Programmation linéaire

1 Inéquations linéaires à deux variables

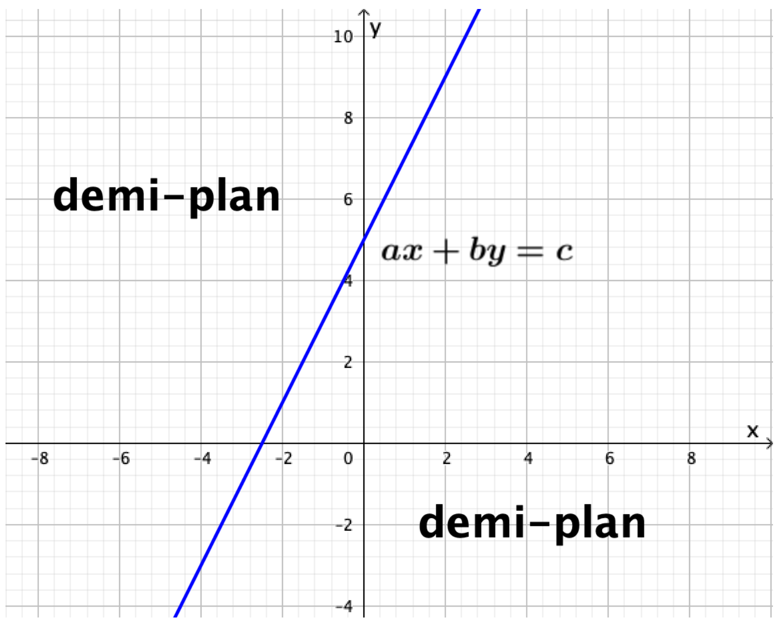
Une **inéquation linéaire à deux variables** est une inéquation qui peut être écrite sous l'une des formes suivantes :

$$ax + y < c \qquad ax + by > c \qquad ax + y \leq c \qquad ax + by \geq c$$

où a, b et c sont des nombres réels.

Résoudre une telle inéquation consiste à trouver l'ensemble de tous les couples $(x; y)$ (tous les points) tels que si l'on calcule la valeur numérique en x et y dans l'inéquation, on obtient une inégalité vraie.

Graphiquement, la droite $ax + y = c$ sépare le plan en deux demi-plans, comme le montre la figure ci-dessous. Les solutions d'une inéquation sont tous les points de l'un de ces demi-plans, la droite frontière étant incluse pour $\leq$ ou $\geq$, pas incluse pour $>$ ou $<$.



On choisit un point pris dans l'un des demi-plans, on relève ses coordonnées et on contrôle si ce point vérifie l'inéquation.
Pour déterminer rapidement le bon demi-plan défini par une inéquation, il suffit de regarder si le point $(0; 0)$ est du bon côté de la droite frontière.
Si la droite passe par l'origine, on essaie un autre point.

2 Système d'inéquations linéaires

Les solutions d'un **système d'inéquations** sont les **solutions communes** à toutes les inéquations du système. Le graphique d'un système d'inéquations correspond à une **région R** du plan contenant les points correspondants aux solutions.

3 Polygone des contraintes

Si un système d'inéquations contient uniquement des inéquations linéaires de la forme : $ax + y \leq c$ ou $ax + by \geq c$ où a, b et c sont des nombres réels, alors la représentation graphique de ce système est une **région R** limitée ou non du plan par un polygone convexe. Dans ce cadre des exercices de programmation linéaire, cette région sera appelée le *polygone des contraintes.*

4 Résolution d'un problème de programmation linéaire

La programmation linéaire à deux variables x et y est un outil mathématique permettant d'optimiser une situation dont les contraintes peuvent être représentées par les inéquations du type :

$$ax + by \leq c \text{ ou } ax + by \geq c$$

et dont la grandeur $f(x; y)$ à maximiser ou à minimiser en respectant les contraintes est de la forme :

$$f(x; y) = cx + dy + e$$

où c, d, e sont des nombres réels et $(x; y)$ est un point dans le polygone de contrainte (c'est-à-dire une solution du système).

— La fonction $f(x; y)$ est appelée la **fonction économique/fonction objectif**

— Les solutions du système des contraintes sont appelées les **solutions possibles** du système. L'ensemble des solutions possibles est appelé le **polygone des contraintes**.

— **Résoudre** un problème de programmation linéaire consiste à déterminer quelle(s) solution(s) possible(s) rend(ent) maximum ou minimum la fonction économique $f(x; y)$.

— La (les) solution(s) optimale(s) se trouve(nt) sur le bord du polygone des contraintes.

Dans les applications commerciales, la valeur $f(x; y)$ peut représenter le coût, le gain, la perte ou une ressource physique, et l'objectif sera de trouver un point précis $P(x; y)$ dans $\mathbb{R}$ où $f(x; y)$ prend une valeur maximum ou minimum.

Méthode de résolution d'un problème de programmation linéaire

a) Résumer la situation à l'aide d'un tableau

b) Identifier les variables x et y

c) Exprimer les contraintes sous forme d'un système d'inéquations linéaires

d) Exprimer la fonction objectif $f(x;y)$ en fonction de x et y : $f(x;y) = ax + by + c$

e) Représenter graphiquement le polygone des contraintes

f) Tracer une droite quelconque de pente $m = \dfrac{-a}{b}$ et sa parallèle par le sommet du polygone des contraintes qui optimise la fonction objectif $f(x;y)$

g) Calculer les coordonnées du sommet optimal, ainsi que la valeur de la fonction objectif optimale correspondante

h) Interpréter la solution trouvée.

Références de ce résumé de cours :

— *Mathématiques ECGC 1ère année*, J.-M. Faillétaz, D. Salvadore, Gymnase de Burier, 2010

— *Algèbre et trigonométrie avec géométrie analytique*, E.W. Swokowski, J. A. Cole, LEP, Lausanne 2007