2.3 Division euclidienne

2.3.1 Effectuer la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ dans chacun des cas suivants et poser l'égalité fondamentale correspondante :

a) $A(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 5$	$B(x) = x - 5$
b) $A(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 3x - 1$	$B(x) = x^2 + 2x - 1$
c) $A(x) = x^4 - 3x^3 + x - 5$	$B(x) = x^2 - 3$
d) $A(x) = 35x^3 + 47x^2 + 13x + 1$	$B(x) = 5x + 1$
e) $A(x) = x^8 + x^4 + 1$	$B(x) = x^2 - x + 1$
f) $A(x) = x^7 - 4x^6 + 2x^5 + x^4 - 3x^2 + 2x - 6$	$B(x) = x^5 - 3$
g) $A(x) = x^8 - x^4 + 1$	$B(x) = 2x^5 + 1$
h) $A(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 5x$	$B(x) = x + 2$
~~i)~~ $A(x) = \frac{2}{5}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x$	$B(x) = -\frac{3}{5}x$ NON
j) $A(x) = 3x + 2x^2 - 5 + x^3$	$B(x) = -1 + x^2 - 2x$

Rappel : Égalité fondamentale : $\boxed{D = dQ + R}$

a)

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -8x^2 & +16x & -5 & x-5 \\
-\ (x^3 & -5x^2) & & & x^2 - 3x + 1 = Q(x) \\
\hline
& -3x^2 & +16x & & \\
- & (-3x^2 & 15x) & & \\
\hline
& & x & -5 & \\
& - & (x & -5) & \\
\hline
& & & 0 = \text{Reste} &
\end{array}
$$

Attention signe !

$A(x) = (x-5)(x^2-3x+1)$

b)

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 - x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 3x - 1 & x^2 + 2x - 1 \\
\hline
-\ \left(x^5 + 2x^4 - x^3\right) & x^3 - 3x^2 + 3x - 7 \leftarrow Q(x) \\
\quad -3x^4 - 3x^3 + 2x^2 & \\
-\ \left(-3x^4 - 6x^3 + 3x^2\right) & \\
\quad 3x^3 - x^2 + 3x & \\
-\ \left(3x^3 + 6x^2 - 3x\right) & \\
\quad -7x^2 + 6x - 1 & \\
-\ \left(-7x^2 - 14x + 7\right) & \\
\quad 20x - 8 \leftarrow \text{Reste} &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \underline{A(x) = (x^2 + 2x - 1)(x^3 - 3x^2 + 3x - 7) + 20x - 8}$$

c)

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 3x^3 + 0x^2 + x - 5 & x^2 - 3 \\
\hline
-\ \left(x^4 + 0x^3 - 3x^2\right) & x^2 - 3x + 3 \leftarrow Q(x) \\
\quad -3x^3 + 3x^2 + x & \\
-\ \left(-3x^3 + 0x^2 + 9x\right) & \\
\quad 3x^2 - 8x - 5 & \\
-\ \left(3x^2 + 0x - 9\right) & \\
\quad -8x + 4 \leftarrow \text{Reste} &
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ Égalité fondamentale :

$$\underline{A(x) = (x^2 - 3)(x^2 - 3x + 3) + (-8x + 4)}$$

d) $35x^3 + 47x^2 + 13x + 1 \;\Big|\; 5x + 1$

$ - \; 35x^3 + 7x^2 \qquad\qquad 7x^2 + 8x + 1 \leftarrow Q(x)$

$40x^2 + 13x$

$- \; 40x^2 + 8x$

$5x + 1$

$- \; 5x + 1$

$0 \leftarrow$ Reste

$\Rightarrow \; A(x) = (5x+1)(7x^2 + 8x + 1)$

e) $x^8 + 0x^7 + 0x^6 + 0x^5 + x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1 \;\Big|\; x^2 - x + 1$

$- \; x^8 - x^7 + x^6 \qquad\qquad \underbrace{x^6 + x^5 - x^3 + x + 1}_{Q(x)}$

$x^7 - x^6 + 0x^5$

$- \; x^7 - x^6 + x^5$

$0x^6 - x^5 + x^4 + 0x^3$

$- \; -x^5 + x^4 - x^3$

$x^3 + 0x^2 + 0x$

$- \; x^3 - x^2 + x$

$x^2 - x + 1$

$x^2 - x + 1$

$0 \leftarrow$ Reste

$\Rightarrow \; A(x) = (x^2 - x + 1)(x^6 + x^5 - x^3 + x + 1)$

2.3.2 Effectuer la division euclidienne du polynôme $a(x)$ par le polynôme $b(x)$.

a) $a(x) = 3\,x^4 - 7\,x^3 - 18\,x^2 + 28\,x + 24$ et $b(x) = 3\,x^2 + 8\,x + 4$

b) $a(x) = 12\,x^4 + 47\,x^3 + 10\,x^2 + 12$ et $b(x) = -3\,x^2 - 8\,x + 6$

c) $a(x) = x^5 - 3\,x^2 + x + 5$ et $b(x) = -\,x^2 + x - 1$

a)

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 3x^4 - 7x^3 - 18x^2 + 28x + 24 & 3x^2 + 8x + 4 \\
\cline{3-3}
- & \underline{3x^4 + 8x^3 + 4x^2} & x^2 - 5x + 6 \leftarrow Q(x) \\
 & -15x^3 - 22x^2 + 28x & \\
- & \underline{-15x^3 - 40x^2 - 20x} & \\
 & 18x^2 + 48x + 24 & \\
- & \underline{18x^2 + 48x + 24} & \\
 & 0 \leftarrow \text{Reste} &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \underline{a(x) = (3x^2 + 8x + 4)(x^2 - 5x + 6)}$$

b)

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 12x^4 + 47x^3 + 10x^2 + 0x + 12 & -3x^2 - 8x + 6 \\
\cline{3-3}
- & \underline{12x^4 + 32x^3 - 24x^2} & -4x^2 - 5x + 2 \leftarrow Q(x) \\
 & 15x^3 + 34x^2 + 0x & \\
- & \underline{+15x^3 + 40x^2 - 30x} & \\
 & -6x^2 + 30x + 12 & \\
- & \underline{-6x - 16x + 12} & \\
 & 46x \leftarrow \text{Reste} &
\end{array}
$$

$$\underline{a(x) = (-3x^2 - 8x + 6)(-4x^2 - 5x + 2) + 46x}$$

c) $x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5 \quad \Big| \quad -x^2 + x - 1$

$- \quad x^5 - x^4 + x^3 \qquad\qquad -x^3 - x^2 + 4 \leftarrow Q(x)$

$x^4 - x^3 - 3x^2$

$- \quad x^4 - x^3 + x^2$

$0x^3 - 4x^2 + x + 5$

$- \quad -4x^2 + 4x - 4$

$-3x + 9 \leftarrow$ Reste

$\Rightarrow a(x) = (-x^2 + x - 1)(-x^3 - x^2 + 4) - 3x + 9$

2.3.3 Par quel polynôme faut-il multiplier $x - 5$ pour obtenir $x^3 - 3\,x^2 - 4\,x - 30$?

polynome cherché $p(x) \Rightarrow p(x) \cdot (x-5) = x^3 - 3x^2 - 4x - 30$

$\Rightarrow p(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 - 4x - 30}{x-5}$

$\Rightarrow \quad x^3 - 3x^2 - 4x - 30 \quad \Big| \quad x - 5$

$- \quad x^3 - 5x^2 \qquad\qquad x^2 + 2x + 6$

$2x^2 - 4x$

$- \quad 2x^2 - 10x$

$6x - 30$

$6x - 30$

0

$\Rightarrow$ Le polynome cherché est : $x^2 + 2x + 6$

2.3.4 Déterminer le polynôme tel que le quotient de sa division euclidienne par $2\,x^2+1$ soit $5\,x^2-3\,x+1$ et le reste $1-x$.

Égalité fondamentale : $D = dq + r$

où $d = 2x^2+1$, $q = 5x^2-3x+1$ et $r = 1-x$

$\Rightarrow D = (2x^2+1)(5x^2-3x+1) + 1-x$

$\Rightarrow D = 10x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 5x^2 - 3x + 1 + 1 - x$

$D = 10x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 4x + 2$

$\Rightarrow$ Le polynôme est $\underline{10x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 4x + 2}$

2.3.5 Calculer la valeur numérique $P(a)$ du polynôme $P(x) = 2\,x^3 - 3\,x^2 + 5\,x - 7$ pour chacune des valeurs a suivantes : 1, 3, 0, -2, -3, $1/3$ et $-1/2$.

* $a = 1 \rightarrow P(1) = 2\cdot1^3 - 3\cdot1^2 + 5\cdot1 - 7 = 2 - 3 + 5 - 7 = -3$
* $a = 3 \rightarrow P(3) = 2\cdot3^3 - 3\cdot3^2 + 5\cdot3 - 7 = 54 - 27 + 15 - 7 = 35$
* $a = 0 \rightarrow P(0) = 2\cdot0^3 - 3\cdot0^2 + 5\cdot0 - 7 = -7$
* $a = -2 \rightarrow P(-2) = 2\cdot(-2)^3 - 3(-2)^2 + 5\cdot(-2) - 7 = -16 - 12 - 10 - 7 = -45$
* $a = -3 \rightarrow P(-3) = 2\cdot(-3)^3 - 3(-3)^2 + 5(-3) - 7 = -54 - 27 - 15 - 7 = -103$
* $a = \frac{1}{3} \rightarrow P(\frac{1}{3}) = 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 5\cdot\frac{1}{3} - 7 = \frac{2}{27} - \frac{3}{9} + \frac{5}{3} - 7$

$$= \frac{2 - 9 + 45 - 189}{27} = -\frac{151}{27}$$

* $a = -\frac{1}{2} \rightarrow P(-\frac{1}{2}) = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 5\left(-\frac{1}{2}\right) - 7$

$$= \frac{-2}{8} - \frac{3}{4} - \frac{5}{2} - 7 = -\frac{2 - 6 - 20 - 56}{8} = -\frac{84}{8} = -\frac{21}{2}$$

2.3.6 Effectuer la division euclidienne de $t^5 - 7t^4 - t^2 - 9t + 9$ par $t^2 - 5t + 4$.

$$
\begin{array}{rl|l}
D \rightarrow & t^5 - 7t^4 + 0t^3 - t^2 - 9t + 9 & t^2 - 5t + 4 \leftarrow d \\
\cline{3-3}
- & \underline{t^5 - 5t^4 + 4t^3} & t^3 - 2t^2 - 14t - 63 \leftarrow Q(x) \\
 & -2t^4 - 4t^3 - t^2 & \\
- & \underline{-2t^4 + 10t^3 - 8t^2} & \\
 & -14t^3 + 7t^2 - 9t & \\
- & \underline{-14t^3 + 70t^2 - 56t} & \\
 & -63t^2 + 47t + 9 & \\
- & \underline{-63t^2 + 315t - 252} & \\
 & -268t + 261 \leftarrow \text{Reste} &
\end{array}
$$

Donc $D = t^5 - 7t^4 - t^2 - 9t + 9$, $d = t^2 - 5t + 4$

$Q = t^3 - 2t^2 - 14t - 63$ et $r = -268t + 261$

2.3.7 Trouver un polynôme P de degré ≤ 2 tel que

$$P(1) = -2 \quad \text{et} \quad P(-2) = 3 \quad \text{et} \quad P(0) = -1$$

Le polynôme $P(x)$ cherché : $P(x) = ax^2 + bx + c$

3 inconnues : a, b et c $\to$ 3 équations !

$$\begin{aligned} P(1) = -2 &\Rightarrow \\ P(-2) = 3 &\Rightarrow \\ P(0) = -1 &\Rightarrow \end{aligned} \begin{cases} a(1)^2 + b(1) + c = -2 \\ a(-2)^2 + b(-2) + c = 3 \\ a(0) + b(0) + c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = -2 \\ 4a - 2b + c = 3 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b - 1 = -2 \\ 4a - 2b - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -1 & \Big| \cdot 2 \\ 4a - 2b = 4 & \Big| \cdot 1 \end{cases} \to \begin{cases} 2a + 2b = -2 \\ 4a - 2b = 4 \end{cases}$$

$$6a = 2$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{3} \Rightarrow b = -1 - a = -1 - \frac{1}{3} = \frac{-3-1}{3} = -\frac{4}{3}$$

Donc $\underline{P(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 1}$

2.3.8 Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme $a(x)$ par le polynôme $b(x)$.

a) $a(x) = 4\,x^3 - 10\,x^2 + 11\,x - 5$ et $b(x) = x - 1$

b) $a(x) = 9\,x^4 + x^3 - x^2 + x + 2$ et $b(x) = x + 2$

c) $a(x) = 4\,x^3 - 5\,x^2 + 3\,x - 7$ et $b(x) = x$

a) $b(x) = x - 1 \rightarrow$ zéro de $b(x)$: $x = 1$

$\Rightarrow$ Reste $= a(1) = 4\cdot 1^3 - 10\cdot 1^2 + 11\cdot 1 - 5 = 4 - 10 + 11 - 5 = 0$

$\rightarrow$ Reste $= 0$ $\rightarrow$ donc le polynôme $b(x)$ divise le polynôme $a(x)$

b) $b(x) = x + 2 \rightarrow$ zéro : $x = -2$

$\Rightarrow$ Reste $= a(-2) = 9(-2)^4 + (-2)^3 - (-2)^2 + (-2) + 2$

$\Rightarrow$ Reste $= 144 - 8 - 4 - 2 + 2 = \underline{132}$ ($x+2$ ne divise pas $a(x)$)

c) $b(x) = x \rightarrow$ zéro : $x = 0$

$\rightarrow$ Reste $= a(0) = 4\cdot 0 - 5\cdot 0 + 3\cdot 0 - 7 = \underline{-7}$

2.3.9 Déterminer, sans effectuer la division, le reste de la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ dans les cas suivants :

a) $A(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 1$ $\quad B(x) = x - 3$

b) $A(x) = x^4 - x + 1$ $\quad B(x) = x + 2$

c) $A(x) = x^3 - 27$ $\quad B(x) = x - 3$

a) $B(x) = x - 3$ → zéro : $x = 3$

→ le reste $= A(3) = 2 \cdot 3^3 - 3^2 + 5 \cdot 3 - 1 = 54 - 9 + 15 - 1 = 59$

→ le reste $= A(3) = 59$

b) $B(x) = x + 2$ → zéro : $x = -2$

→ le reste $= A(-2) = (-2)^4 - (-2) + 1 = 16 + 2 + 1 = 19$

→ le reste $= A(-2) = 19$

c) $B(x) = x - 3$ → zéro : $x = 3$

→ le reste $= A(3) = (3)^3 - 27 = 0$

→ le reste $= 0$ ⇒ donc le polynôme $B(x)$ divise le polynôme $A(x)$

2.3.10 Déterminer les quotients des divisions exactes.

a) $(x^3 - 3x^2 + 4) \div [(x-2)(x+1)]$

b) $(9x^4 + 9x^3 - 7x^2 - 9x - 2) \div [(x+1)(3x+1)]$

$\underbrace{x+1}_{x=-1}$ $\underbrace{3x+1}_{x=-\frac{1}{3}}$

→ Schéma de Horner

a) $x^3 - 3x^2 + 4 \quad \div \quad (\underbrace{x-2}_{x=2})(\underbrace{x+1}_{x=-1})$

	1	-3	0	4
2		2	-2	-4
	1	-1	-2	0 ← Reste

$\Rightarrow \quad x^3 - 3x^2 + 4 = (\underbrace{x^2 - x - 2}) (x-2)$

$\Rightarrow \quad x^3 - 3x^2 + 4 = (x+1)(x-2)\,(\underbrace{x-2}_{Q(x)}) \quad \Rightarrow Q(x) = (x-2)$

b)

	9	9	-7	-9	-2
-1		-9	0	7	2
	9	0	-7	-2	0 ← Reste

$\Rightarrow \quad 9x^4 + 9x^3 - 7x^2 - 9x - 2 = (x+1)(\underbrace{9x^3 - 7x - 2})$

Horner par $3x+1$

	9	0	-7	-2
$-\frac{1}{3}$		-3	1	2
	9	-3	-6	0 ← Reste

$\Rightarrow \quad 9x^4 + 9x^3 - 7x^2 - 9x - 2 = (x+1)(x + \frac{1}{3})(9x^2 - 3x - 6)$

$= (x+1)(3x+1)(\underbrace{3x^2 - x - 2})$

$Q(x) = 3x^2 - x - 2$

2.3.11 Considérons le polynôme $P(x) = x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$. Déterminer s'il est divisible par :

(Reste = 0) a) $x - 1$ b) $x + 4$ c) $x + \frac{1}{2}$ d) $x + 1$ e) $x + 5$ f) $x - 3$

En déduire une factorisation de $P(x)$.

a) $x-1 \rightarrow P(1) = 1^4 + 2\cdot 1^3 - 16\cdot 1^2 - 2\cdot 1 + 15 = 1 + 2 - 16 - 2 + 15 = 0$

$\rightarrow$ $P(x)$ est divisible par $x-1$

b) $x+4 \rightarrow P(-4) = (-4)^4 + 2(-4)^3 - 16(-4)^2 - 2(-4) + 15 = 256 - 128 - 256 + 8 + 15$
$= -105$

$\rightarrow$ $P(x)$ n'est pas divisible par $x+4$

c) $x + \frac{1}{2} \rightarrow P\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 16\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 15 = \frac{189}{16} \neq 0$

$\rightarrow$ $P(x)$ n'est pas divisible par $x + \frac{1}{2}$

d) $x+1 \rightarrow P(-1) = 0 \rightarrow$ $P(x)$ est divisible par $x+1$

e) $x+5 \rightarrow P(-5) = 0 \rightarrow$ " $x+5$

f) $x-3 \rightarrow P(+3) = 0 \rightarrow$ " $x-3$

D'où $P(x) = (x-1)(x+1)(x+5)(x-3)$

2.3.12 Trouver les zéros entiers du polynôme

a) $2x^3 - 14x + 12$,

b) $x^4 - 6x^3 + x - 6$.

a) $2x^3 - 14x + 12$

$D_{12} = \{\pm 1 ; \pm 2 ; \pm 3 ; \ldots\}$ "zéro évident"

$x = 1 \rightarrow \quad 2 \cdot 1^3 - 14 \cdot 1 + 12 = 2 - 14 + 12 = 0 \rightarrow x = 1$ est un zéro

→ Horner :

	2	0	−14	12
1		2	2	−12
	2	2	−12	0 ← reste

$\rightarrow 2x^3 - 14x + 12 = (x-1)(\underbrace{2x^2 + 2x - 12})$

on cherche les zéros de $2x^2 + 2x - 12$

$\Rightarrow \quad 2x^3 - 14x + 12 = (x-1)\,2\,(x-2)(x+3) = 2(x-1)(x-2)(x+3)$

D'où $\quad S = \{-3 ; 1 ; 2\}$

b) $x^4 - 6x^3 + x - 6 = x(x^3+1) - 6(x^3+1) = (\underbrace{x^3+1}_{a^3+b^3})(x-6)$

$= (x-6)(x+1)(\underbrace{x^2 - x + 1}_{\Delta < 0})$

$\Rightarrow \quad S = \{-1 ; 6\}$

! Attention : on peut utiliser également le schéma de Horner pour trouver les zéros du $p(x)$.

2.3.13 Déterminer, sans effectuer la division, m et n sachant que :

a) $x^3 + mx + n$ est divisible par $(x-1)(x+2)$, → $x = 1$, $x = -2$: zéros

b) $x^3 + mx^2 + n$ est divisible par $x^2 - x - 6$.

a) $x^3 + mx + n$ est divisible par $(x-1)(x+2)$ → $x = 1$ et $x = -2$ sont des zéros.

$$\rightarrow \begin{cases} P(1) = 0 \\ P(-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + m + n = 0 \\ (-2)^3 + m(-2) + n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + n + 1 = 0 \\ -2m + n - 8 = 0 \end{cases} \Big| \cdot 2$$

$$+ \begin{cases} 2m + 2n + 2 = 0 \\ -2m + n - 8 = 0 \end{cases}$$

$$3n - 6 = 0 \rightarrow n = 2 \rightarrow m = -n - 1 = -2 - 1 = -3$$

D'où $\underline{m = -3 \ , \ n = 2}$

b) $x^3 + mx^2 + n$ est divisible par $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$

$x=3$ $x=-2$: zéros

$$\Rightarrow \begin{cases} P(3) = 0 \\ P(-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^3 + m \cdot 3^2 + n = 0 \\ (-2)^3 + m(-2)^2 + n = 0 \end{cases}$$

$$- \begin{cases} 27 + 9m + n = 0 \\ -8 + 4m + n = 0 \end{cases}$$

$$35 + 5m = 0 \Rightarrow 5m = -35 \Rightarrow m = -7$$

$$\Rightarrow n = -27 - 9m = -27 - 9(-7) = -27 + 63 = 36$$

$\Rightarrow$ D'où $\underline{m = -7 \text{ et } n = 36}$

★ ★ ★ ★ ★

2.3.14 Je suis un polynôme de degré 5 et possède les propriétés suivantes :

i) • je m'annule en 0 et en 2, $\Rightarrow x = 0$ et $x = 2$: zéros du $P(x)$

ii) • je suis divisible par $x + 2$, $\Rightarrow x = -2$: zéro du $P(x)$

iii) • $x - 3$ apparaît dans ma factorisation,

iv) • le reste de ma division par $x + 3$ est égal à -630, $\Rightarrow P(-3) = -630$

v) • mon évaluation en $x = 1$ est égale à 6. $\rightarrow P(1) = 6$

Qui suis-je ?

Polynome cherché : $P(x) = \underbrace{x(x-2)}_{(i)}\underbrace{(x+2)}_{(ii)}\underbrace{(x-3)}_{(iii)}(ax+b)$

$\Rightarrow$ Il reste à déterminer a et b

$$\begin{array}{l} iv) : \\ v) : \end{array}\begin{cases} P(-3) = -630 \\ P(1) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3(-3-2)(-3+2)(-3-3)(-3a+b) = -630 \\ 1(1-2)(1+2)(1-3)(a+b) = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3(-5)(-1)(-6)(-3a+b) = -630 \\ -1(3)(-2)(a+b) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 90(-3a+b) = -630 \\ 6(a+b) = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3a + b = -7 \\ -a - b = -1 \end{cases} \Rightarrow -4a = -8 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow b = -1$$

$\Rightarrow$ Je suis : $x(x-2)(x+2)(x-3)(2x-1)$

2.3.15 Factoriser le polynôme :

a) $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 35x^2 - 9x + 45$ sachant que $P(5) = 0$ et $P(-3) = 0$,

b) $P(x) = 2x^4 - 9x^3 + 7x^2 + 6x$ sachant que 2 est une solution de l'équation $P(x) = 0$.

a) $P(5) = 0 \rightarrow x = 5$ est un zéro de $P(x)$

$P(-3) = 0 \rightarrow x = -3$ " "

Horner (pour la factorisation)

	2	-3	-35	-9	45
5		10	35	0	-45
	2	7	0	-9	0 ← reste

on continue la division :

	2	7	0	-9
-3		-6	-3	9
	2	1	-3	0 ← reste

$\Rightarrow P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 35x^2 - 9x + 45 = (x-5)(x+3)\underbrace{(2x^2 + x - 3)}$

$\Delta = 1 - 4(2)(-3) = 25 = 5^2$

$x_1 = \frac{-1-5}{4} = -\frac{3}{2}$

$x_2 = \frac{-1+5}{4} = 1$

$\Rightarrow P(x) = (x-5)(x+3)\,2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x-1)$

$= (x-5)(x+3)\cancel{2}\left(\frac{2x+3}{\cancel{2}}\right)(x-1)$

$\underline{P(x) = (x-5)(x+3)(2x+3)(x-1)}$

b) $p(x) = 2x^4 - 9x^3 + 7x^2 + 6x = x(2x^3 - 9x^2 + 7x + 6)$

2 est une solution de $p(x) = 0$

$\rightarrow$ Horner :

	2	-9	7	6
2		4	-10	-6
	2	-5	-3	0

$\Rightarrow p(x) = x(x-2)(2x^2 - 5x - 3)$

On factorise $2x^2 - 5x - 3$ en résolvant l'équation $2x^2 - 5x - 3 = 0$

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 + 24 = 49 = 7^2$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2} \quad ; \quad x_2 = \frac{5+7}{4} = 3$$

$$\Rightarrow p(x) = x(x-2)\,2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-3) = x(x-2)\cancel{2}\left(\frac{2x+1}{\cancel{2}}\right)(x-3)$$

$$\Rightarrow \underline{p(x) = x(x-2)(2x+1)(x-3)}$$

2.3.16 Factoriser le polynôme $p(x) = 2\,x^3 - 8\,x^2 + 8\,x$

$$p(x) = 2x^3 - 8x^2 + 8x = 2x(\underbrace{x^2 - 4x + 4}_{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}) = 2x(x-2)^2$$

$$\Rightarrow \underline{p(x) = 2x(x-2)^2}$$

2.3.17 Déterminer les solutions entières de l'équation $2x^4 + 11x^3 + 4x^2 - 29x + 12 = 0$.

nb entiers !

$p(x) = 2x^4 + 11x^3 + 4x^2 - 29x + 12$

$D_{12} = \{\pm 1 ; \pm 2 ; \pm 3 ; \pm 4 ; \pm 6 ; \pm 12\}$

On cherche un "zéro évident"

$x = 1 \rightarrow p(1) = 2 \cdot 1^4 + 11 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2 - 29 \cdot 1 + 12 = 2 + 11 + 4 - 29 + 12 = 0$

$\rightarrow x = 1$ est un zéro de $p(x)$

$\rightarrow$ Horner :

	2	11	4	-29	12
1		2	13	17	-12
	2	13	17	-12	0

$\Rightarrow p(x) = (x-1)(2x^3 + 13x^2 + 17x - 12)$

On factorise $2x^3 + 13x^2 + 17x - 12$

$x = -3 \Rightarrow P(-3) = 2 \cdot (-3)^3 + 13(-3)^2 + 17(-3) - 12 = -54 + 117 - 51 - 12$

$= 0 \Rightarrow x = -3$ est un zéro

$\rightarrow$ Horner :

	2	13	17	-12
-3		-6	-21	12
	2	7	-4	0

$\rightarrow p(x) = (x-1)(x+3)(2x^2 + 7x - 4)$

On factorise : $2x^2 + 7x - 4$ en résolvant l'équation :

$2x^2 + 7x - 4 = 0 \rightarrow \Delta = 49 - 4 \cdot 2(-4) = 81 = 9^2$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-7-9}{4} = -4 \quad , \quad x_2 = \frac{-7+9}{4} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow p(x) = (x-1)(x+3)\,2\,(x+4)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$= (x-1)(x+3)\cancel{2}(x+4)\left(\frac{2x-1}{\cancel{2}}\right)$

$\Rightarrow p(x) = (x-1)(x+3)(x+4)(2x-1)$

$\Rightarrow$ Les solutions entières sont : $x=1$, $x=-3$ et $x=-4$

2.3.18 Factoriser :

a) $x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x$ b) $x^5 + 3x^4 - 16x - 48$ c) $6x^4 - 5x^3 - 23x^2 + 20x - 4$

a) $p(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x = x(x^3 + 2x^2 - 5x - 6)$

$D_6 = \{\pm 1 ; \pm 2 ; \pm 3 ; \ldots\}$

$x=2 \to p(2) = 2^3 + 2\cdot 2^2 - 5\cdot 2 - 6 = 8 + 8 - 10 - 6 = 0 \to x=2$ est un zéro

$\to$ Horner :

	1	2	-5	-6
2		2	8	6
	1	4	3	0

$\Rightarrow p(x) = x(x-2)(x^2+4x+3) = x(x-2)(x+1)(x+3)$

on cherche $\begin{cases}\alpha+\beta = 4\\ \alpha\cdot\beta = 3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha = 1\\ \beta = 3\end{cases} \Rightarrow x^2+4x+3 = (x+1)(x+3)$

b) $x^5 + 3x^4 - 16x - 48 = x^4(x+3) - 16(x+3) = (x+3)(x^4-16)$

$= (x+3)(x^2-4)(x^2+4) = (x+3)(x-2)(x+2)(x^2+4)$

$\Rightarrow p(x) = (x+3)(x-2)(x+2)(x^2+4)$

! Attention : on peut utiliser également le schéma de Horner pour factoriser cette expression, mais c'est plus long !

c) $p(x) = 6x^4 - 5x^3 - 23x^2 + 20x - 4$

$D_4 = \{\pm 1 ; \pm 2 ; \pm 4\}$

$x = 2 \rightarrow p(2) = 6\cdot 2^4 - 5\cdot 2^3 - 23\cdot 2^2 + 20\cdot 2 - 4 = 0$

$\rightarrow x = 2$ est un zéro de $p(x)$

→ Horner :

	6	-5	-23	20	-4
2		12	14	-18	4
	6	7	-9	2	0

$\rightarrow p(x) = (x-2)(6x^3 + 7x^2 - 9x + 2)$

$D_2 = \{\pm 1 ; \pm 2\}$

$x = -2$ est un zéro de $6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$ car $6\cdot(-2)^3 + 7(-2)^2 - 9(-2) + 2 = 0$

→ Horner :

	6	7	-9	2
-2		-12	10	-2
	6	-5	1	0

$\rightarrow p(x) = (x-2)(x+2)(6x^2 - 5x + 1) = (x-2)(x+2)(3x-1)(2x-1)$

(en calculant $\Delta = \ldots$)

2.3.19 Déterminer le quotient et le reste de la division en utilisant le schéma de Horner.

a) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ par $x - 1$ $\rightarrow x = 1$

b) $x^5 + 1$ par $x + 1$ $\rightarrow x = -1$

c) $3x^5 - 8x^4 + 7x^3 + x^2 - 5x + 6$ par $x + 2$ $\rightarrow x = -2$

a)

	1	1	1	1	1
1		1	2	3	4
	1	2	3	4	5

$\Rightarrow Q(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ et $R(x) = 5$

b)

	1	0	0	0	0	1
-1		-1	1	-1	1	-1
	1	-1	1	-1	1	0

$\rightarrow Q(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ et $R(x) = 0$

c)

	3	-8	7	1	-5	6
-2		-6	28	-70	138	-266
	3	-14	35	-69	133	-260

$\Rightarrow Q(x) = 3x^4 - 14x^3 + 35x^2 - 69x + 133$ et $R(x) = -260$

2.3.20 Monter que $x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$ est divisible par $x - 1$.

Méthode : • En effectuant la division et en trouvant 0 comme reste

• ou si $p(x) = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$, alors $p(1) = 0$

$$p(1) = 1^6 - 6\cdot 1^5 + 15\cdot 1^4 - 20\cdot 1^3 + 15\cdot 1^2 - 6\cdot 1 + 1$$

$$= 1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1 = 0 \checkmark$$

$\rightarrow$ $p(x)$ est divisible par $x - 1$

attitude !

2.3.21 Calculer le quotient et le reste de la division de $f(x)$ par $g(x)$.

a) $f(x) = 3x^3 - x^2 + x + 1 \quad g(x) = 2x^2 - 1$

b) $f(x) = 2x^3 - 1 \quad g(x) = 3x^3 - x^2 + x + 1$

c) $f(x) = 7x^5 - x^4 + 6x^3 - 7x \quad g(x) = 7x^3 - x$

d) $f(x) = 6x^4 + 4x^3 - 7x^2 \quad g(x) = 2x^2 - 3$

e) $f(x) = 14x^4 - 27x^3 + 21x^2 - 3x - 2 \quad g(x) = 2x^2 - 3x + 2$

f) $f(x) = 14x^5 - 36x^4 + 23x^3 - 11x^2 + 18x - 8 \quad g(x) = 7x^3 - x$

g) $f(x) = 12x^5 - 7x^4 + 2x^2 - 6x \quad g(x) = -5x^2 + 2x - 1$

a)

$$\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & -x^2 & +x & +1 & 2x^2 - 1 \\ \cline{5-5}
-\;3x^3 & +0x^2 & -\frac{3}{2}x & & \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \leftarrow Q(x) \\ \cline{1-3}
 & -x^2 & +\frac{5}{2}x & +1 & \\
 - & -x^2 & +0x & +\frac{1}{2} & \\ \cline{2-4}
 & & \frac{5}{2}x & +\frac{1}{2} & \leftarrow \text{Reste}
\end{array}$$

$\Rightarrow Q(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$, $R(x) = \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $f(x) = (2x^2 - 1)\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$

b)

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
 & 2x^3 & +\,0x^2 & +\,0x & -1 & 3x^3-x^2+x+1 \\
- & 2x^3 & -\frac{2}{3}x^2 & +\frac{2}{3}x & +\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\
\hline
 & & \frac{2}{3}x^2 & -\frac{2}{3}x & -\frac{5}{3} &
\end{array}
$$

← Reste

$\left(-1-\frac{2}{3}=-\frac{5}{3}\right)$

$Q(x)=\frac{2}{3}$, $R(x)=\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$

$\rightarrow f(x)=(3x^3-x^2+x+1)\,\frac{2}{3}+\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$

c)

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 7x^5 & -x^4 & +6x^3 & +0x^2 & -7x & 7x^3-x \\
- & 7x^5 & & -x^3 & & & x^2-\frac{1}{7}x+1 \\
\hline
 & & -x^4 & +7x^3 & +0x^2 & & \\
- & & -x^4 & & +\frac{1}{7}x^2 & & \\
\hline
 & & & 7x^3 & -\frac{1}{7}x^2 & -7x & \\
- & & & 7x^3 & & -x & \\
\hline
 & & & & -\frac{1}{7}x^2 & -6x &
\end{array}
$$

$\rightarrow Q(x)=x^2-\frac{1}{7}x+1$, $R(x)=-\frac{1}{7}x^2-6x$

$\rightarrow f(x)=(7x^3-x)\left(x^2-\frac{1}{7}x+1\right)+\left(-\frac{1}{7}x^2-6x\right)$

d) $$\begin{array}{l|l} 6x^4 + 4x^3 - 7x^2 & 2x^2 - 3 \\ \cline{2-2} -\ (6x^4 \quad\quad - 9x^2) & 3x^2 + 2x + 1 \\ \hline \quad 4x^3 + 2x^2 & \\ -\ (4x^3 \quad\quad - 6x) & \\ \hline \quad\quad 2x^2 + 6x & \\ -\ (2x^2 \quad\quad - 3) & \\ \hline \quad\quad\quad 6x + 3 & \end{array}$$

$\rightarrow$ $Q(x) = 3x^2 + 2x + 1$, $r(x) = 6x + 3$

$\Rightarrow$ $\underline{f(x) = (2x^2 - 3)(3x^2 + 2x + 1) + 6x + 3}$

2.3.23 Factoriser les polynômes. ★★★★

a) $x^3 + 9\,x^2 + 11\,x - 21$

b) $x^4 + 2\,x^3 - 16\,x^2 - 2\,x + 15$

c) $x^5 + 3\,x^4 - 16\,x - 48$

d) $x^5 - 3\,x^4 - 21\,x^3 + 43\,x^2 + 96\,x - 180$

a) $x^3 + 9x^2 + 11x - 21$

$\rightarrow$ zéro évident : $x = 1$ $\rightarrow$ $p(1) = 1^3 + 9 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 21 = 0$

Horner :

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 9 & 11 & -21 \\ 1 & & 1 & 10 & 21 \\ \hline & 1 & 10 & 21 & \vert\ 0 \end{array}$$

$\rightarrow$ $p(x) = (x-1)(\underbrace{x^2 + 10x + 21})$

$\Delta = 100 - 4 \cdot 1 \cdot 21 = 16 = 4^2$

$x_1 = \dfrac{-10 - 4}{2} = -7$

$x_2 = \dfrac{-10 + 4}{2} = -3$

$\rightarrow$ $\underline{p(x) = (x-1)(x+7)(x+3)}$

b) $p(x) = x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$

$x = 1$: zéro évident car $p(1) = 1^4 + 2\cdot 1^3 - 16\cdot 1^2 - 2\cdot 1 + 15 = 0$

→ Horner :

	1	2	−16	−2	15
1		1	3	−13	−15
	1	3	−13	−15	0

→ $p(x) = (x-1)(\underbrace{x^3 + 3x^2 - 13x - 15})$

on factorise $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$ → $x = -1$: zéro

→ Horner :

	1	3	−13	−15
−1		−1	−2	15
	1	+2	−15	0

→ $p(x) = (x-1)(x+1)(\underbrace{x^2 + 2x - 15})$

factoriser $x^2 + 2x - 15$ en calculant $\Delta = \dots$ $x_1 = 3$, $x_2 = -5$

⇒ $\underline{p(x) = (x-1)(x+1)(x-3)(x+5)}$

c) $p(x) = x^5 + 3x^4 - 16x - 48$

→ $x = 2$: zéro → Horner :

	1	3	0	0	−16	−48
2		2	10	20	40	48
	1	5	10	20	24	0

→ $p(x) = (x-2)(\underbrace{x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 20x + 24})$

$x = -2$ → Horner :

	1	5	10	20	24
−2		−2	−6	−8	−24
	1	3	4	12	0

$\to p(x) = (x-2)(x+2)\,(\underbrace{x^3+3x^2+4x+12}_{x^2(x+3)+4(x+3)}) = (x-2)(x+2)\left[x^2(x+3)+4(x+3)\right]$

$$p(x) = (x-2)(x+2)\,(x+3)\,(x^2+4)$$

2.3.24 Factoriser si possible les polynômes suivants. ★★★★

a) $p(x) = x^2 + 19\,x + 18$

b) $p(x) = x^2 - 4\,x + 4$

c) $p(x) = 2\,x^2 + 5\,x - 3$

d) $p(x) = 3\,x^2 - 5\,x + 2$

e) $p(x) = 4\,x^2 - 20\,x + 25$

f) $p(x) = x^2 - 9$

g) $p(x) = x^2 - \frac{4}{9}$

h) $p(x) = 9\,x^2 - 5\,x$

i) $p(x) = 8\,x^2 + 6\,x + 1$

j) $p(x) = \frac{1}{3}\,x^2 - x + 4$

a) $p(x) = x^2 + 19x + 18$ $\to$ trinôme unitaire : $\begin{cases} \alpha + \beta = 19 \\ \alpha \cdot \beta = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 18 \\ \beta = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ $p(x) = x^2 + 19x + 18 = (x+18)(x+1)$

b) $p(x) = x^2 - 4x + 4$ $\to$ $\begin{cases} \alpha + \beta = -4 \\ \alpha \cdot \beta = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -2 \end{cases}$

$\to$ $p(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)(x-2) = (x-2)^2$

ou $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ $\to$ identité remarquable !

c) $p(x) = 2x^2 + 5x - 3$

$\Delta = 25 - 4\cdot 2(-3) = 25 + 24 = 49 = 7^2$

$x_1 = \frac{-5-7}{4} = -3$

$x_2 = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2}$

$\to$ $p(x) = 2(x+3)(x-\frac{1}{2}) = 2(x+3)(\frac{2x-1}{2})$

$\Rightarrow$ $p(x) = (x+3)(2x-1)$

d) $p(x) = 3x^2 - 5x + 2$

$$\Delta = 25 - 4\cdot 3\cdot 2 = 1 \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{5-1}{6} = \dfrac{2}{3} \\ x_2 = \dfrac{5+1}{6} = 1 \end{cases}$$

$\rightarrow p(x) = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x-1) = 3\left(\frac{3x-2}{3}\right)(x-1)$

$\rightarrow \underline{p(x) = (3x-2)(x-1)}$

e) $p(x) = \underbrace{4x^2 - 20x + 25}_{} = \underline{(2x-5)^2}$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

f) $p(x) = x^2 - 9 = \underline{(x-3)(x+3)}$

g) $p(x) = x^2 - \frac{4}{9} = \underline{\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right)}$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ où $a = x$, $b = \frac{2}{3}$

h) $p(x) = 9x^2 - 5x = \underline{x(9x-5)}$

i) $p(x) = 8x^2 + 6x + 1$ → résoudre l'équation : $8x^2 + 6x + 1 = 0$

$\Delta = 36 - 4\cdot 8\cdot 1 = 36 - 32 = 4 = 2^2$

$\rightarrow x_1 = \frac{-6-2}{16} = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{-6+2}{16} = \frac{-4}{16} = -\frac{1}{4}$

$\rightarrow p(x) = 8\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right) = \cancel{8}\left(\frac{2x+1}{\cancel{2}}\right)\left(\frac{4x+1}{\cancel{4}}\right)$

$\rightarrow \underline{p(x) = (2x+1)(4x+1)}$

j) $p(x) = \frac{1}{3}x^2 - x + 4$ → $\Delta = 1 - 4\cdot\frac{1}{3}\cdot 4 < 0$ → pas factorisable !

$\rightarrow \underline{p(x) = \frac{1}{3}x^2 - x + 4}$

2.3.25 Résoudre les équations suivantes par factorisation. ★★★★★

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

b) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

c) $4x^5 - 12x^4 + 9x^3 = 0$

d) $16x^3 - 16x^2 - 4x + 4 = 0$

a) $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

$\Rightarrow x^2(x+2) - (x+2) = 0 \Rightarrow (x+2)(x^2-1) = 0$

$\rightarrow (x+2)(x-1)(x+1) = 0$

$x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$

$\rightarrow$ $x - 1 = 0 \rightarrow x_2 = 1$ $\rightarrow$ $S = \{-2 ; -1 ; 1\}$

$x + 1 = 0 \rightarrow x_3 = -1$

• On peut utiliser le schéma de Horner pour factoriser $p(x)$, mais c'est plus long !

b) $p(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

$\Rightarrow x^2(x-3) - 4(x-3) = 0$

$\rightarrow (x-3)(x^2-4) = 0 \iff (x-3)(x-2)(x+2) = 0$

$x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = 3$

$\Rightarrow$ $x - 2 = 0 \rightarrow x_2 = 2$ $\Rightarrow$ $S = \{-2 ; 2 ; 3\}$

$x + 2 = 0 \rightarrow x_3 = -2$

c) $p(x) = 4x^5 - 12x^4 + 9x^3 = 0 \Rightarrow x^3(\underbrace{4x^2 - 12x + 9}_{\text{identité remarquable !}}) = 0$

$\Rightarrow x^3(2x-3)^2 = 0$

$\rightarrow x_1 = 0 \;,\; x_2 = \frac{3}{2}$ $\rightarrow$ $S = \{0 ; \frac{3}{2}\}$

d) $p(x) = 16x^3 - 16x^2 - 4x + 4 = 0$

$\Rightarrow 16x^2(x-1) - 4(x-1) = 0 \Rightarrow (x-1)(\underbrace{16x^2-4}_{a^2-b^2=(a-b)(a+b)}) = 0$

$\Rightarrow (x-1)(4x-2)(4x+2) = 0$

$x - 1 = 0 \rightarrow x_1 = 1$

$\Rightarrow$ $4x - 2 = 0 \rightarrow x_2 = \frac{1}{2}$ $\quad \rightarrow S = \left\{ -\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 1 \right\}$

$4x + 2 = 0 \rightarrow x_3 = -\frac{1}{2}$

2.3.27 Factoriser : ★★★★

a) $x^3 + 2x^2 + x$

b) $2a^6 - 6a^4 + 6a^2 - 2$

c) $9a^3 - ab^2$

d) $54a^6 - 2$

e) $1 - (x - y)^2$

f) $(x^2 - 1)^2 + 4x^2$

g) $(-3x + y)^2 - (4x - z)^2$

h) $x^3 + 9x^2 + 11x - 21$

i) $xy - 9x^3y$

j) $x^4 + 3x^3 - 8x - 24$

k) $2a^3b - a^2b^2 + b^2 - 2ab$

l) $x^3 + 8y^3 + 6x^2y + 12xy^2$

m) $b^3 - a^3$

n) $3x^4 - 18x^3 + 36x^2 - 24x$

o) $8a^4x^3 - 72b^2x^3 - a^4 + 9b^2$

p) $x^3 + 9x - 27 - 3x^2$

q) $d^3 - 8 + 3(d^2 - 4d + 4)$

r) $x^4y^3 + 3x^3y^2 + 3x^2y + x$

s) $z^2x^6 - 5z^2x^4 + 4z^2x^2$

t) $6x^4 + 13x^3 - 13x - 6$

u) $x^3y + 7x^2y + 6xy$

v) $16a^4 + 2ab^3$

w) $8c^3 + 6c + 12c^2 + 1$

x) $(y^2 + b^2)^2 - 4b^2y^2$

a) $p(x) = x^3 + 2x^2 + x = x(\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{(a+b)^2}) = x(x+1)^2$

b) $2a^6 - 6a^4 + 6a^2 - 2 = 2(a^6 - 3a^4 + 3a^2 - 1) = 2(a^2-1)^3$

$= 2(a-1)^3(a+1)^3$

c) $9a^3 - ab^2 = a(9a^2 - b^2) = \underline{a(3a-b)(3a+b)}$

d) $54a^6 - 2 = 2(27a^6 - 1) = 2(3a^2-1)(\underbrace{9a^4 + 3a^2}_{\text{non factorisable !}} + 1)$

$= \underline{2(\sqrt{3}\,a - 1)(\sqrt{3}\,a + 1)(9a^4 + 3a^2 + 1)}$

e) $1 - (x-y)^2 = (1-(x-y))(1+(x-y)) = \underline{(1-x+y)(1+x-y)}$

f) $(x^2-1)^2 + 4x^2 = x^4 - 2x^2 + 1 + 4x^2 = x^4 + 2x^2 + 1 = \underline{(x^2+1)^2}$

g) $(-3x+y)^2 - (4x-z)^2 = (-3x+y-4x+z)(-3x+y+4x-z)$

$= \underline{(-7x+y+z)(x+y-z)}$

h) $x^3 + 9x^2 + 11x - 21$

$x = 1$: zéro $\to$ Horner :

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 9 & 11 & -21 \\
1 & & 1 & 10 & 21 \\
\hline
 & 1 & 10 & 21 & 0
\end{array}$$

$\to$ $x^3 + 9x^2 + 11x - 21 = (x-1)(\underbrace{x^2 + 10x + 21}_{\Delta = \dots})$

$x_1 = -3$

$x_2 = -7$

$\to$ $x^3 + 9x^2 + 11x - 21 = \underline{(x-1)(x+3)(x+7)}$

i) $xy - 9x^3y = xy(1 - 9x^2) = \underline{xy(1-3x)(1+3x)}$

j) $x^4 + 3x^3 - 8x - 24 = x^3(x+3) - 8(x+3) = (x+3)(\underbrace{x^3 - 8}_{a^3-b^3 = \dots})$

$= \underline{(x+3)(x-2)(x^2+2x+4)}$

k) $2a^3b - 2a^2b^2 + b^2 - 2ab = b(2a^2 - 2a^2b + b - 2a)$

$= b\left[a^2(2a-b) - 1(2a-b)\right] = b(2a-b)(a^2-1)$

$= \underline{b(2a-b)(a-1)(a+1)}$

l) $x^3 + 8y^3 + 6x^2y + 12xy = \underline{(x+2y)^3}$

$(a+b)^3$

m) $b^3 - a^3 = \underline{(b-a)(b^2+ab+a^2)}$

n) $3x^4 - 18x^3 + 36x^2 - 24x = 3x(\underbrace{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}) = \underline{3x(x-2)^3}$

$(a-b)^3$ à $a = x$, $b = 2$

o) $8a^4x^3 - 72b^2x^3 - a^4 + 9b^2 = 8x^3(a^4 - 9b^2) - 1(a^4 - 9b^2)$

$= (\underbrace{a^4 - 9b^2}_{a^2-b^2})(\underbrace{8x^3 - 1}_{a^3-b^3}) = \underline{(a^2+3b)(a^2-3b)(2x-1)(4x^2+2x+1)}$

p) $x^3 + 9x - 27 - 3x^2 = x(x^2+9) - 3(x^2+9) = \underline{(x^2+9)(x-3)}$

q) $\underbrace{d^3 - 8}_{a^3-b^3} + 3(\underbrace{d^2 - 4d + 4}_{(a-b)^2}) = (d-2)(d^2+2d+4) + 3(d-2)^2$

$= (d-2)(d^2+2d+4+3d-6) = (d-2)(\underbrace{d^2+5d-2})$

$\Delta = \dots$

$= \underline{(d-2)\left(d - \frac{-5+\sqrt{33}}{2}\right)\left(d - \frac{-5-\sqrt{33}}{2}\right)}$

r) $x^4y^3 + 3x^3y^2 + 3x^2y + x = x(\underbrace{x^3y^3 + 3x^2y^2 + 3xy + 1}_{(a+b)^3}) = x(xy+1)^3$

s) $z^2x^6 - 5z^2x^4 + 4z^2x^2 = z^2x^2(\underbrace{x^4 - 5x^2 + 4}) = z^2x^2(x^2-1)(x^2-4)$ → poser $x^2 = y$ → $\Delta = \dots$

$= z^2x^2(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

t) $6x^4 + 13x^3 - 13x - 6 = 6(x^4-1) + 13x(x^2-1)$

$= 6(x^2+1)(x^2-1) + 13x(x^2-1) = (x^2-1)(6x^2+6+13x)$

$= (x-1)(x+1)(\underbrace{6x^2+6+13x}_{\Delta = \dots}) = (x-1)(x+1)(3x+2)(2x+3)$

u) $x^3y + 7x^2y + 6xy = xy(\underbrace{x^2+7x+6}) = xy(x+1)(x+6)$

$\begin{cases} \alpha+\beta = 7 \\ \alpha\cdot\beta = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 6 \end{cases}$

v) $16a^4 + 2ab^3 = 2a(\underbrace{8a^3+b^3}_{a^3+b^3}) = 2a(2a+b)(\underbrace{4a^2-2ab+b^2})$

w) $8c^3 + 6c + 12c^2 + 1 \underset{(a+b)^3}{=} (2c+1)^3$

x) $(y^2+b^2)^2 - 4b^2y^2 = (y^2+b^2+2by)(y^2+b^2-2by)$

$= (y+b)^2(y-b)^2$