Fonctions

1 M

1) Ensembles et intervalles

a) Ensembles

Une collection d'objets est un ensemble lorsque l'on peut dire avec certitude si un objet donné appartient ou non à la collection.
Ces objets sont les éléments de l'ensemble

- Si l'élément x appartient à l'ensemble E, on écrit $x \in E$
- Si l'élément x n'appartient pas à l'ensemble E, on écrit $x \notin E$

* Sous-ensemble :

Si tous les éléments de l'ensemble A appartiennent à l'ensemble B, on dit que A est un sous-ensemble de B. On note $A \subset B$ et on lit « A strictement inclus dans B »

$A \subset B$

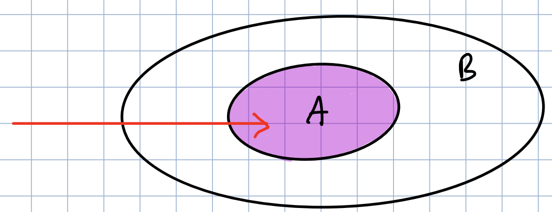


Diagramme de Venn

Remarques:

- $A \subset B$
- Si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$
- $A = B$ si et seulement si ($A \subset B$ et $B \subset A$)

Exemple :

$A = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$, $B = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$
et $C = \{3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

L'ensemble A est un sous-ensemble de B, mais A n'est pas un sous-ensemble de C

* Ensembles de nombres : Rappel

$\mathbb{N}$: ensemble des nombres naturels, $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$

$\mathbb{N}^*$: ensemble des nombres naturels non nuls, $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$

$\mathbb{Z}$: ensemble des nombres entiers (relatifs), $\mathbb{Z} = \{\dots; -1; 0; 1; \dots\}$

$\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels (fractions)

$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels

$\mathbb{R}_+$: ensemble des nombres réels positifs

$\emptyset$: ensemble vide, également noté $\{\ \}$ (ensemble qui ne contient aucun élément)

2) Intervalles réels

Si a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$, on note :

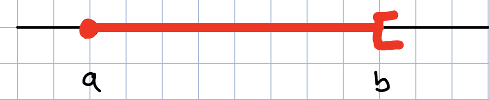
* $[a ; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

→ intervalle fermé :

* $]a ; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

→ intervalle ouvert :

* $[a \,;\, b[\; = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}$



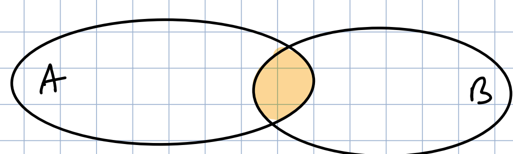
* $[a \,;\, +\infty[\; = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \}$

* $]-\infty \,;\, b[\; = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < b \}$

3) <u>Opérations sur les ensembles</u>

Soit A et B deux ensembles.

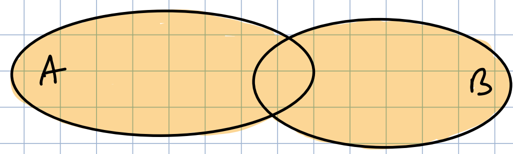
* L'intersection de A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent <u>à la fois</u> à l'ensemble A et à l'ensemble B. On note cet ensemble $A \cap B$ et on lit « A inter B »



$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ et } x \in B \}$$

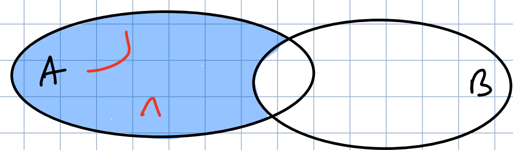
* La réunion de A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'ensemble A ou à l'ensemble B (ou les deux). On note cet ensemble

$A \cup B$ et on lit « A union B »



$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \}$$

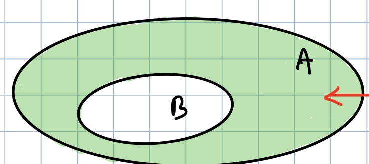
* La différence de deux ensemble A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'ensemble A mais non à l'ensemble B. On note cet ensemble $A - B$ et on lit « A moins B »



$$A - B = \{ x \in A \mid x \notin B \}$$

! L'ensemble différence $A - B$ est également noté $A \setminus B$

* Si B est un sous-ensemble de A, la différence $A - B$ est également appelée complémentaire de B dans A que l'on note $C_A(B)$.



$C_A(B) = \{ x \mid x \in A \text{ et } x \notin B \}$

Exemple :

Soit $A = \{2 ; 4 ; 6 ; 8\}$ et $B = \{3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7\}$

A inter B : $A \cap B = \{4 ; 6\}$

A union B : $A \cup B = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$

A moins B : $A - B = \{2 ; 8\}$

* Soit A et B deux sous-ensemble d'un ensemble E. On a :

1) $A \cap \emptyset = \emptyset$ et $A \cup \emptyset = A$
2) $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$
3) $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$
4) $A \cup B = A$ si et seulement si $B \subset A$
5) $A \cap B = A$ si et seulement si $A \subset B$

4) Propriétés de $\cap$ et $\cup$

Soit A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. On a :

1) $A \cup B = B \cup A$
2) $A \cap B = B \cap A$
3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
4) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

→ $\cup$ et $\cap$ sont commutatives (propriétés 1 et 2)

$\cup$ et $\cap$ sont associatives (propriétés 3 et 4)

$\cup$ est distributive par rapport à $\cap$ (propriété 5)

$\cap$ est distributive par rapport à $\cup$ (propriété 6)

! Ne pas oublier les parenthèses. Par exemple, $A \cap B \cup C$ n'a pas de sens.

5) Relation d'inclusion

Relation d'ordre entre deux ensembles A et B dans laquelle on dit que l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B si et seulement si tous les éléments de A sont aussi des éléments de B.

- Le symbole $\subseteq$ se lit : « ... est inclus dans ... » ou « ... est un sous-ensemble de .. »
  → Si on a $A \subseteq B$, cela signifie que tous les éléments de A sont dans B ou que A est égal à B

- Le symbole $\subset$ se lit : « .. est strictement inclus dans... » ou « ... est un sous-ensemble strict de ... »
  → Si on a $A \subset B$, cela signifie que tous les éléments de A sont dans B mais qu'au moins un élément de B n'est pas dans A.

Généralités sur les fonctions

Une fonction d'une variable réelle et à valeurs réelles est une application d'une partie E de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

Le plus souvent, on dit " fonction de E vers $\mathbb{R}$ " ou tout simplement " fonction". Pour une fonction de E vers $\mathbb{R}$, on utilise la notation suivante :

$$f : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

1) Ensemble de définition :

On se donne couramment une fonction au moyen d'une expression $f(x)$ en la variable x. L'ensemble de définition d'une fonction f, noté D_f (ou ED), est l'ensemble des nombres x pour lesquels $f(x)$ existe.

Lorsque l'on cherche l'ensemble de définition, on se souviendra des commandements suivants :

- Il est interdit de diviser par zéro
- Il est interdit de prendre la racine carrée d'un nombre négatif
- Il est interdit de calculer le logarithme d'un nombre négatif ou nul

2) Image

Soit f est une fonction de l'ensemble A dans l'ensemble B.

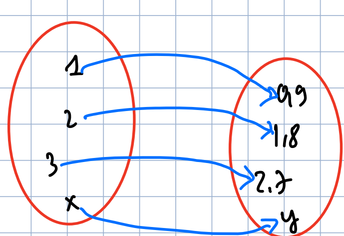
⇒ l'image de l'application f, notée $\mathrm{Im}(f)$ est le sous-ensemble de B constitué de toutes les images des éléments de l'ensemble de départ A.

* Exemple :

$$f : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & 0{,}9\,x \end{array}$$

ou $f(x) = 0{,}9\,x$

$f(1) = 0{,}9 \cdot 1 = 0{,}9$ ⇒ image de 1 est 0,9



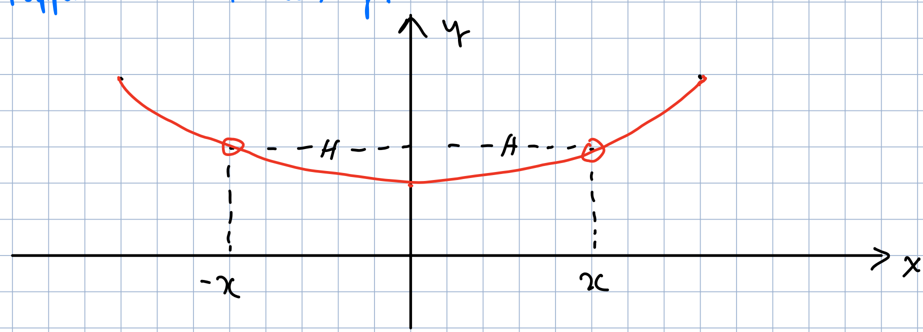
3) Graphe :

Dans le plan muni d'un système d'axes, l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;\,f(x))$ où $x \in D_f$ constitue la représentation graphique de f ou courbe représentative de f ou, plus simplement, le graphe de f

4) Parité :

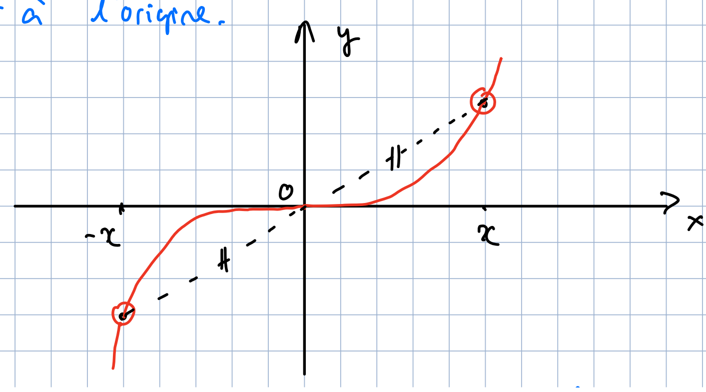
- Une fonction est dite paire si $\boxed{f(-x) = f(x)}$ pour tout $x \in D_f$.

→ La courbe représentant le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des y.

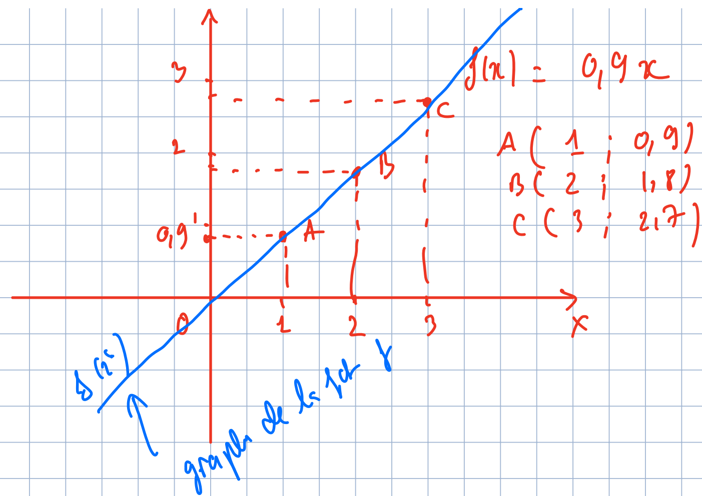


- Une fonction est dite impaire si $\boxed{f(-x) = -f(x)}$ pour tout $x \in D_f$.

→ La courbe représentant le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.



$(x \; ; \; f(x))$



Fonction affinie :

$f(x) \; (= y) = mx + h$

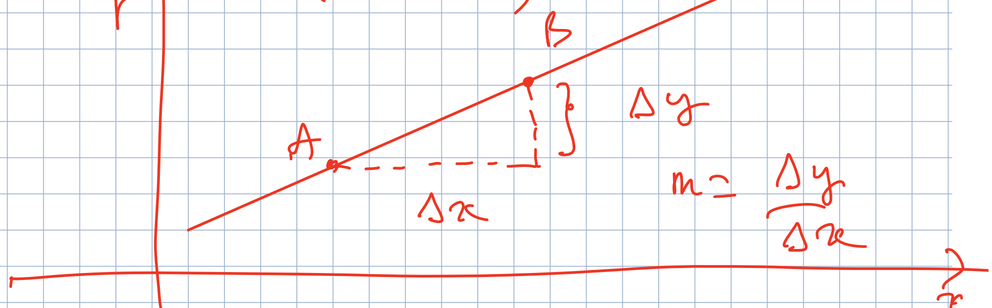
$m \downarrow$ pente

$h \downarrow$ ordonneé à l'origine

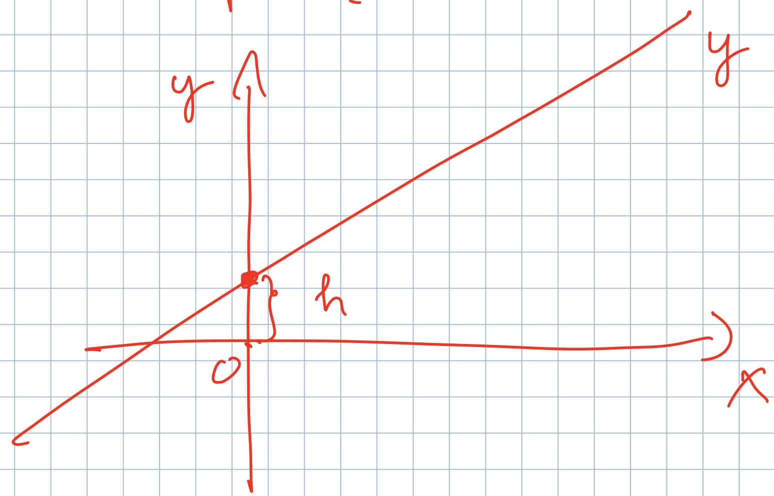
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

2 points : $A(x_A \; ; \; y_A)$

$B(x_B \; ; \; y_B)$



ordonnée à l'origine : h



$f(x) = mx + h$

L'image d'un point par la fonction f

$x = 1 \longrightarrow f(1) = ?$

image de 1 par f

$f(x) = 5x - 3$

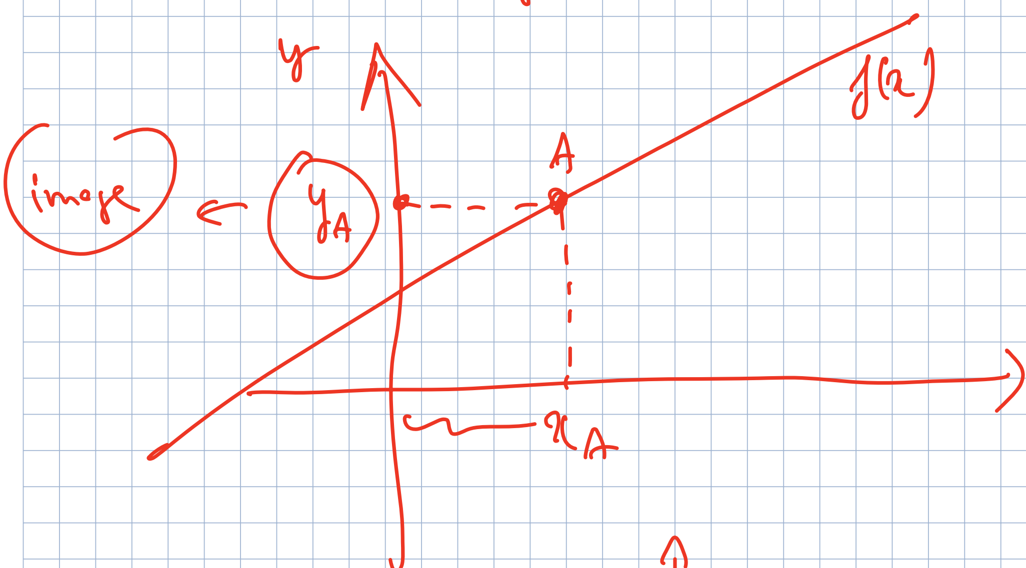
Déterminer l'image de -5 par f

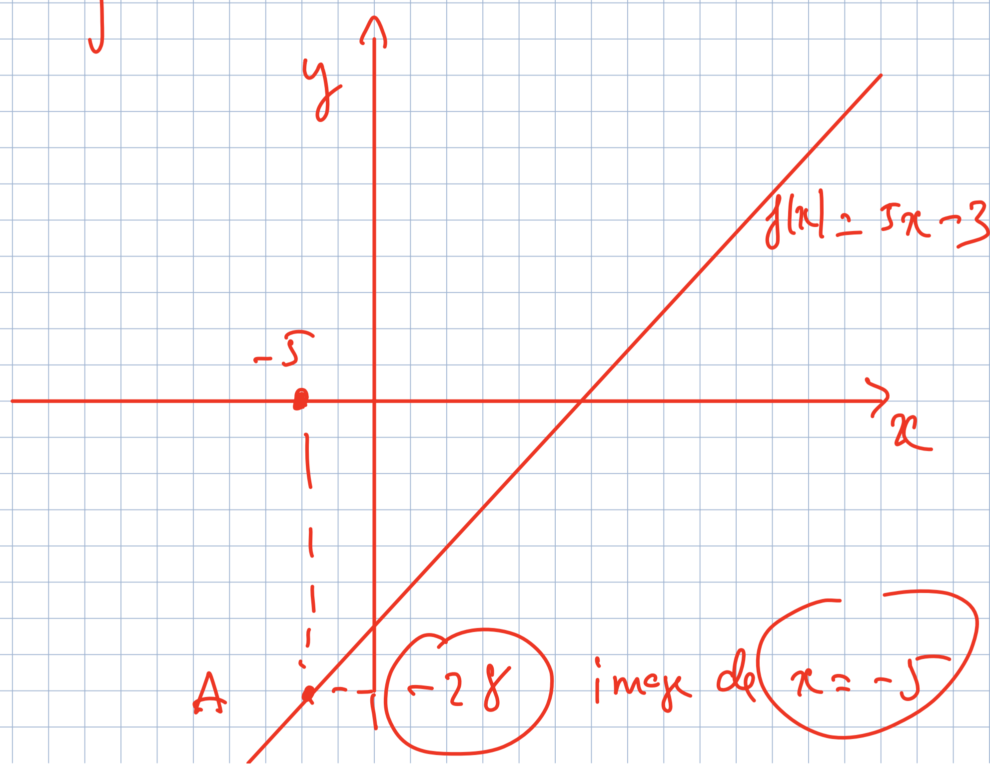
L'image de -5 par $f \iff f(-5) = ?$

$$f(-5) = 5 \cdot (-5) - 3 = -28$$

Donc $f(x) = -28$ c'est l'image de $x = -5$

$y = -28$ $x = -5$





$A(-5\,;\,-28)$

l'image de 0 par la fonction $f(x) = 5x-3$

$f(0) = 5 \cdot 0 - 3 = -3 = y$

$B(0\,;\,-3)$