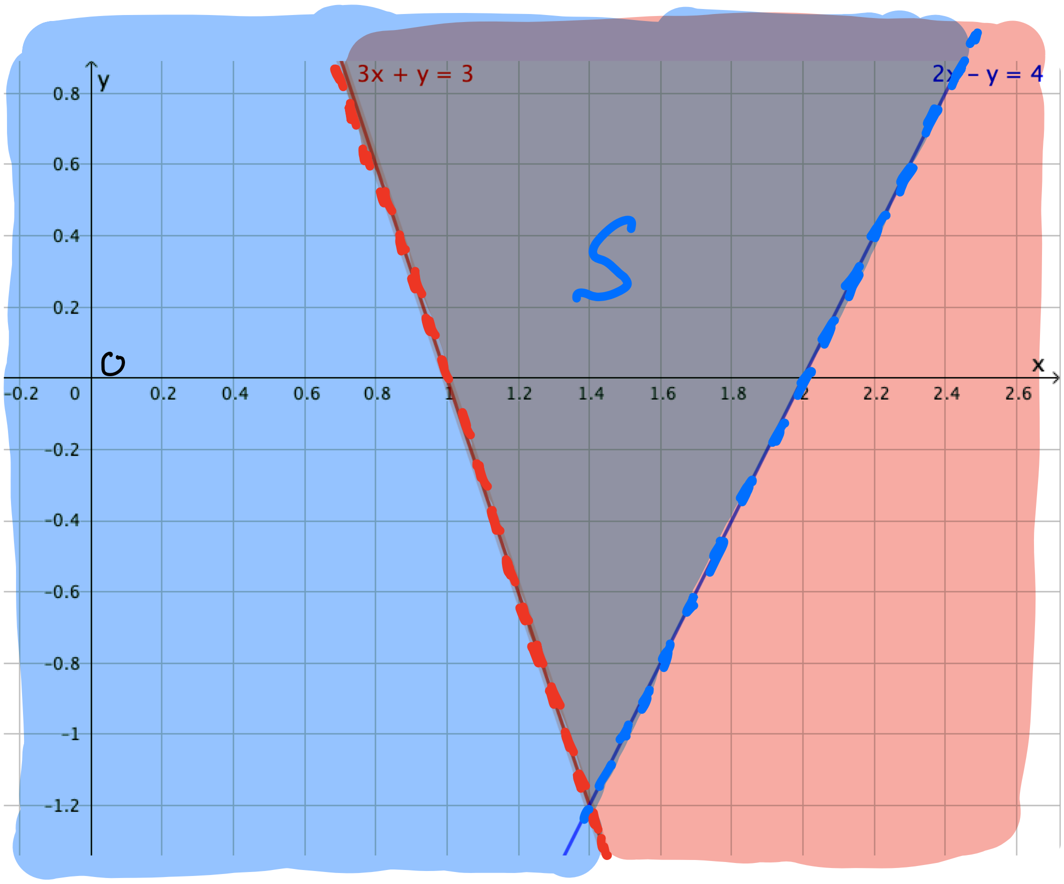
Programmation linéaire

Corrigé

Exercice 3.1 :

Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'inéquations suivants.

a) $\begin{cases} 3x + y > 3 \\ 2x - y < 4 \end{cases}$



1) Tracer 2 droites

$3x + y = 3$

et $2x - y = 4$

2) Tester les zones avec $O(0;0)$

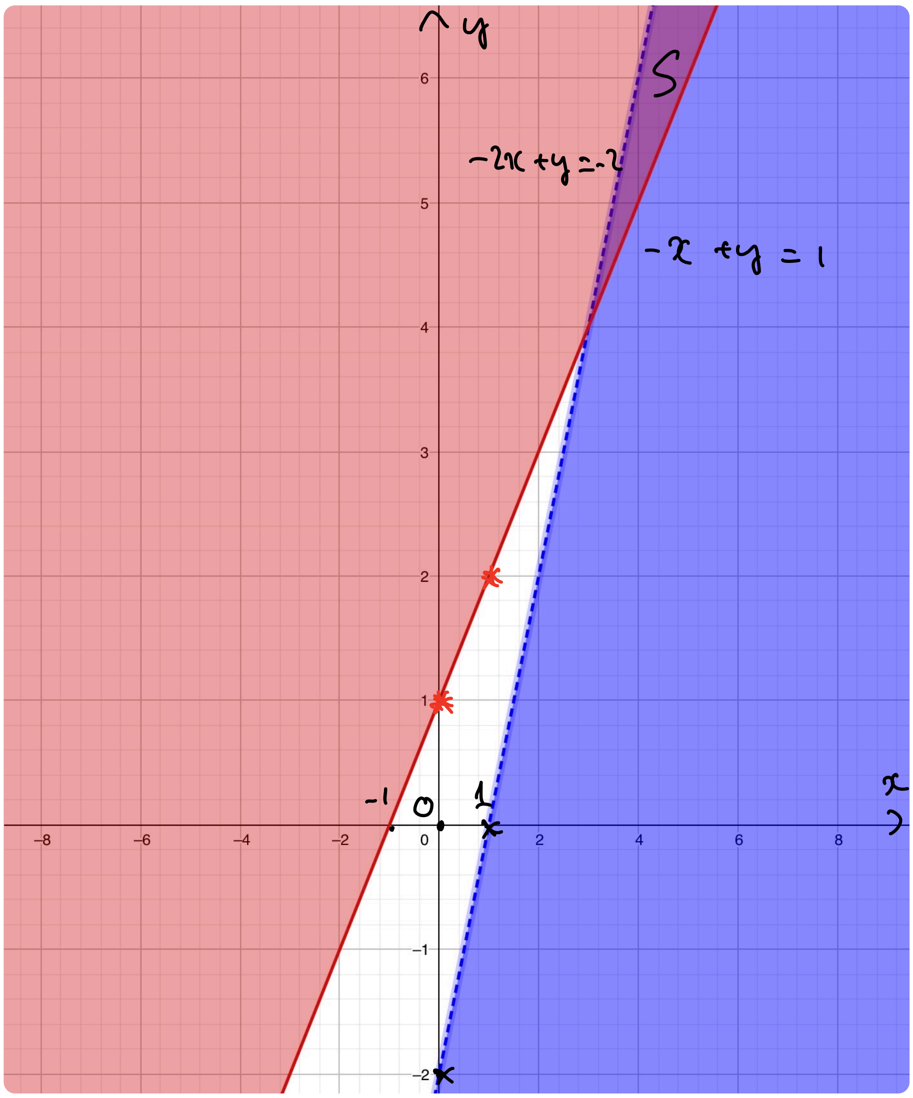
- $3x + y > 3$

  $3 \cdot 0 + 0 > 3 \Rightarrow 0 > 3$ NON

- $2x - y < 4$

  $2 \cdot 0 - 0 < 4 \Rightarrow 0 < 4$ OUI

b) $\begin{cases} -2x + y < -2 \\ -x + y \geq 1 \end{cases}$



1) Tracer 2 droites

* $-2x + y = -2$

$\Rightarrow y = 2x - 2$

$m = 2$

$h = -2$

* $-x + y = 1$

$\Rightarrow y = x + 1$

$m = 1$

$h = 1$

2) Tester avec $O(0;0)$

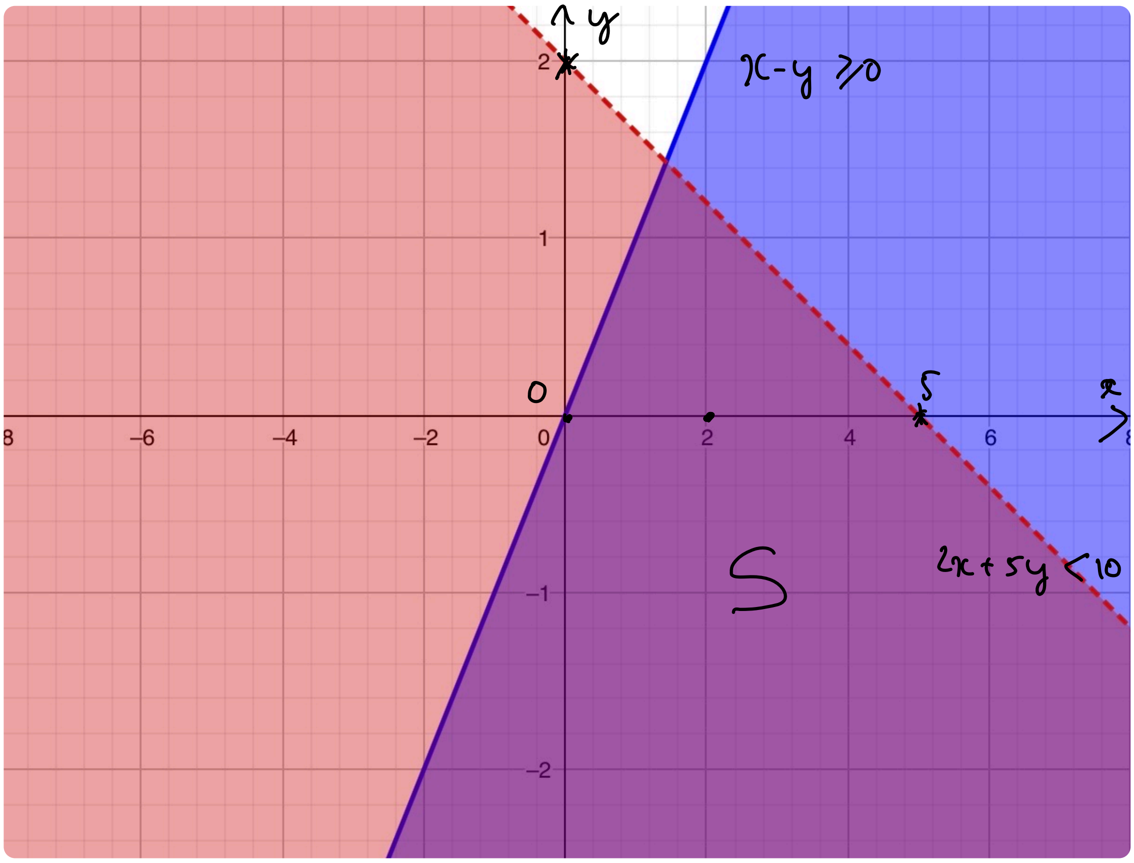
• $-2x + y < -2$

$0 + 0 < -2$ NON

• $-x + y \geq 1$

$0 + 0 \geq 1$ NON

c) $\begin{cases} x - y \geqslant 0 \\ 2x + 5y < 10 \end{cases}$



1) Tracer 2 droites :

* $x - y = 0 \Rightarrow y = x \rightarrow m = 1 \; ; \; h = 0$

* $2x + 5y = 10 \Rightarrow 5y = -2x + 10$

$\Rightarrow y = \frac{-2}{5} x + 2$

$m = -\frac{2}{5}$ $\quad h = 2$

2) Tester les zones avec $(2 ; 0)$

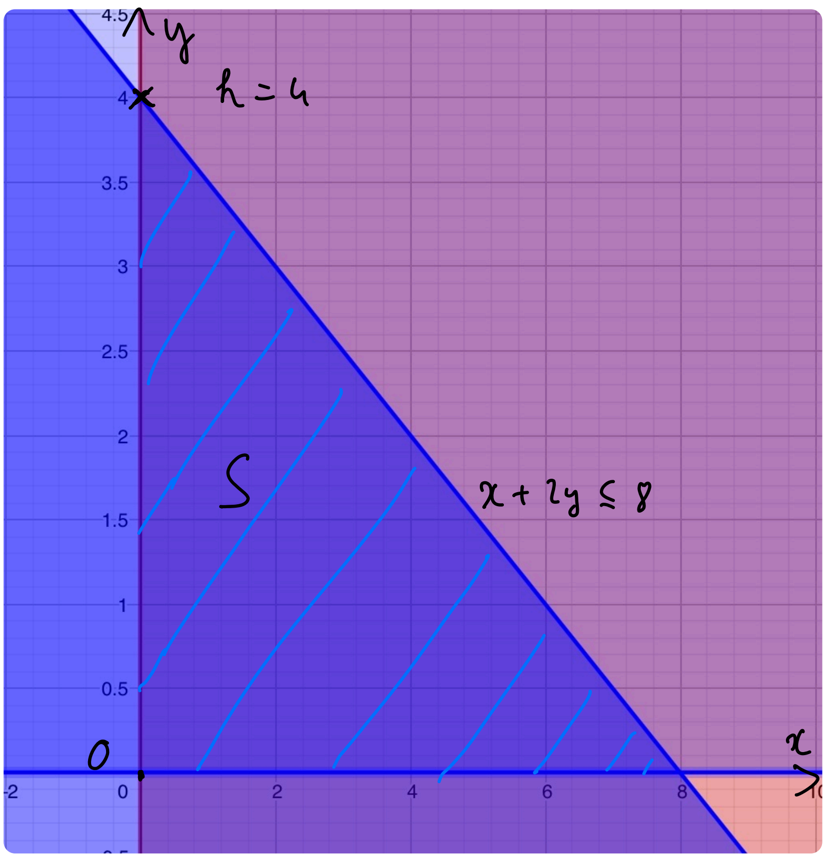
* pour $x - y \geqslant 0$ avec le point $(2 ; 0)$

$\Rightarrow \quad 2 - 0 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \geq 0$ oui

* pour $2x + 5y < 10$ avec le point $(0;0)$

$\Rightarrow \quad 2\cdot 0 + 5 \cdot 0 < 10 \quad \Rightarrow \quad 0 + 0 < 10$ oui

d) $\begin{cases} x + 2y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

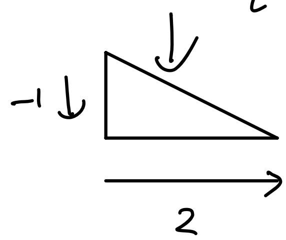


1) Tracer les 3 droites :

* $x + 2y = 8$

$y = -\frac{x}{2} + 4$

$m = -\frac{1}{2}$ et $h = 4$



* $x = 0$

* $y = 0$

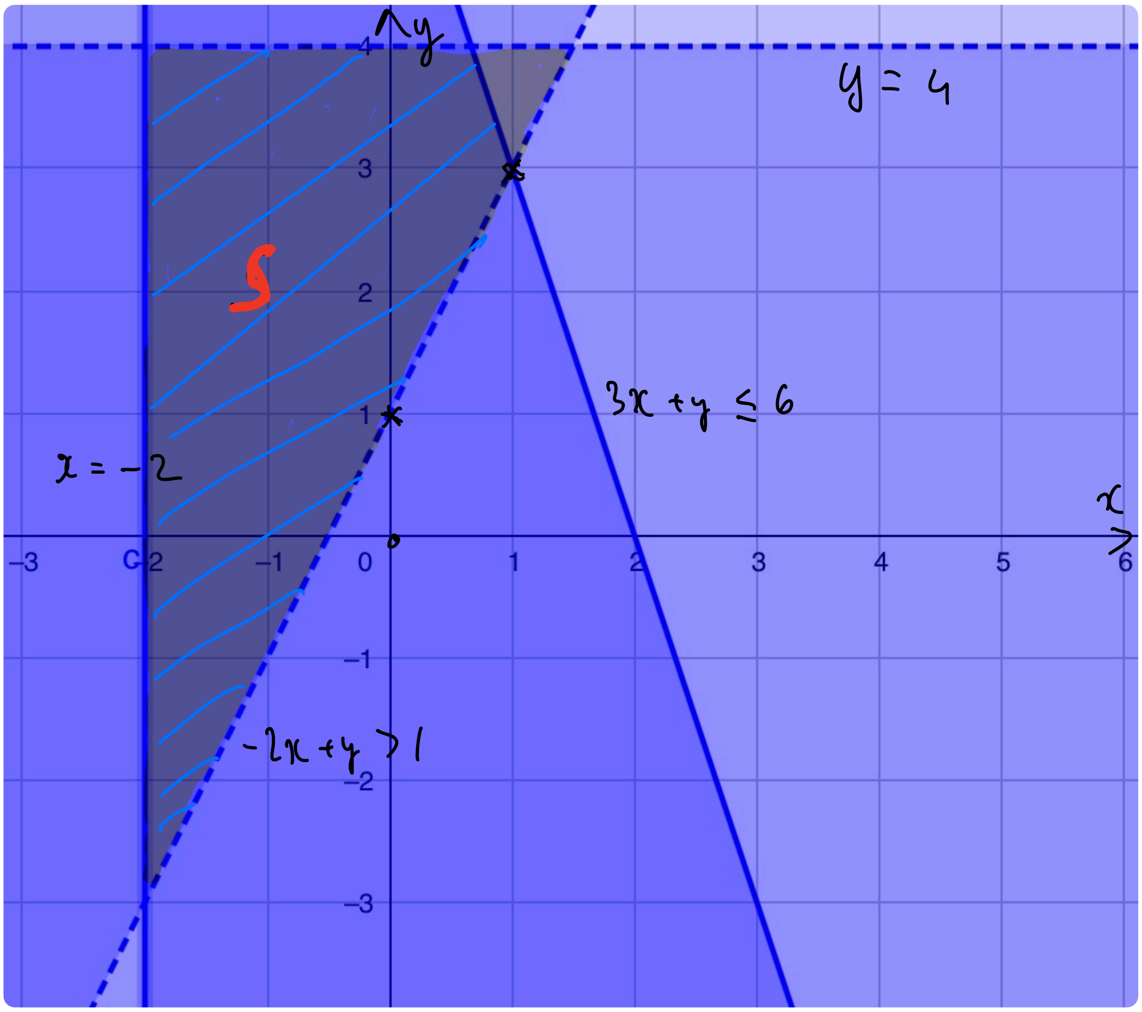
2) Tester les zones avec le point $(0;0)$

* $x + 2y \leq 8 \quad \Rightarrow \quad 0 + 2\cdot 0 \leq 8$ oui

* $x \geq 0 \quad \rightarrow$ on prend la partie où $x \geq 0$

* $y \geq 0 \quad \rightarrow$ " , $y \geq 0$

e) $\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ -2x + y > 1 \\ x \geq -2 \\ y < 4 \end{cases}$



1) Tracer les 4 droites :

* $3x + y = 6 \Rightarrow y = \underbrace{-3x}_{m} \underbrace{+6}_{h}$

* $-2x + y = 1 \Rightarrow y = \underbrace{2x}_{m} \underbrace{+1}_{h}$

* $x = -2$

* $y = 4$

2) Tester les zones avec $O(0;0)$

* $3x + y \leq 6$

  $3 \cdot 0 + 0 \leq 6$ OUI

* $-2x + y > 1$

  $-2 \cdot 0 + 0 > 1$ NON

* $x \geqslant -2$

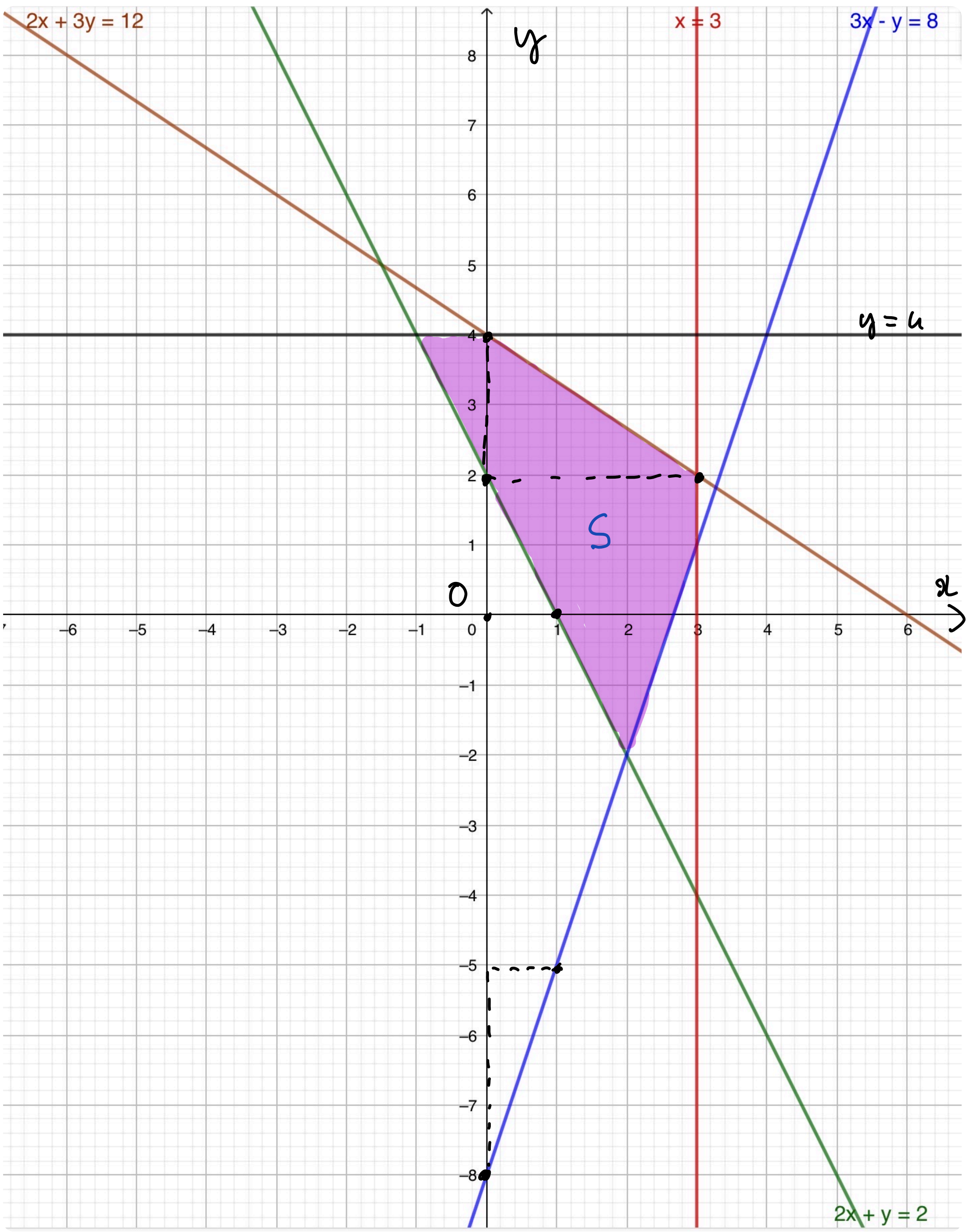
  $0 \geqslant -2$ OUI

* $y < 4$

  $0 < 4$ OUI

f)

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 12 \\ 2x + y \geq 2 \\ 3x - y \leq 8 \\ x \leq 3 \\ y \leq 4 \end{cases}$$



1) Tracer les 5 droites :

* $2x + 3y = 12$

$\Rightarrow y = \frac{-2x}{3} + \frac{12}{3}$

$\Rightarrow y = \underbrace{-\frac{2}{3}}_{m} x \underbrace{+ 4}_{h}$

* $2x + y = 2$

$\Rightarrow y = \underbrace{-2}_{m}x \underbrace{+2}_{h}$

* $3x - y = 8 \quad | \cdot (-1)$

$-3x + y = -8 \quad | +3x$

$\Rightarrow y = \underbrace{3}_{m}x \underbrace{-8}_{h}$

* $x = 3$

* $y = 4$

2) Tester les zones avec $O(0;0)$

* $2x + 3y \leq 12 \Rightarrow 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 12$

$\Rightarrow 0 \leq 12$ oui

* $2x + y \geq 2 \Rightarrow 2 \cdot 0 + 0 \geq 2$

$\Rightarrow 0 \ngeq 2$ NON

* $3x - y \leq 8$

$\Rightarrow 3 \cdot 0 - 0 \leq 8$ oui

* $x \leq 3$

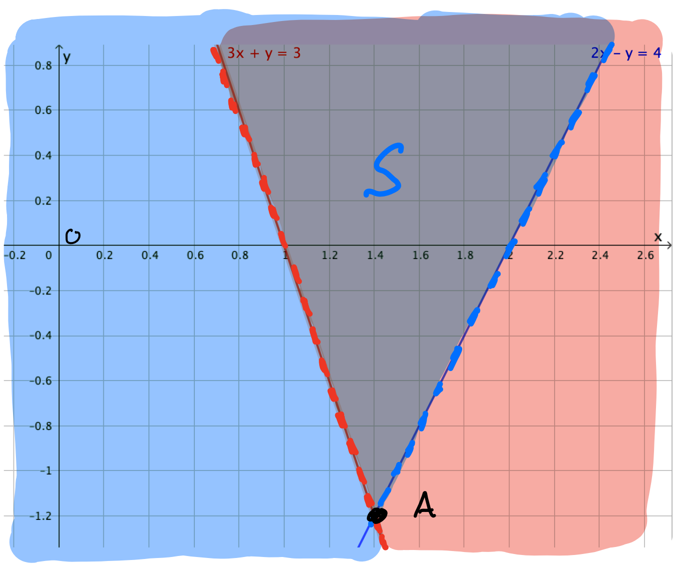
$\Rightarrow 0 \leq 3$ oui

* $y \leq 4$ oui

Exercice 3.2

Déterminer les sommets des polygones de solutions des systèmes d'inéquations de l'exercice 2.

a)



le sommet est l'intersection entre deux droites :

$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ il faut résoudre ce système pour trouver le point d'intersection.

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 3 & (1) \\ 2x - y = 4 & (2) \end{cases}$$

$(1) + (2) \Rightarrow 3x + 2x + y - y = 3 + 4$

$\Rightarrow 5x = 7 \quad | \div 5$

$x = \frac{7}{5}$

On remplace $x = \frac{7}{5}$ dans (1)

$$\Rightarrow \quad 3 \cdot \frac{7}{5} + y = 3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{21}{5} + y = 3 \quad \Big| \cdot (5)$$

$$\Rightarrow \quad 21 + 5y = 15 \quad \Big| - 21$$

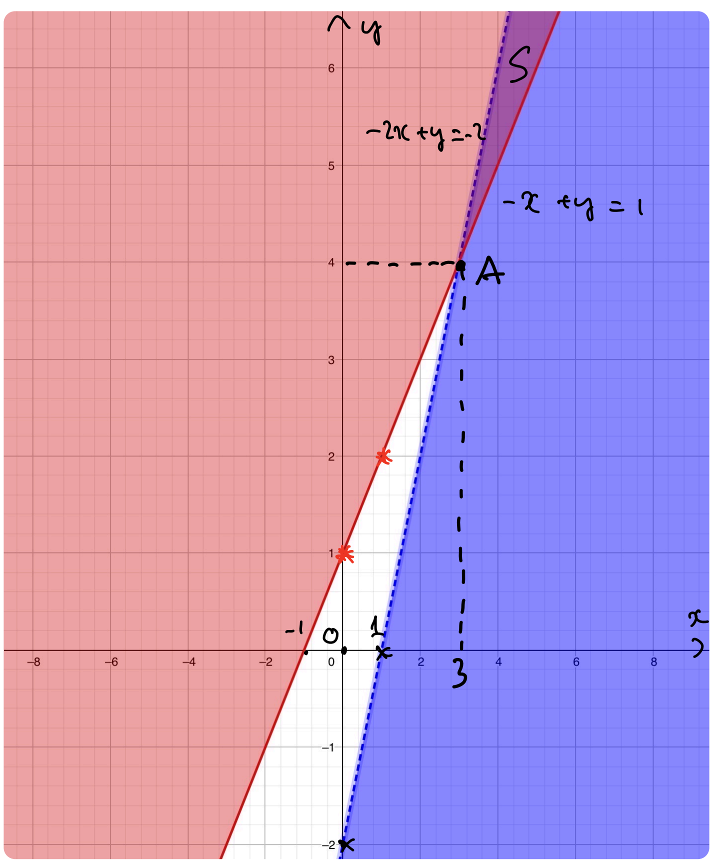
$$\Rightarrow \quad 5y = 15 - 21$$

$$\Rightarrow \quad 5y = -6 \quad \Big| \div (5)$$

$$y = -\frac{6}{5}$$

donc le sommet $A\left(\frac{7}{5} ; -\frac{6}{5}\right)$

b)



le sommet A peut être déterminer directement sur le graphe

$A(3 ; 4)$

* Vérification :

Le sommet A est l'intersection entre $-2x + y = -2$ et

$-x + y = 1$

$\Rightarrow$ il faut résoudre le système :

$$\begin{cases} -2x + y = -2 & (1) \\ -x + y = 1 & (2) \end{cases}$$

$(1) - (2) \Rightarrow -2x - (-x) + y - y = -2 - 1$

$\Rightarrow -2x + x = -3$

$\Rightarrow -x = -3 \quad | \cdot (-1)$

$\Rightarrow x = 3$

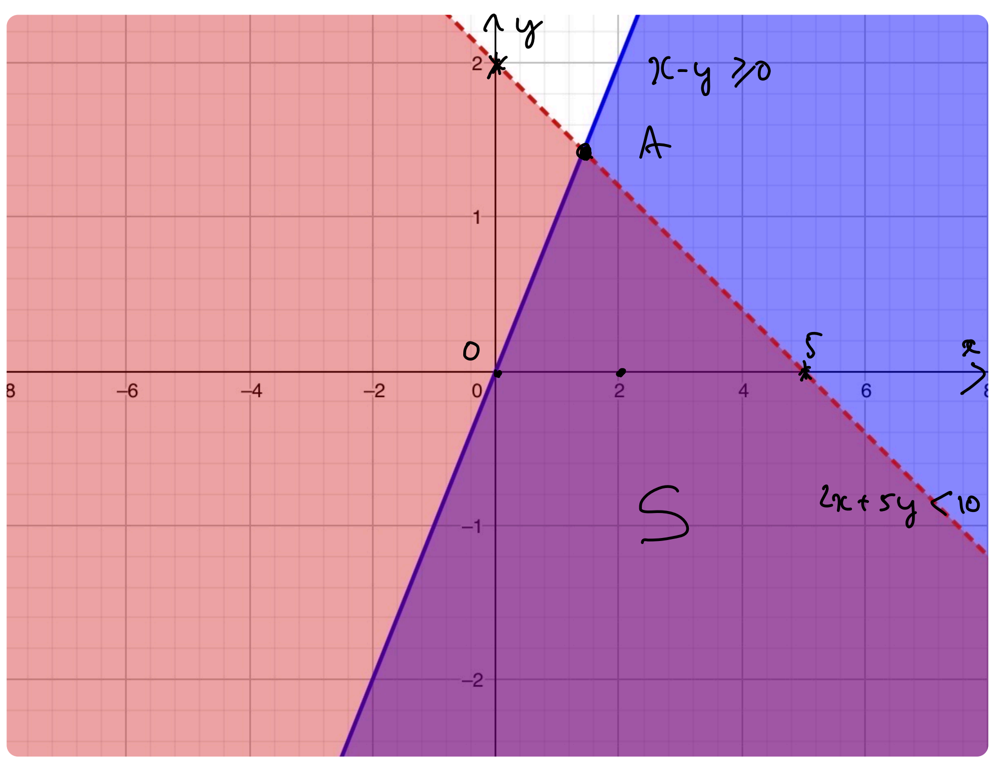
Remplacer $x = -3$ dans (2) :

$-3 + y = 1 \quad | +3$

$\Rightarrow y = 4$

Donc $A(3\,;4)$

c)



Le sommet A est l'intersection entre $x - y = 0$ et $2x + 5y = 10$

$\Rightarrow$ il faut résoudre : $\begin{cases} x - y = 0 & (1) \\ 2x + 5y = 10 & (2) \end{cases}$

Par substitution : $(1) \Rightarrow x = y$

Remplacer $x = y$ dans (2)

$$\Rightarrow \quad 2y + 5y = 10$$

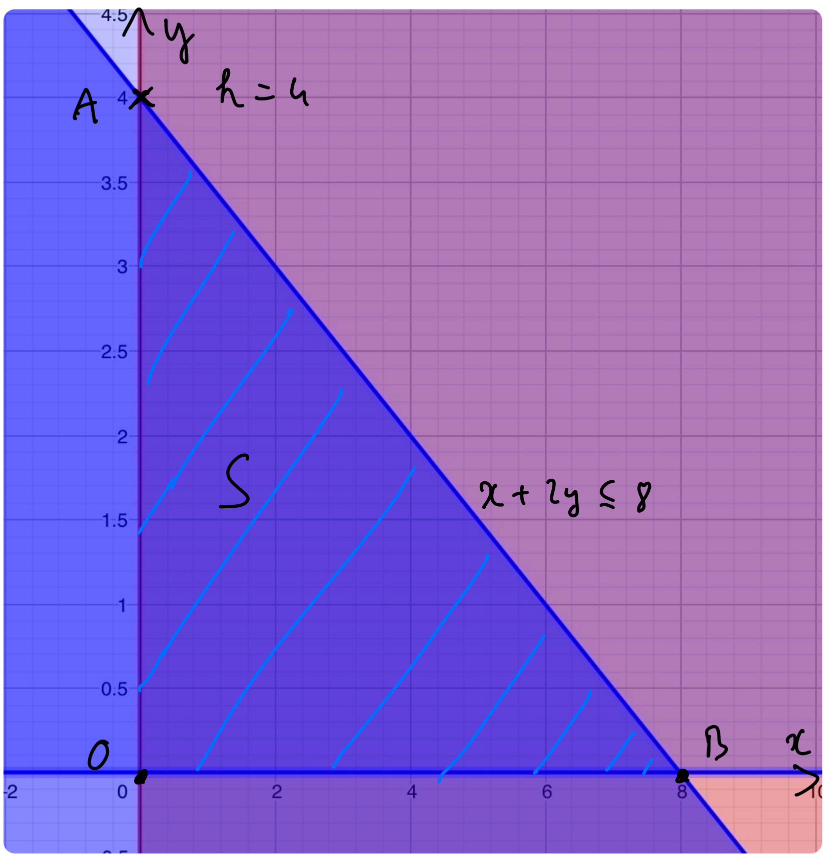
$$7y = 10 \quad \Big| \div 7$$

$$y = \frac{10}{7}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{10}{7}$$

donc $A\left(\frac{10}{7} ; \frac{10}{7}\right)$

d)



3 sommets O ; A et B

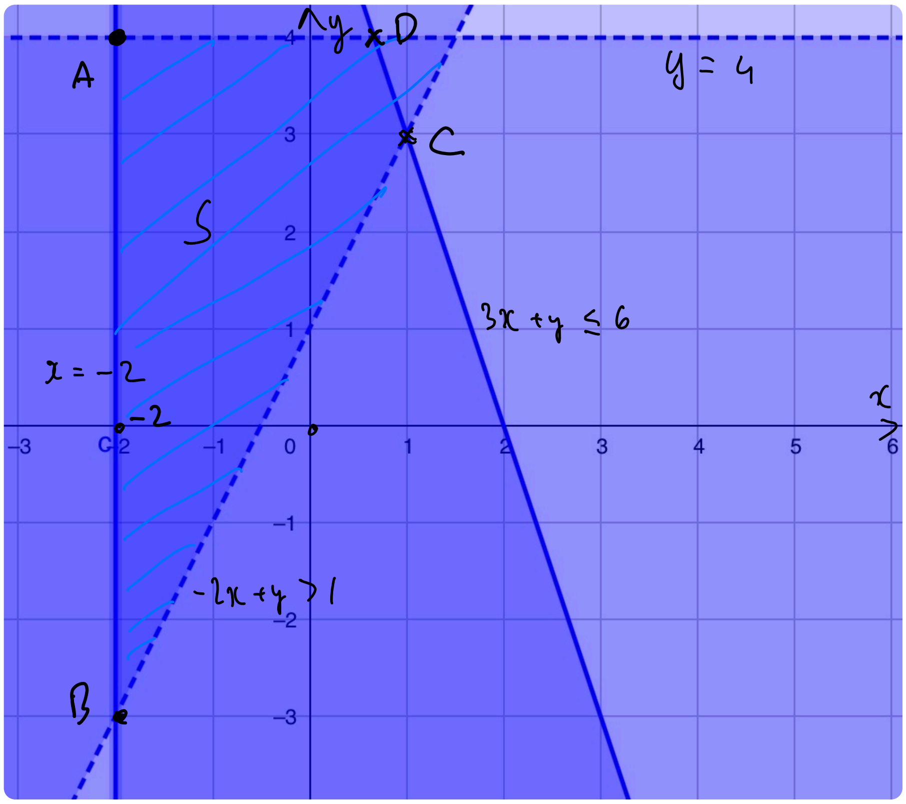
$\Rightarrow$ on peut les déterminer directement sur le graphe.

Donc $O(0;0)$

$A(0;4)$

et $B(8;0)$

e)



4 sommets : A, B, C et D

$\Rightarrow$ $A(-2\,;\,4)$

$B(-2\,;\,-3)$

$C(1\,;\,3)$

Le sommet D est l'intersection entre $3x+y=6$ et $y=4$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 6 & (1) \\ y = 4 & (2) \end{cases}$$

Remplacer $y = 4$ dans (1)

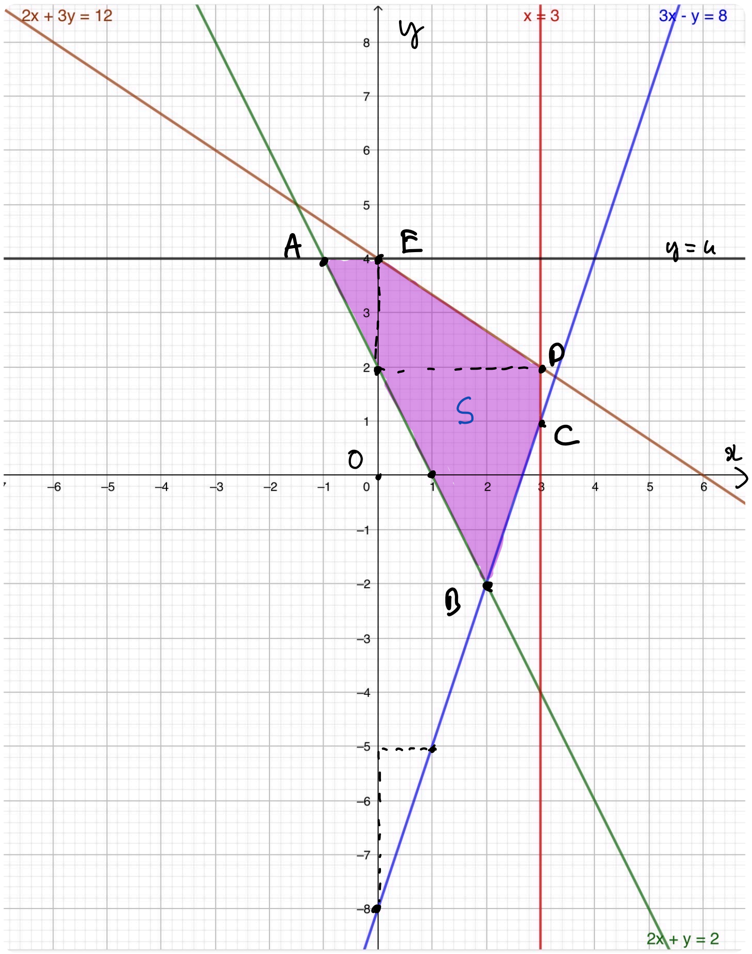
$$\Rightarrow \quad 3x + 4 = 6 \quad | -4$$

$$3x = 2 \quad | \div (3)$$

$$x = \frac{2}{3}$$

Donc $D\left(\frac{2}{3}\,;\,4\right)$

f)



5 sommets : A, B, C, D et E

Donc A $(-1 \,;\, 4)$

B $(2 \,;\, -2)$

C $(3 \,;\, 1)$

D $(3 \,;\, 2)$

E $(0 \,;\, 4)$

Directement sur le graphe !

! On peut déterminer ces sommets en résolvant les systèmes d'équations

Par exemple : le sommet A : $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ y = 4 \end{cases}$

le sommet B : $\begin{cases} 3x - y = 8 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

le sommet C : $\begin{cases} 3x - y = 8 \\ x = 3 \end{cases}$

le sommet D : $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x = 3 \end{cases}$

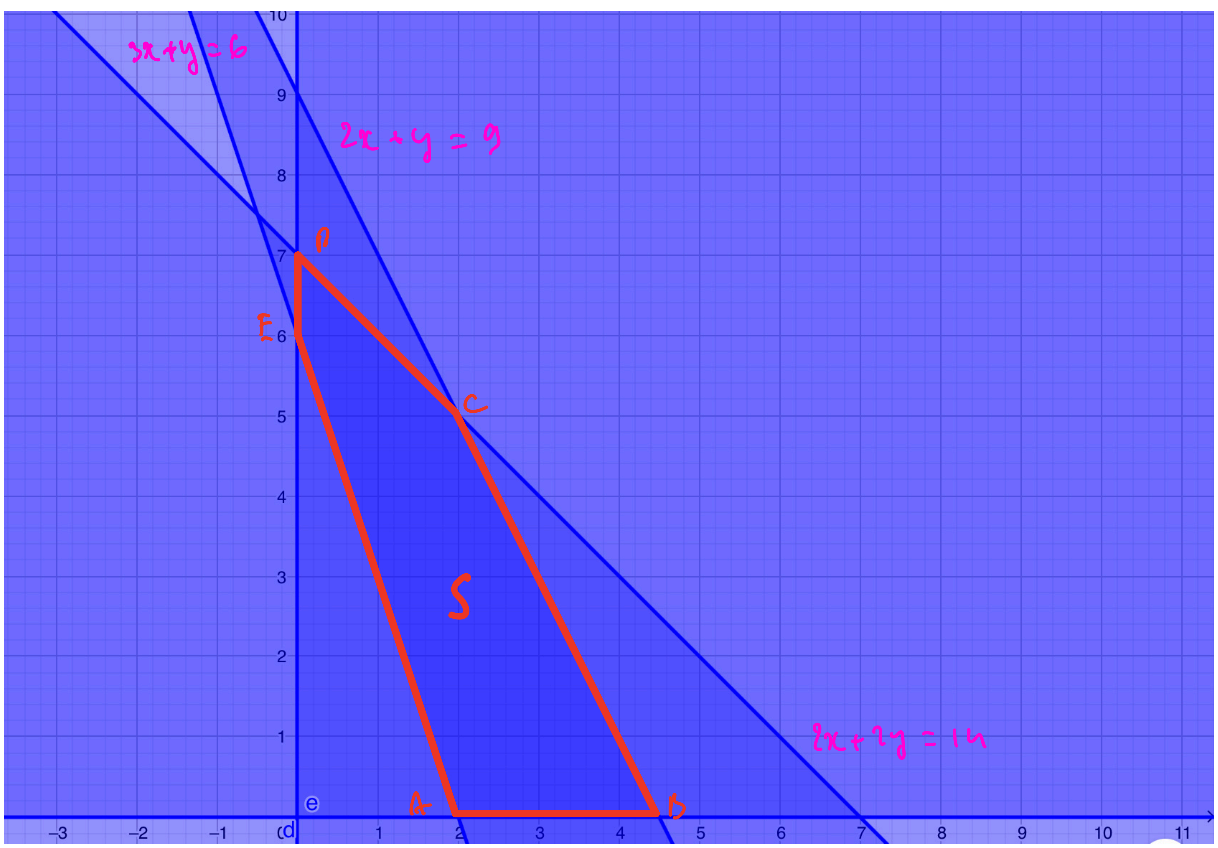
le sommet E : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$

3.3 Maximiser $f(x;y) = 6x + 5y$ sous les contraintes suivantes.

$$2x + y \leqslant 9, \quad 3x + y \geqslant 6, \quad 2x + 2y \leqslant 14, \quad x \geqslant 0 \quad \text{et} \quad y \geqslant 0$$

$f(x;y) = 6x + 5y$

contraintes $\begin{cases} 2x + y \leq 9 \\ 3x + y \geq 6 \\ 2x + 2y \leq 14 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x + 9 \\ y = -3x + 6 \\ y = -x + 7 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$



$f(x;y) = 6x + 5y \rightarrow y = -\frac{6}{5}x$

$\Rightarrow$ sommets : $A(2;0)$; $C(2;5)$; $D(0;7)$; $E(0;6)$

B est l'intersection entre $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{2} = 4,5 \\ y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow B\left(\frac{9}{2} ; 0\right)$

Maximiser $f(x;y) = 6x + 5y$

$\Rightarrow f(2;0) = 6 \cdot 2 + 5 \cdot 0 = 12$

$f\left(\frac{9}{2};0\right) = 6 \cdot \frac{9}{2} + 5 \cdot 0 = 27$

$\boxed{f(2;5) = 6 \cdot 2 + 5 \cdot 5 = 12 + 25 = 37}$

$f(0;7) = 6 \cdot 0 + 5 \cdot 7 = 35$

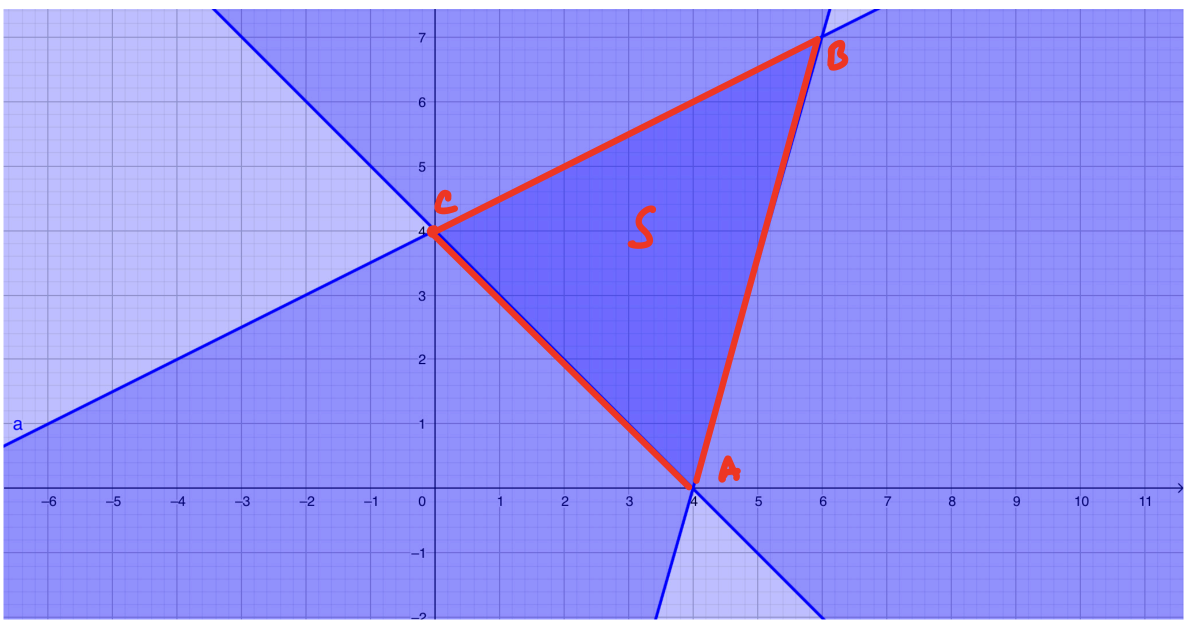
$f(0;6) = 6 \cdot 0 + 5 \cdot 6 = 30$

$\Rightarrow$ Max : $x = 2$, $y = 5$ $\Rightarrow f(2;5) = 37$

3.6 Déterminer la valeur maximum et minimum de la fonction $f(x;y) = 4x - 2y$ sujette aux contraintes suivantes.

$$\begin{cases} x - 2y \geqslant -8 \\ 7x - 2y \leqslant 28 \\ x + y \geqslant 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ on trace les droites frontières : $\begin{cases} x - 2y = -8 \\ 7x - 2y = 28 \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x}{2} + 4 \\ y = \frac{7}{2}x - 14 \\ y = -x + 4 \end{cases}$



$f(x;y) = 4x - 2y$

Ici, on a 3 sommets : $A(4;0)$, $B(6;7)$ et $C(0;4)$

$\Rightarrow$ $f(4;0) = 4\cdot 4 - 2\cdot 0 = 16$

$f(6;7) = 4\cdot 6 - 2\cdot 7 = 24 - 14 = 10$

$f(0;4) = 4\cdot 0 - 2\cdot 4 = -8$

$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \text{Min : } f(x;y) = -8 \\ \text{Max : } f(x;y) = 16 \end{array}}$