Algèbre

1M 2024 / 2025

A) Développer une expression

* Développer =, c'est transformer une multiplication en une somme ou en une différence.

* La multiplication est distributive sur l'addition. Cela signifie que, pour tous nombres k, a et b, on a : $k(a+b) = ka + kb$

* De même, la multiplication est distributive sur la soustraction : $k(a-b) = ka - kb$

* La double distributivité de la multiplication sur l'addition signifie que, pour tous nombres a, b, c et d : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$.

* Les identités remarquables sont des développements particuliers d'expressions. On prendra a et b des nombres quelconques :

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

B) Factorisation une expression

Factoriser : transformer une somme en un produit.

→ . Une somme : est le résultat de l'addition de deux ou plusieurs termes

. Un produit : est le résultat de la multiplication de deux ou plusieurs facteurs

! La factorisation sert à simplifier des expressions algébriques et surtout à résoudre des équations.

1) Mise en évidence :

Rappelons la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction :

produits → $a(b+c) =$ ← sommes

produits → $a\cdot(b-c) =$ ← sommes

Cette propriété permet de développer (ou effectuer) une expression, c-à-d, de transformer un produit en une somme. Lorsqu'on lit les égalités dans l'autre sens, on transforme une somme en un produit, c-à-d, on factorise :

sommes → $ab + ac =$ ← produits

sommes → $ab - ac =$ ← produits

On dit qu'on a mis en évidence le facteur commun a.

=> La mise en évidence permet d'écrire une expression sous forme de facteurs => c'est l'opération inverse de la distributivité.

* **Remarque :**

On peut également mettre en évidence le signe $-$:

$-a-b = -(a+b)$

$-a+b = -(a-b)$

$a-b = -(-a+b)$

$a+b = -(-a-b)$

! Si l'on met le $-$ en évidence, les termes changent de signe à l'intérieur des ( ).

2) Produits remarquables :

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

4) $a^2 + b^2$ n'est pas factorisable

5) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

6) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

7) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

8) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

3) Factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$

Soit le polynôme du deuxième degré $ax^2 + bx + c$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta > 0$, alors il existe deux zéros x_1 et x_2 et on peut factoriser :

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)}$$

- Si $\Delta = 0$, alors il existe un seul zéro x_1 et on peut aussi factoriser : $\boxed{ax^2 + bx + c = a(x-x_1)^2}$

- Si $\Delta < 0$, alors il n'y a pas de zéro réel et le polynôme $ax^2 + bx + c$ est indécomposable.

4) Trinôme unitaire du second degré :

$\boxed{x^2 + bx + c = (x+\alpha)(x+\beta)} = x^2 + \alpha \cdot x + \beta \cdot x + \alpha \cdot \beta = x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha \cdot \beta$

$\Rightarrow$ Il faut que : $\boxed{\alpha \cdot \beta = c}$ et que $\boxed{\alpha + \beta = b}$

On trouve α et β par tâtonnement.

Exemple : $x^2 + 4x - 21 =$

Il faut trouver deux nombres entiers α et β tels que : $\alpha \cdot \beta = -21$ et $\alpha + \beta = 4$

$\Rightarrow$ on cherche par tâtons, tous les produits de 2 nombres entiers qui donnent -21 et on regarde si leur somme vaut $+4$

$\Rightarrow$ Donc $\alpha = -3$ et $\beta = 7$

$\Rightarrow$ $x^2 + 4x - 21 = (x-3)(x+7)$

5) Méthode par groupements

Cette méthode des groupements ne s'applique que lorsqu'on a au moins 4 termes (en générale 4).

- On peut mettre en évidence non seulement un nombre ou un monôme mais aussi un polynôme :

$$(x+3)^2 - 7(x+3) = (x+3)\left[(x+3) - 7\right] = (x+3)(x-4)$$

- Parfois, un double changement de signes est nécessaire à la mise en évidence :

$$(a-b)(x+y) - 2(b-a)(x-5y) = (a-b)(x+y) + 2(a-b)(x-5y)$$

$$= (a-b)\left((x+y) + 2(x-5y)\right) = (a-b)(3x-9y) = 3(a-b)(x-3y)$$

La méthode par groupements procède par mises en évidence partielles, avant de pouvoir mettre en évidence un polynôme :

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 12 = (x^3 + 3x^2) + (4x + 12) = x^2(x+3) + 4(x+3)$$
$$= \underline{(x+3)(x^2+4)}$$

* Principe :

- Former plusieurs groupes de termes (en général deux groupes) de manière à mettre en évidence un même facteur dans chaque groupe.
- Mettre en évidence ce facteur commun
- Terminer la factorisation.

c) Fonctions polynômes :

* Généralités :

On note $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes en x.

$p \in \mathbb{R}[x]$ s'écrit

$$p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

avec $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ et $a_n \neq 0$

où
- a_n est le facteur dominant
- n est le degré du polynôme
- a_0 est le terme constant

1) Division euclidienne dans $\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{r|l} \underset{\text{dividende}}{2022} & \overset{\text{diviseur}}{11} \\ \hline -11 & \underbrace{183}_{\text{Quotient}} \\ 92 & \\ -88 & \\ 42 & \\ -33 & \\ \underbrace{9}_{\text{Reste}} & \end{array}$$

$\Rightarrow 2022 = 183 \times 11 + 9$

* **Théorème** :

Pour tout $D, d \in \mathbb{N}^*$, il existe deux nombres unique q et r tels que :

1) $D = q \cdot d + r$

2) $0 \leq r < d$

Nous allons voir comment effectuer la même opération dans $\mathbb{R}[x]$

posons $D = x^2 + 5x + 7$

et $d = x$

$$\begin{array}{l|l} x^2 + 5x + 7 & x \\ \hline -x^2 & x + 5 \\ 0 + 5x & \\ \quad -5x & \\ \quad\ 0x + 7 & \end{array}$$

Donc $\underbrace{x^2 + 5x + 7}_{\text{dividende}} = \underbrace{(x+5)}_{\text{quotient}} \cdot x + \underbrace{7}_{\text{reste}}$

* **Théorème :**

Pour tout polynôme $p, q \in \mathbb{R}[x]$, il existe deux polynômes uniques $a, b \in \mathbb{R}[x]$ tels que :

1) $p = a \cdot q + b$

2) $\deg(b) < \deg(q)$

Exemple :

1) $p = 3x^7 - x + 2000 \Rightarrow \deg(p) = 7$

2) $p = 4 \Rightarrow \deg(p) = 0$

3) $p = 0 \Rightarrow \deg(p) = -\infty$

4) $\deg(p \cdot q) = \deg(p) + \deg(q)$

5) $\deg(\underbrace{x^4}_{p} \cdot \underbrace{5}_{q}) = 4 + 0 = 4$

6) $\deg(\underbrace{x^4 \cdot 0}_{0}) = 4 + (-\infty) = -\infty$

7) $\deg(p + q) \leq \max(\deg(p) ; \deg(q))$

* **Rappel :**

$\underbrace{D(x)}_{\text{polynôme Dividende}} = \underbrace{d(x)}_{\text{polynôme diviseur}} \underbrace{q(x)}_{\text{" quotient}} + \underbrace{r(x)}_{\text{" Reste}}$ avec $\deg(r(x)) < \deg(d(x))$

L'égalité : $\boxed{D = dq + r}$ s'appelle l'égalité fondamentale de la division

* **Théorème** : (aussi dans Critère du reste d'une division par $d(x) = x - a$)

Le reste de la division d'un polynôme $P(x)$ par le binôme $x - a$ vaut $P(a)$

* **Corollaire** :

Le nombre a est un zéro du polynôme $P(x)$ si et seulement si $P(x)$ est divisible par $x - a$

2) Schéma de Horner :

Il existe une disposition pratique des calculs dans le cas de la division par $x - a$, c-à-d un binôme unitaire du premier degré : le schéma de Horner.

* Exemple :

$$D(x) = 3x^4 - 8x^3 + 10x + 5 \quad , \quad d(x) = x - 2$$

	3	-8	0	10	5
		+	+	+	+
2		6	-4	-8	4
	3	-2	-4	2	9 ← reste

x2 x2 x2 x2

⇒ quotient : $3x^3 - 2x^2 - 4x + 2$

reste : 9

* **Théorème** :

Soit $P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$ un polynôme à coéfficients entiers.

i) Si a est un zéro entier de $P(x)$ alors a est un diviseur de c_0

ii) Si $a = \frac{u}{v}$ est un zéro rationnel de $P(x)$, avec u et v premiers entre eux, alors u est un diviseur de c_0 et v est un diviseur de c_n

! **Attention** : Le schéma de Horner n'est valable que pour des divisions par un polynôme unitaire du 1er degré, donc des diviseurs du type : $d(x) = (x-a)$

3) Critère de divisibilité :

* Introduction :

i) Soit $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x+2)(x-3)$

on dit que :

i) 1, -2 et 3 sont les zéros de $p(x)$

ii) $(x-1)$, $(x+2)$ et $(x-3)$ sont les facteurs de $p(x)$

iii) $(x-1)(x+2)(x-3)$ est la décomposition en facteurs de $p(x)$

iv) $p(x)$ est multiple de $(x-1)$, $(x+2)$ et $(x-3)$

v) $p(x)$ est divisible par $(x-1)$, $(x+2)$ et $(x-3)$

ii) Soit $p(x) = x^3 - 7x + 6$

$\Rightarrow$ cherchons, par tâtons, des zéros de $p(x)$:

- Si $x = 0$: $p(0) = 0^3 - 7\cdot 0 + 6 = 6 \neq 0 \Rightarrow 0$ n'est pas un zéro.
- Si $x = 1$: $p(1) = 1^3 - 7\cdot 1 + 6 = 0 \Rightarrow 1$ est un zéro.

  Donc $p(x)$ est divisible par $(x-1) \Rightarrow p(x) = (x-1)\cdot(\quad ? \quad)$
- Si $x = 2$: $p(2) = 2^3 - 7\cdot 2 + 6 = 0 \Rightarrow 2$ est un zéro

  Donc $p(x)$ est divisible par $(x-2) \Rightarrow p(x) = (x-1)(x-2)(\quad ? \quad)$
- $\vdots$
- Si $x = -3$: $p(-3) = (-3)^3 - 7\cdot(-3) + 6 = 0 \Rightarrow -3$ est un zéro

  Donc $p(x)$ est divisible par $(x+3) \Rightarrow p(x) = (x-1)(x-2)(x+3)$

En développant $(x-1)(x-2)(x+3)$, on obtient bien $p(x) = x^3 - 7x + 6$

⇒ Cas général :

Critère de divisibilité :

$$\boxed{p(x) \text{ est divisible par } (x-a) \Leftrightarrow p(a) = 0}$$

4) Méthode de factorisation en utilisant le critère de divisibilité et le schéma de Horner :

* Remarque :

- En général, il est très difficile de factoriser des polynômes de degré $n \geq 3$
- Dans ce chapitre, les polynômes à factoriser posséderont toujours au moins un zéro entier compris dans l'ensemble $\{-3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3\}$
- Un polynôme de degré n possède au maximum n zéros.
- Les valeurs à tester doivent être des diviseurs de la valeur constante de $p(x)$:

  Si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x_1 + a_0$, (avec $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ des entiers), alors les zéros entiers de p seront forcément des diviseurs de a_0.

* Exemple : Factoriser $p(x) = x^3 + x^2 - 22x - 40$

- Tâtonnement : $x = 1 \Rightarrow p(1) = 1 + 1 - 22 \cdot 1 - 40 \neq 0$

  $x = 2 \Rightarrow p(2) = 8 + 4 - 44 - 40 \neq 0$

  $x = -2 \Rightarrow p(-2) = -8 + 4 + 44 - 40 = 0$

  $\Rightarrow$ div par $(x+2)$

Horner :

	1	1	-22	-40
-2		-2	2	40
	1	-1	-20	$\boxed{0}$

= Reste

$\Rightarrow \quad q(x) = x^2 - x - 20 = (x-5)(x+4)$

trinôme unitaire pour factoriser $q(x)$

Donc $\quad p(x) = (x+2)(x-5)(x+4)$

5) Critère du reste d'une division par $d(x) = x-a$

Remarque :

- Si le diviseur est du 1er degré, le reste sera de degré 0. Ce sera donc une constante.

  $\Rightarrow$ on notera $r(x) = r$. La preuve devient :

$$\boxed{p(x) = (x-a)\,q(x) + r}$$

- $p(a) = (a-a)\,q(a) + r = 0 \cdot q(a) + r = 0 + r = r$ ✓

D'où le critère du reste :

Le reste de la division de $p(x)$ par $(x-a)$ est égal à $p(a)$

$$\boxed{r = p(a)}$$

* Exemple : Trouver le reste de la division de $p(x) = x^{10} - x^5 + 8$ par $d(x) = (x-2)$

zéro $x = 2$

$\Rightarrow p(2) = 2^{10} - 2^5 + 8 = 1024 - 32 + 8 = 1000 = \underline{\underline{\text{reste}}}$.

D) Fractions rationnelles

Une fraction rationnelle est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des polynomes.

a) Simplification d'une fraction rationnelle

Ex :

- $$\frac{6x^2+6x-120}{4x+20} = \frac{6(x^2+x-20)}{4(x+5)} = \frac{6\cancel{(x+5)}(x-4)}{4\cancel{(x+5)}} = \frac{3(x-4)}{2}$$

- $$\frac{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{x^2-y^2} = \frac{(x+y)^{\cancel{3}}}{(x-y)\cancel{(x+y)}} = \frac{(x+y)^2}{x-y}$$

b) Multiplication et division de fractions rationnelles

Ex :

- $$\frac{4x^2+20x+24}{x^2+4x-5} \cdot \frac{x^2-1}{2x+4} = \frac{\cancel{4}(x+3)\cancel{(x+2)}}{(x+5)\cancel{(x-1)}} \cdot \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{2}\cancel{(x+2)}} = 2\frac{(x+3)(x+1)}{x+5}$$

- $$\frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x-y} : \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x-y} \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{(\cancel{x^2+y^2})^2}{\cancel{x-y}} \cdot \frac{\cancel{(x-y)}(x+y)}{\cancel{x^2+y^2}} = (x^2+y^2)(x+y)$$

c) Addition et soustraction de fractions rationnelles

Ex :

- $$\frac{2-x}{x^2-x-6} + \frac{x+1}{x^2+6x+8} = \frac{2-x}{(x-3)(x+2)} + \frac{x+1}{(x+2)(x+4)}$$

$$= \frac{(2-x)(x+4) + (x+1)(x-3)}{(x-3)(x+2)(x+4)} = \frac{(2x+8-x^2-4x)+(x^2-3x+x-3)}{(x-3)(x+2)(x+4)}$$

$$= \frac{-4x+5}{(x-3)(x+2)(x+4)}$$

- $$\frac{x}{x^2-y^2} - \frac{x}{x^2+2xy+y^2} + \frac{1}{2y-2x} = \frac{x}{(x-y)(x+y)} - \frac{x}{(x+y)^2} - \frac{1}{2(x-y)}$$

$$= \frac{2x(x+y) - 2x(x-y) - (x+y)^2}{2(x-y)(x+y)^2} = \frac{(2x^2+2xy)-(2x^2-2xy)-(x^2+2xy+y^2)}{2(x-y)(x+y)^2}$$

$$= \frac{-x^2+2xy-y^2}{2(x-y)(x+y)^2} = \frac{-(x-y)^2}{2(x-y)(x+y)^2} = \frac{-(x-y)}{2(x+y)^2}$$

$$= \frac{y-x}{2(x+y)^2}$$

E) Équations rationnelles :

Une équation rationnelle est une équation comportant une ou plusieurs fractions rationnelles.

Pour résoudre une telle équation :

- On détermine tout d'abord les valeurs à exclure en calculant les zéros des dénominateurs. (=> on pose l'ensemble de définition ED)
- En multipliant par le dénominateur commun, on obtient une nouvelle équation, appelée résolvante, qui n'est pas équivalente à l'équation initiale, mais qui contient toutes les solutions de l'équation de départ.
- On vérifie si les solutions obtenues sont valides ou non, c-à-d si les solutions obtenues appartiennent à l'ensemble de définition.

F) Équations irrationnelles :

* Une équation irrationnelle à une inconnue est une équation où l'inconnue apparaît sous un radical $\sqrt[n]{\ldots}$

* Principe de résolution :

Marche à suivre pour résoudre une équation irrationnelle :

i) Isoler un radical $\sqrt[n]{\ldots}$ dans un des membres de l'équation à l'aide des règles d'équivalence,

ii) Élever les deux membres de l'équation à la puissance n → le radical isolé disparaît,

iii) Répéter les étapes i) et ii) afin de faire disparaître l'ensemble des radicaux,

iv) Résoudre l'équation à une inconnue obtenue,

v) Vérifier les solutions obtenues dans l'équation de départ.

! <u>Attention :</u> Le fait d'élever à la puissance n les deux membres d'une équation peut introduire des solutions qui ne satisfont pas l'équation initiale. C'est pourquoi il est important de tester les solutions trouvées dans l'équation de départ.

* <u>Exemple :</u>

Résoudre : $\sqrt{x+5} + x - 1 = 0$

$$\begin{array}{rcl|l}
\sqrt{x+5} + x - 1 & = & 0 & -(x-1) \quad \text{(isoler le radical)} \\
\sqrt{x+5} & = & -x+1 & (\ldots)^2 \quad \text{(élever au carré)} \\
x+5 & = & (-x+1)^2 & \text{développer} \\
x+5 & = & x^2 - 2x + 1 & -(x+5) \\
0 & = & x^2 - 3x - 4 &
\end{array}$$

On résout alors l'équation du deuxième degré :

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1(-4) = 25 = 5^2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3-5}{2} = -1 \\ x_2 = \dfrac{3+5}{2} = 4 \end{cases}$$

! Important : Il faut maintenant vérifier les solutions obtenues en les substituant à x dans l'équation de départ.

* vérification :

- Avec $x_1 = -1 \Rightarrow \sqrt{-1+5} + (-1) - 1 \stackrel{?}{=} 0$

$$\sqrt{4} - 1 - 1 \stackrel{?}{=} 0$$

$$2 - 2 = 0 \rightarrow \text{OK}$$

- Avec $x_2 = 4 \Rightarrow \sqrt{4+5} + 4 - 1 \stackrel{?}{=} 0$

$$\sqrt{9} + 3 \stackrel{?}{=} 0$$

$$3 + 3 = 6 \neq 0 \rightarrow \text{NON}$$

$\Rightarrow$ L'ensemble de solution, après vérification, est :

$$S = \{-1\}$$

G) Les systèmes d'équations

Différentes méthodes de résolutions de systèmes existent. On rappelle les deux plus courantes.

1) par substitution :

$\rightarrow$ Isoler une inconnue dans une des équations, puis remplacer dans les autres.

2) Par combinaison linéaire (ou élimination de Gauss)