;4;5;6\}$

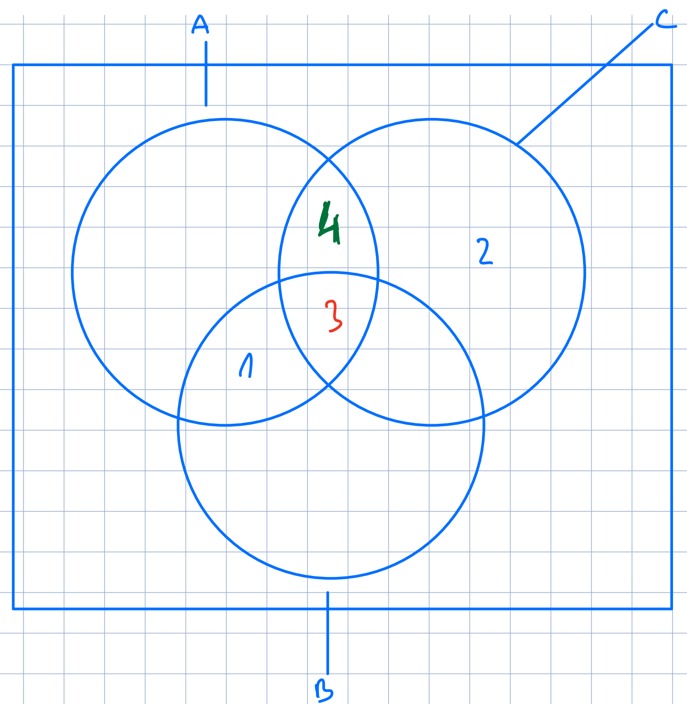
inclus dans

$A \cap B = \emptyset$ pas d'éléments en commun

$\Rightarrow A = \{2;4;6\}$ et $B = \{1;3;5\}$

3.1.6 Trouver les parties A, B et C de $\mathbb{N}$ qui remplissent les conditions :

- $1 \in A$
- $\{2; 4\} \cap B = \emptyset$
- $3 \in A \cap B \cap C$
- $4 \in A \cap C$
- $A \cap B \nsubseteq C$
- $B \cup C \nsubseteq A$
- $A \cup B \cup C = \{1; 2; 3; 4\}$



$3 \in A \cap B \cap C$

$4 \in A \cap C$

$A = \{1;3;4\}$; $B = \{1;3\}$; $C = \{2;3;4\}$

3.1.7 Décrire les ensembles suivants à l'aide d'intervalles

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 5\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leqslant x < 5\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 10\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -2 \text{ et } x \leqslant 2\}$

f) $F = \mathbb{R}$

g) $G = \{2\}$

a) $-3 \leq x \leq 5 \rightarrow A = [-3\,;\,5]$

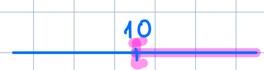
intervalle fermé

b) $4 \leq x < 5 \rightarrow B = [4\,;\,5[$

intervalle ouvert

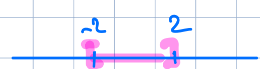
c) $x < 1 \rightarrow C =]-\infty\,;\,1[$

d) $x \geqslant 10$



$D = [10\,;\,+\infty[$

e) $x \geqslant -2$ et $x \leq 2 \iff -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow E = [-2\,;\,2]$



f) $F = \mathbb{R} \rightarrow F =]-\infty\,;\,+\infty[$

g) $G = \{2\} \rightarrow G = [2\,;\,2]$

3.1.8 Trouver deux ensembles A et B de $\mathbb{Z}$ tels que

a) $A \cup B = \{0\ ;1\ ;2\ ;3\ ;4\}$ et $A \cap B = \{\ \}$

b) $A \cup B = \{0\ ;1\ ;2\ ;3\ ;4\}$ et $A \cap B = \{2\ ;3\ ;4\}$

a) $A = \{0\ ;1\ ;2\}$

$B = \{3\ ;4\}$ par exemple $\Rightarrow$ en effet $A \cap B = \{\ \}$

b) $A = \{0\ ;2\ ;3\ ;4\}$

$B = \{1\ ;2\ ;3\ ;4\}$ par exemple $\Rightarrow$ en effet $A \cap B = \{2\ ;3\ ;4\}$

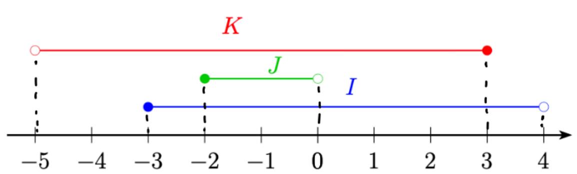
3.1.9 On donne trois intervalles I, J et K de $\mathbb{R}$. Déterminer $I \cap J$, $I \cap K$, $I - (J \cup K)$, $(I - J) \cup (I - K)$ dans les cas suivants.

a) $I = [-3\ ;\ 4[\qquad J = [-2\ ;\ 0[\qquad K =]-5\ ;\ 3]$

b) $I =]-4\ ;\ 2]\qquad J = [-2\ ;\ 3]\qquad K =]-3\ ;\ 1[$

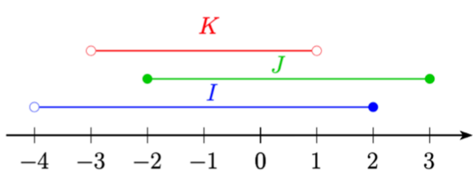
c) $I =]-5\ ;\ 3[\qquad J =]-1\ ;\ 5]\qquad K = [-3\ ;\ 4]$

a)



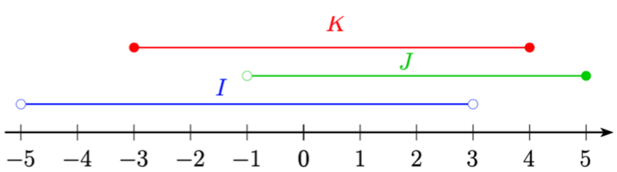
$[-2; 0[\qquad [-3; 3]\qquad]3; 4[\qquad [-3; -2[\cup [0; 4[$

b)



$[-2; 2]\qquad]-3; 1[\qquad]-4; -3]\qquad]-4; -2[\cup [1, 2]$

c)



$]-1; 3[\qquad [-3; 3[\qquad]-5; -3[\qquad]-5; -1]$