CORRIGÉ

Chapitre 4

Processus exponentielles

Révisions 2E

Exercice 4.1

Simplifier les expressions suivantes :

a) $(2x^2)^4 \cdot (3x^5)^2$ b) $\left(\frac{2}{3}x^3\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}x^2\right)^3$ c) $\frac{3x^2y^4}{2x^0y^3}$

d) $\frac{3x^3 \cdot 2y}{(2x^2y)^3}$ e) $\left(\frac{4a^2b}{a^3b^2}\right) \cdot \left(\frac{5a^2b}{2b^4}\right)$ f) $(-2xy^2)^5 \cdot \left(\frac{x^7}{8y^3}\right)$

a) $(2x^2)^4 \cdot (3x^5)^2 = 2^4 \cdot x^{2\cdot 4} \cdot 3^2 \cdot x^{5\cdot 2} = 2^4 \cdot x^8 \cdot 3^2 \cdot x^{10} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot x^{18}$

$= 144x^{18}$

b) $\left(\frac{2}{3}x^3\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}x^2\right)^3 = \frac{2^2}{3^2}x^{3\cdot 2} \cdot \frac{3^3}{2^3}x^{2\cdot 3} = \frac{2^2}{3^2} \cdot \frac{3^3}{2^3} \cdot x^6 \cdot x^6$

$= \frac{2^2}{2^3} \cdot \frac{3^3}{3^2} x^{12} = 2^{-1} \cdot 3 \cdot x^{12} = \frac{3x^{12}}{2}$

c) $\frac{3x^2y^4}{2x^0y^3} = \frac{3x^2y^{4-3}}{2\cdot 1} = \frac{3x^2y}{2}$

d) $\frac{3x^3 \cdot 2y}{(2x^2y)^3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot x^3 \cdot y}{2^3 \cdot x^{2\cdot 3} y^3} = \frac{6 \cdot x^3 y}{8\, x^6 y^3} = \frac{3}{4} x^{3-6} y^{1-3} = \frac{3}{4} x^{-3} y^{-2}$

$= \frac{3}{4x^3y^2}$

e) $\left(\frac{4a^2b}{a^3b^2}\right) \cdot \left(\frac{5a^2b}{2b^4}\right) = \frac{4a^{2-3}b^{1-2} \cdot 5a^2 \cdot b^{1-4}}{2}$

$= 2a^{-1}b^{-1} \cdot 5a^2b^{-3} = 10 \cdot a^{-1} \cdot a^2 \cdot b^{-1} \cdot b^{-3} = \frac{10a}{b^4}$

f) $(-2xy^2)^5 \cdot \left(\frac{x^7}{8y^3}\right) = (-2)^5 \cdot x^5 \cdot y^{2\cdot 5} \cdot \frac{x^7}{8y^3} = \frac{-32 \cdot x^5 \cdot x^7 \cdot y^{10-3}}{8}$

$= -4x^{12}y^7$

Exercice 4.2

Résoudre les équations ci-dessous :

a) $5^x = 25$

b) $3^x = \frac{1}{9}$

c) $x^4 = 16$

d) $4^x = 64$

e) $4^x = 8$

f) $9^{2x+1} = 1$

g) $16 \cdot 2^x = 4^{3x+5}$

h) $8^{7x-2} = 8^{-3x+8}$

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+7} = 2$

a) $5^x = 25$

$\Leftrightarrow 5^x = 5^2 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow \boxed{S = \{2\}}$

b) $3^x = \frac{1}{9}$

$\Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{3^2} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-2} \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow \boxed{S = \{-2\}}$

c) $x^4 = 16$

$\Leftrightarrow x^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(x^2)^2 - (2^2)^2}_{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)} = 0 \Leftrightarrow (x^2-4)(x^2+4) = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{(x-2)}_{x=2}\underbrace{(x+2)}_{x=-2}(\underbrace{x^2+4}_{>0}) = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow \boxed{S = \{-2\,;\,2\}}$

d) $4^x = 64$

$\Leftrightarrow 2^{2x} = 2^6 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow \boxed{S = \{3\}}$

e) $4^x = 8$

$\Leftrightarrow 2^{2x} = 2^3 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{S = \{\frac{3}{2}\}}$

f) $9^{2x+1} = 1$

$\Leftrightarrow 9^{2x+1} = 9^{0} \Leftrightarrow 2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}}$

g) $16 \cdot 2^{x} = 4^{3x+5}$

$\Leftrightarrow 2^{4} \cdot 2^{x} = 2^{2(3x+5)} \Leftrightarrow 2^{4+x} = 2^{6x+10}$

$\Leftrightarrow 4+x = 6x+10 \Leftrightarrow 6x - x = 4-10 \Leftrightarrow 5x = -6$

$\Rightarrow x = -\frac{6}{5} \Rightarrow \boxed{S = \left\{-\frac{6}{5}\right\}}$

h) $8^{7x-2} = 8^{-3x+8}$

$\Leftrightarrow 7x-2 = -3x+8 \Leftrightarrow 7x+3x = 8+2 \Leftrightarrow 10x = 10$

$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow \boxed{S = \{1\}}$

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+7} = 2$

$\Leftrightarrow \left(2^{-1}\right)^{x+7} = 2^{1} \Leftrightarrow 2^{-(x+7)} = 2^{1}$

$\Leftrightarrow -(x+7) = 1 \Leftrightarrow -x-7 = 1 \Rightarrow -x = 8 \Rightarrow x = -8$

$\Rightarrow \boxed{S = \{-8\}}$

Exercice 4.3

Résoudre les équations ci-dessous :

a) $3^{2x+3} = 3^{(x^2)}$

b) $9^{(x^2)} = 3^{3x+2}$

c) $2^{-100x} = 0,5^{x-4}$

d) $(\frac{1}{4})^{6-x} = 4$

e) $27^{x-1} = 9^{2x-3}$

f) $2^x \cdot 4^x = -5$

g) $(5^{x-2})^4 = 125 \cdot 5^{5x-3}$

h) $(3^{x-1})^3 = 9 \cdot 3^{x-2}$

a) $3^{2x+3} = 3^{(x^2)} \iff 2x+3 = x^2 \iff x^2 - 2x - 3 = 0$

$\iff (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow \boxed{S = \{-1 ; 3\}}$

b) $9^{(x^2)} = 3^{3x+2} \iff (3^2)^{(x^2)} = 3^{3x+2} \iff 2x^2 = 3x+2$

$\iff 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow (2x+1)(x-2) = 0$

$\Rightarrow \boxed{S = \{-\frac{1}{2} ; 2\}}$

c) $2^{-100x} = 0{,}5^{x-4} \iff 2^{-100x} = (\frac{1}{2})^{x-4} \iff 2^{-100x} = (2^{-1})^{(x-4)}$

$\iff 2^{-100x} = 2^{-(x-4)} \iff -100x = -(x-4)$

$\iff 100x = x - 4 \Rightarrow x = -\frac{4}{99}$

$\Rightarrow \boxed{S = \{-\frac{4}{99}\}}$

d) $\left(\frac{1}{4}\right)^{6-x} = 4 \iff (4^{-1})^{(6-x)} = 4$

$\iff 4^{-(6-x)} = 4^1 \iff -(6-x) = 1$

$\iff -6 + x = 1 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow \boxed{S = \{7\}}$

e) $27^{x-1} = 9^{2x-3} \Leftrightarrow (3^3)^{(x-1)} = (3^2)^{(2x-3)}$

$\Leftrightarrow 3^{3(x-1)} = 3^{2(2x-3)} \Leftrightarrow 3(x-1) = 2(2x-3)$

$\Leftrightarrow 3x-3 = 4x-6 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \boxed{S = \{3\}}$

f) $2^x \cdot 4^x = -5 \Leftrightarrow 2^x \cdot 2^{2x} = -5$

$\Leftrightarrow \underbrace{2^{3x}}_{\text{fct exp} > 0} = -5 \Rightarrow \boxed{S = \emptyset}$

g) $(5^{x-2})^4 = 125 \cdot 5^{5x-3}$

$\Rightarrow 5^{(x-2)\cdot 4} = 5^3 \cdot 5^{5x-3} \Leftrightarrow 5^{4(x-2)} = 5^{3+5x-3}$

$\Rightarrow 4(x-2) = 5x \Leftrightarrow 4x-8 = 5x \Rightarrow -x = 8$

$\Rightarrow x = -8 \Rightarrow \boxed{S = \{-8\}}$

h) $(3^{x-1})^3 = 9 \cdot 3^{x-2} \Rightarrow 3^{(x-1)\cdot 3} = 3^2 \cdot 3^{x-2}$

$\Rightarrow 3^{3(x-1)} = 3^{2+x-2} \Leftrightarrow 3(x-1) = x$

$\Rightarrow 3x-3 = x \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \boxed{S = \left\{\frac{3}{2}\right\}}$

Exercice 4.4

Résoudre les équations ci-dessous :

a) $145^x = 3451$ b) $5^{2x} = 456.35$ c) $1000 \cdot 1.12^x = 10'000$

d) $20 \cdot 5^{3x} = 800$ e) $\dfrac{7^{x+1}}{100} = 20$ f) $20 + 100 \cdot 4^{-0.5x} = 60$

Rappel : • $a^x = u \iff \log_a(u) = x$

• $\log_b(u) = \dfrac{\log_a(u)}{\log_a(b)} = \dfrac{\log(u)}{\log(b)} = \dfrac{\ln(u)}{\ln(b)}$

a) $145^x = 3451$

$\iff \log_{145}(3451) = x \Rightarrow x = \dfrac{\log(3451)}{\log(145)} \cong 1,6369$

$\Rightarrow \boxed{S \cong \{1,6369\}}$

b) $5^{2x} = 456,35$

$\iff 2x = \log_5(456,35) = \dfrac{\log(456,35)}{\log(5)}$

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{2}\dfrac{\log(456,35)}{\log(5)} \cong 1,902297694$

$\Rightarrow \boxed{S \cong \{1,9023\}}$

c) $1'000 \cdot 1{,}12^{x} = 10'000$

$\Leftrightarrow \quad 1{,}12^{x} = \frac{10'000}{1'000} = 10 \Leftrightarrow x = \log_{1{,}12}(10)$

$x = \frac{\log(10)}{\log(1{,}12)} \cong 20{,}31776056 \Rightarrow \boxed{S \cong \{20{,}31776\}}$

d) $20 \cdot 5^{3x} = 800$

$\Leftrightarrow \quad 5^{3x} = \frac{800}{20} = 40$

$\Leftrightarrow \quad 3x = \log_5(40) \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\log_5(40)$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\frac{\log(40)}{\log(5)} \cong 0{,}76401 \Rightarrow \boxed{S \cong \{0{,}76401\}}$

e) $\frac{7^{x+1}}{100} = 20$

$\Leftrightarrow \quad 7^{x+1} = 20 \cdot 100 = 2'000$

$\Leftrightarrow \quad x+1 = \log_7(2000) \Rightarrow x = \frac{\log(2000)}{\log(7)} - 1$

$\Rightarrow x \cong 2{,}9061 \Rightarrow \boxed{S \cong \{2{,}9061\}}$

f) $20 + 100 \cdot 4^{-0{,}5x} = 60$

$\Leftrightarrow \quad 100 \cdot 4^{-0{,}5x} = 60 - 20 = 40$

$\Leftrightarrow \quad 4^{-0{,}5x} = \frac{40}{100} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

$\Leftrightarrow \quad 4^{-0{,}5x} = \frac{2}{5} \quad \Leftrightarrow \quad -0{,}5x = \log_4\left(\frac{2}{5}\right)$

$\Rightarrow \quad -0{,}5x = \frac{\log\left(\frac{2}{5}\right)}{\log(4)} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\log\left(\frac{2}{5}\right)}{-0{,}5\log(4)}$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \boxed{S \simeq \{1{,}3219\}}$

Exercice 4.5

Résoudre les équations ci-dessous :

a) $\log_{11}(x+1) = \log_{11}(7)$

b) $\log_6(2x-3) = \log_6(12) - \log_6(3)$

c) $\log(x) - \log(4) = 3\log(4)$

d) $\log_3(x) = 3\log_3(5)$

e) $\ln(x) + \ln(x-2) = 0,5\ln(9)$

f) $\log_8(x+4) = 1 - \log_8(4)$

g) $\log(x+2) - \log(2) = 3\log(3)$

h) $\log(x) + \log(x-5) = \log(2) + \log(7)$

a) $\log_{11}(x+1) = \log_{11}(7) \quad (*)$

$(*) \Leftrightarrow x+1 = 7 \Leftrightarrow x = 6$

Vérification : $\log_{11}(6+1) = \log_{11}(7) \Rightarrow$ OK $\Rightarrow \boxed{S = \{6\}}$

b) $\log_6(2x-3) = \log_6(12) - \log_6(3) \quad (*)$

$(*) \Leftrightarrow \log_6(2x-3) = \log_6\left(\frac{12}{3}\right) = \log_6(4)$

$\Leftrightarrow 2x-3 = 4 \Leftrightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$

* Vérification : $\log_6\left(2\cdot\frac{7}{2} - 3\right) = \log_6(7-3) = \log_6(4) \Rightarrow$ OK

$\Rightarrow \boxed{S = \{\frac{7}{2}\}}$

c) $\log(x) - \log(4) = 3\log(4)$

$\Rightarrow \log(x) = 3\log(4) + \log(4) = 4\log(4)$

$\Rightarrow \log(x) = \log(4)^4 \Leftrightarrow x = 4^4 = 256$

* <u>vérification</u> : $x = 256 \Rightarrow \log(256) - \log(4) = \log\left(\frac{256}{4}\right) = \log(64)$

$= \log(4)^3 = 3\log(4) \Rightarrow$ OK

$\Rightarrow \boxed{S = \{256\}}$

d) $\log_3(x) = 3\log_3(5)$

$\Rightarrow \log_3(x) = \log_3(5)^3 \Leftrightarrow x = 5^3 = 125$

* <u>vérification</u> : $x = 125 \Rightarrow \log_3(125) = \log_3(5^3) = 3\log_3(5) \Rightarrow$ OK

$\Rightarrow \boxed{S = \{125\}}$

e) $\ln(x) + \ln(x-2) = 0{,}5\ln(9)$

$\Rightarrow \ln(x)(x-2) = \ln(9)^{0{,}5} = \ln(\sqrt{9}) = \ln(3)$

$\Leftrightarrow x(x-2) = 9^{0{,}5} = \sqrt{9} = 3$

$\Rightarrow x(x-2) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, \ x_2 = 3$

* <u>vérification</u> :

$x_1 = -1$ à éliminer

$x_2 = 3 \Rightarrow \ln(3) + \ln(3-2) = \ln(3) + \ln(1) = \ln(3) \Rightarrow$ OK

$\Rightarrow \boxed{S = \{3\}}$

f) $\log_8(x+4) = 1 - \log_8(4)$

$\Rightarrow \log_8(x+4) = \log_8(8) - \log_8(4) = \log_8\left(\frac{8}{4}\right) = \log_8(2)$

$\Rightarrow x+4 = 2 \Rightarrow x = -2$

* <u>vérification :</u> $x = -2 \Rightarrow \log_8(-2+4) = \log_8(2) \Rightarrow$ ok

$\Rightarrow \boxed{S = \{-2\}}$

g) $\log(x+2) - \log(2) = 3\log(3)$

$\Rightarrow \log(x+2) = \log(2) + 3\log(3) = \log(2) + \log(3)^3$

$\Rightarrow \log(x+2) = \log(2 \cdot 3^3) = \log(2 \cdot 27) = \log(54)$

$\Rightarrow x+2 = 54 \Rightarrow x = 52$

* <u>vérification :</u>

$\log(52+2) = \log(54) \rightarrow$ ok

$\Rightarrow \boxed{S = \{52\}}$

h) $\log(x) + \log(x-5) = \log(2) + \log(7)$

$\Rightarrow \log(x)(x-5) = \log(2\cdot 7)$

$\Leftrightarrow \log(x^2-5x) = \log(14)$

$\Rightarrow x^2 - 5x = 14 \Leftrightarrow x^2-5x-14 = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-7) = 0$

$\Rightarrow x_1 = -2 \quad , \quad x_2 = 7$

* vérification :

- $x_1 = -2 \Rightarrow$ à éliminer car $\log(-2)$ n'est pas défini !
- $x_2 = 7 \Rightarrow \log(7) + \log(7-5) = \log(7) + \log(2) \Rightarrow$ OK

$\Rightarrow \boxed{S = \{7\}}$

Exercice 4.6

a) Calculer la valeur acquise par 40′000 francs à 3.75% pendant 10 ans à intérêts composés.

b) Calculer la valeur actuelle d'un capital qui vaudra 10′730.40 francs dans 7 ans à 5.25%.

c) Il y a six ans, on a placé 12′000 francs à un certain taux. On retire aujourd'hui 14′751.05 francs. Quel était ce taux ?

d) On dispose de 100′000 francs. On place cette somme à 9%. Après combien d'années aura-t-on 364′248.25 francs ?

Rappel :

Intérêts

Simples

Composés

$$\boxed{I = \frac{C \cdot t \cdot n}{100 \cdot 360}}$$

C : capital

t : taux (%)

n : durée (nombre de jours)

$$\boxed{C_n = C_0\left(1 + \frac{t}{100}\right)^n}$$

C_0 : capital initial (année 0)

t : taux d'intérêt en %

n : nombre d'année

$i = \frac{t}{100}$

a) $C_n = C_0 \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n \Rightarrow C_{10} = 40000 \left(1 + \frac{3{,}75}{100}\right)^{10}$

$\Rightarrow C_{10} = 40000\,(1{,}0375)^{10} \cong 57801{,}76$

$\Rightarrow \boxed{C_{10} \cong 57801{,}76 \text{ Frs}}$

b) $C_n = C_7 = 10'730{,}40 = C_0\,(1 + 0{,}0525)^7 \quad \Big| : 1{,}0525^7$

$\Rightarrow C_0 = \frac{10'730{,}40}{1{,}0525^7} = 7'499{,}\bar{9} \Rightarrow \boxed{C_0 \cong 7'499{,}\bar{9} \text{ Frs}}$

c) $14'751{,}05 = 12'000 \left(1 + \frac{t}{100}\right)^6 = 12'000\,(1+i)^6 \quad \Big| : 12'000$

$\Rightarrow (1+i)^6 = \frac{14'751{,}05}{12'000} \quad \Big| \sqrt[6]{}$

$\Rightarrow 1 + i = \sqrt[6]{\frac{14'751{,}05}{12'000}} \quad \Big| -1$

$\Rightarrow i = \sqrt[6]{\frac{14'751{,}05}{12'000}} - 1 \cong 0{,}03499$

On sait que $i = \frac{t}{100} \Rightarrow t = i \cdot 100 = 0{,}03499 \cdot 100$

$\Rightarrow \boxed{t \cong 3{,}5\,\%}$

d) Ici, on a $C_n = 364'248,25$ Frs

$\Rightarrow \quad 364'248,25 = 100'000(1+0,09)^n \quad \Big| : 100'000$

$\Rightarrow \quad 1,009^n = \dfrac{364'248,25}{100'000}$

$\Rightarrow \quad n = \log_{1,09}\left(\dfrac{364'248,25}{100'000}\right) = \dfrac{\log\left(\dfrac{364'248,25}{100'000}\right)}{\log(1,09)}$

$\Rightarrow \quad \boxed{n \simeq 15 \text{ ans}}$

Exercice 4.7

a) Calculer l'intérêt gagné durant la 12ème année grâce à un capital initial de 15'000.- placés à un taux de 3%.

b) Un capital de 80'000.- placé à 4.5% a rapporté 15'401.50 francs d'intérêts. Quelle est la durée du placement ?

c) Un capital de 20'000 francs a rapporté 9282 francs en 4 ans. Quel est le taux ?

d) Une personne a gagné 5000.- en 10 ans à un taux de 3%. Quel était le capital initial ?

a) $C_{12} - C_{11}$ = intérêt gagné durant la 12ème année

$\Rightarrow C_{12} - C_{11} = 15'000 \cdot 1{,}03^{12} - 15'000 \cdot 1{,}03^{11} \cong \boxed{662{,}9052 \text{ Frs}}$

b) On sait que $\boxed{\text{Intérêt} = C_n - C_0}$

$\Rightarrow 15'401{,}50 = C_n - C_0 = C_n - 80'000$

$\Rightarrow C_n = 95'401{,}50$

or $C_n = 95'401{,}50 = 80'000 \cdot (1{,}045)^n \quad | : 80'000$

$\Rightarrow 1{,}045^n = \frac{95'401{,}50}{80'000} \Rightarrow n = \log_{1{,}045}\left(\frac{95'401{,}50}{80'000}\right)$

$\Rightarrow n = \frac{\log\left(\frac{95'401{,}50}{80'000}\right)}{\log(1{,}045)} \cong 4 \Rightarrow \boxed{n \cong 4 \text{ ans}}$

c) $C_n = 20'000 + 9'284 = 29'284$ en 4 ans

$\Rightarrow C_4 = 29'284 = 20'000 \cdot (1 + i)^4 \quad | : 20'000$

$$\Rightarrow \quad (1+i)^4 = \frac{29'284}{20'000}$$

$$\Rightarrow \quad 1+i = \sqrt[4]{\frac{29'284}{20'000}} \quad \Rightarrow \quad i = \sqrt[4]{\frac{29'284}{20'000}} - 1$$

$$\Rightarrow \quad i = 0,1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 10\%}$$

d) On a :

$$C_n = C_0 + 5'000 \quad \Rightarrow \quad C_0 + 5'000 = C_0 \cdot 1,03^{10}$$

$$\Rightarrow \quad C_0 - C_0 \cdot 1,03^{10} = -5'000$$

$$C_0\left(1 - 1,03^{10}\right) = -5'000$$

$$\Rightarrow \quad C_0 = \frac{-5'000}{1-1,03^{10}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_0 \cong 14'538,40 \text{ Frs}}$$

Exercice 4.8

On place 2′900 francs à 4% pendant un certain temps. Pour un an de plus, on retirerait 185.72 francs de plus. Calculer la durée du placement.

On a : $C_n = C_0 (1+i)^n$

et $C_{n+1} - C_n = 185{,}72$ Fr

$\Rightarrow \quad 2900 \cdot 1{,}04^{n+1} - 2900 \cdot 1{,}04^{n} = 185{,}72$

$\Rightarrow \quad 2900 \cdot 1{,}04^{n} (1{,}04 - 1) = 185{,}72$

$\Rightarrow \quad 2900 \cdot 1{,}04^{n} \cdot 0{,}04 = 185{,}72$

$\Rightarrow \quad 1{,}04^{n} = \dfrac{185{,}72}{2900 \cdot 0{,}04} \Rightarrow n = \dfrac{\log\left(\frac{185{,}72}{116}\right)}{\log(1{,}04)}$

$\Rightarrow \quad \boxed{n \cong 12 \text{ ans}}$

Exercice 4.9

Vous voulez placer un montant de 2'000 CHF et vous avez consulté trois banques. La première banque B_1 offre un taux annuel de 9% capitalisé annuellement. La seconde banque B_2 offre un taux nominal de 9% capitalisé trimestriellement. La troisième banque B_3 offre un taux périodique mensuel de 0.75%. Quelle banque offre les meilleures conditions ?

B_1 : $C_1 = 2'000 \cdot 1{,}09 = \boxed{2'180 \text{ frs}}$

B_2 : taux nominal de 9% capitalisé trimestriellement

$\Rightarrow \frac{9\%}{4} = 2{,}25\%$ par trimestre

$\Rightarrow i = 0{,}0225$

$\Rightarrow C_1 = 2'000 \cdot (1 + 0{,}0225)^4 \cong \boxed{2'186{,}17 \text{ Frs}}$

B_3 : $0{,}75\%$ par mois

$\Rightarrow C_1 = 2'000 \cdot (1 + 0{,}0075)^{12} = \boxed{2187{,}61 \text{ frs}}$

$\Rightarrow$ c'est donc la banque B_3 qui est la plus intéressante.

Exercice 4.10

On place un capital de 100’000 francs à un taux nominal de 12%. Quelle somme aura-t-on après 6 ans si la capitalisation est annuelle ? semestrielle ? trimestrielle ?

a) Capitalisation annuelle :

$$C_6 = \text{100'000} \cdot 1{,}12^6 \simeq \boxed{\text{197'382,27 Frs}}$$

b) Capitalisation semestrielle :

$$(j \,;\, m) = (12\% \,;\, 2) \Rightarrow i = \frac{12\%}{2} = 6\%$$

$\rightarrow$ Capital final : $C_6 = \text{100'000}\,(1 + 0{,}06)^{12} \simeq \boxed{\text{201'219,65 Frs}}$

c) Capitalisation trimestrielle :

$$(j \,;\, m) = (12\% \,;\, 4) \Rightarrow i = \frac{12\%}{4} = 3\%$$

$\rightarrow$ capital final : $C_6 = \text{100'000}\,(1 + 0{,}03)^{24} \simeq \boxed{\text{203'279,41 Frs}}$

Exercice 4.11

A quel taux nominal capitalisé semestriellement a-t-on placé un capital de 100'000 francs si l'on obtient un capital de 166'817.25 francs après 8 ans?

$C_0 = 100'000$ Fr $\qquad m = 2$, $n = 8$

$(j\,;m) = (?\,;2)$

$\Rightarrow \quad 166'817{,}25 = 100'000\,(1+i)^{16}$

$\Rightarrow \quad (1+i)^{16} = \dfrac{166'817{,}25}{100'000}$

$\Rightarrow \quad 1+i = \sqrt[16]{\dfrac{166'817{,}25}{100'000}}$

$\Rightarrow \quad i = \sqrt[16]{\dfrac{166'817{,}25}{100'000}} - 1$

$\Rightarrow \quad i \cong 0{,}0325$

$\Rightarrow$ d'où $\quad i = \dfrac{j}{m} \quad \Rightarrow \quad j = i \cdot m = 0{,}0325 \cdot 2$

$\Rightarrow \quad j = 0{,}065$

Donc $\boxed{(6{,}5\%\,;2)}$ est le taux nominal cherché

Exercice 4.12

Combien de temps faut-il placer un capital initial de 12'000 francs à un taux nominal de 8% capitalisé semestriellement pour obtenir 49'247,20 francs ?

$$i = \frac{8\%}{2} = 4\%$$

$$\Rightarrow \quad C_n = 49'247{,}20 = 12'000\,(1 + 0{,}04)^{2n}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{49'247{,}20}{12'000} = 1{,}04^{2n}$$

$$\Rightarrow \quad 2n = \frac{\log\left(\frac{49'247{,}20}{12'000}\right)}{\log(1{,}04)}$$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{\log\left(\frac{49'247{,}20}{12'000}\right)}{2\cdot\log(1{,}04)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{n \cong 18 \text{ ans}}$$

Applications aux sciences sociales, expérimentales ou économiques

Exercice 4.13

Le nombre de bactéries triple toutes les 5 heures. Au départ, il y en a 2000.

a) Trouver la fonction exprimant le nombre de bactéries en fonction du temps.

b) Trouver le nombre de bactéries après 1 jour.

c) Après combien de temps le nombre de bactéries aura-t-il centuplé ?

$\times 100$

Soient t : temps (heures) et $N(t)$: nb de bactéries en fct du temps t

a) $t=0 \xrightarrow{+5} t=5 \xrightarrow{+5} t=10$ $\quad k=5$

$N_0 = 2000 \xrightarrow{\cdot 3} 6000 \xrightarrow{\cdot 3} 18000$ $\quad a=3$

$$\boxed{N(t) = N_0 \cdot a^{\frac{t}{k}}}$$

ici $k = 5$

$a = 3$

$$\Rightarrow \boxed{N(t) = 2000 \cdot 3^{\frac{t}{5}}}$$

b) 1 jour $=$ 24h $\Rightarrow N(24) = 2000 \cdot 3^{\frac{24}{5}}$

$$\simeq \boxed{390'132{,}40 \text{ bactéries}}$$

c) $N(t) = 100 \cdot N_0$ et $t = ?$

$\Rightarrow 200'000 = 2000 \cdot 3^{\frac{t}{5}} \Rightarrow 3^{\frac{t}{5}} = 100$

$\Rightarrow t = 5 \cdot \dfrac{\log(100)}{\log(3)} \Rightarrow \boxed{t \simeq 21 \text{ heures}}$

Exercice 4.14

a) Un objet vaut actuellement 2000 francs. Sa valeur double tous les 3 ans. Quelle sera sa valeur dans 12 ans ? Dans n ans ?

b) Il y a 5 ans, un objet valait 1000 francs. Actuellement, il vaut 3000 francs. Sachant que son prix évolue de manière exponentielle, quel sera son prix dans 12 ans ? Après combien de temps vaudra-t-il 21′000 francs (au mois près) ?

a)

$t=0 \xrightarrow{+3} t=3 \xrightarrow{+3} t=6 \xrightarrow{+3} t=9$ $\quad k = 3$

$P_0 = 2000 \xrightarrow{\cdot 2} 4000 \xrightarrow{\cdot 2} 8000 \xrightarrow{\cdot 2} \dots$ $\quad \Rightarrow a = 2$

$\Rightarrow P(t) = P_0 \cdot a^{\frac{t}{k}} \quad \Rightarrow \boxed{P(t) = 2000 \cdot 2^{\frac{t}{3}}}$ dans n ans

$\Rightarrow P(12) = 2000 \cdot 2^{4} = \boxed{32'000 \text{ Frs}}$

b)

$t=0 \xrightarrow{+5} t=5 \xrightarrow{+5} t=10 \xrightarrow{+5} \dots$ $\quad \Rightarrow k = 5$

$1000 \xrightarrow{\cdot 3} 3000 \xrightarrow{\cdot 3} 9000 \xrightarrow{\cdot 3} \dots$ $\quad \Rightarrow a = 3$

Il y a 5 ans $\Rightarrow t = 0$

Aujourd'hui $\Rightarrow t = 5$

$\Rightarrow P(n) = 1000 \cdot 3^{\frac{t}{5}}$

$\Rightarrow$ Dans 12 ans : $t = 5 + 12 = 17 \Rightarrow P(17) = 1000 \cdot 3^{\frac{17}{5}}$

$\Rightarrow P(17) \cong \boxed{41'899,85 \text{ frs}}$

* $t = ?$ si $P(t) = 21'000$ frs

$\Rightarrow 21'000 = 1000 \cdot 3^{\frac{t}{5}}$

$\Rightarrow 3^{\frac{t}{5}} = 21$

$\Rightarrow \frac{t}{5} = \frac{\log(21)}{\log(3)} \Rightarrow t = 5 \cdot \frac{\log(21)}{\log(3)}$

$\Rightarrow t \cong 13,856$

donc dans $13,856 - 5 = \boxed{8,856 \text{ années}}$

<u>Au mois près :</u>

$t = 8,856 = 8$ ans $+ 0,856 \cdot 12$ mois

$= 8$ ans $+ 10,276$ mois

$= 8$ ans $+ 10$ mois $+ 0,276 \cdot 30$ jours

$= \boxed{8 \text{ ans } 10 \text{ mois et } \sim 9 \text{ jours.}}$

Exercice 4.15

La valeur en francs d'un équipement informatique est donnée par la formule suivante : $P(t) = 6000 \cdot 0.82^t$, où t représente le nombre d'années écoulées depuis l'achat.

a) Quelle est la valeur d'achat ?

b) Quelle est la valeur après 5 ans ?

c) Après combien de temps cet équipement ne vaut plus que 1000 francs ?

$P(t) = 6000 \cdot 0{,}82^t$

a) $P(0) = 6000 \cdot 0{,}82^0 = \boxed{6000 \text{ frs}}$

b) $P(5) = 6000 \cdot 0{,}82^5 \cong \boxed{2224{,}45 \text{ Frs}}$

c) $t = ?$ si $P(t) = 1000$

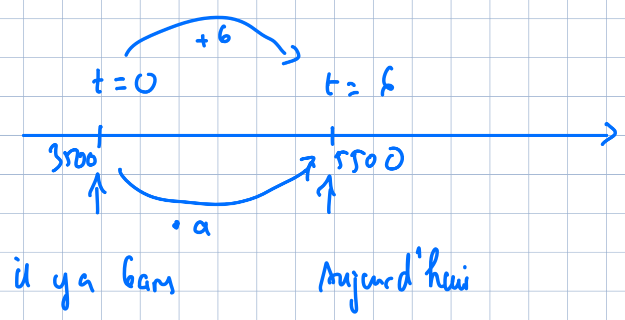
$\Rightarrow \quad 1000 = 6000 \cdot 0{,}82^t \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{6} = 0{,}82^t$

$\Rightarrow \quad t = \frac{\log\left(\frac{1}{6}\right)}{\log(0{,}82)}$

$\Rightarrow \quad t \cong 9{,}0287 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Après} \sim 9 \text{ ans}}$

Exercice 4.16

Un biologiste sait que la population canine d'une ville croît selon une fonction exponentielle. Une enquête faite il y a six ans montre qu'il y avait alors 3500 chiens. Aujourd'hui, on sait qu'il y a 5500 chiens. Combien y aura-t-il de chiens dans cette ville dans quatre ans ?



Formule : $N(t) = N_0 \cdot a^{\frac{t}{k}}$

ici $N_0 = 3500$ et $k = 6$

$a = \frac{5500}{3500} = \frac{11}{7}$

Donc $\boxed{N(t) = 3500 \cdot \left(\frac{11}{7}\right)^{\frac{t}{6}}}$

Dans 4 ans $\Rightarrow$ c-à-d : $t = 6 + 4 = 10$

donc $N(10) = 3500 \cdot \left(\frac{11}{7}\right)^{\frac{10}{6}} \cong 7434,06$

$\Rightarrow N(10)$ $\boxed{\cong 7434 \text{ chiens}}$

Exercice 4.17

Selon le test effectué en usine, la fonction $f(h) = 101 - e^{0.064 \cdot h}$ représente le pourcentage de téléphones mobiles de la marque Konia 4440, encore en fonction après h heures de veille.

a) Calculer le pourcentage de téléphones fonctionnant après 17 heures de veille.

b) Calculer le pourcentage de téléphones fonctionnant après 2 jours de veille.

c) Après combien d'heures le dernier Konia s'éteint-il ?

a) $f(17) = 101 - e^{0{,}064 \cdot 17} = 101 - e^{1{,}088} \boxed{\cong 98{,}03}$

$\Rightarrow f(17) \cong 98\,\%$

b) 2 jours $= 2 \cdot 24 = 48\,h$

$\Rightarrow f(48) = 101 - e^{0{,}064 \cdot 48} \cong 79{,}41$

$\Rightarrow f(48) \cong \boxed{79{,}4\,\%}$

c) $f(t) = 0 \Rightarrow 101 - e^{0{,}064 \cdot t} = 0$

$\Rightarrow e^{0{,}064t} = 101$

$\Rightarrow \ln(e^{0{,}064t}) = \ln(101)$

$\Rightarrow 0{,}064t = \ln(101) \Rightarrow t = \dfrac{\ln(101)}{0{,}064}$

$\Rightarrow \boxed{t \cong 72{,}1 \text{ heures}}$

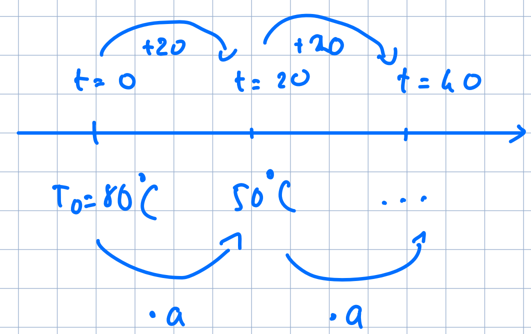
Exercice 4.19

Un objet a une température de 80 ° C ; on suppose que la température T de l'objet décroît exponentiellement et que sa température est de 50 ° C après 20 minutes.

a) Déterminer la température de l'objet après 50 minutes.

b) Après combien de minutes et de secondes (à la seconde près) la température de l'objet est-elle de 15 ° C ?

a) $T(t) = T_0 \cdot a^{\frac{t}{k}}$



$k = 20$

$a = \frac{50}{80} = \frac{5}{8}$

Donc $\boxed{T(t) = 80 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{t}{20}}}$

$\Rightarrow$ Après 50 mn : $T(50) = 80 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{50}{20}} \cong 24{,}705$

$\Rightarrow \boxed{T(50) \cong 24{,}7\,^\circ C}$

b) $T(t) = 15\,^\circ C$

$\Rightarrow 15 = 80 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{t}{20}} \Rightarrow \frac{15}{80} = \left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{t}{20}}$

$\Rightarrow \frac{3}{16} = (0{,}625)^{0{,}05t} \Rightarrow 0{,}05t = \frac{\log\left(\frac{3}{16}\right)}{\log(0{,}625)}$

$\Rightarrow t = \frac{\log\left(\frac{3}{16}\right)}{0{,}05 \cdot \log(0{,}625)} \cong 71{,}232 \Rightarrow \boxed{t \cong 71 \text{ min } 14 \text{ s}}$

4.20

[redacted] La population d'une culture bactérienne double toutes les 12 heures. Supposons que la population initiale est de 10'000 bactéries.

a) Déterminer la relation qui représente la taille de la population N après t heures.

b) Combien y aura-t-il de bactéries après une semaine ?

c) Au bout de combien de temps le nombre de bactéries aura-t-il triplé ?

a) $\boxed{N(t) = 10'000 \cdot 2^{\frac{t}{12}}}$ → toutes les 12 heures.

population initiale

population double

b) $t = 1$ semaine $= 168$ heures

$\Rightarrow N(168) = 10000 \cdot 2^{168/12} = 10000 \cdot 2^{14}$

$\Rightarrow \boxed{N(168) \cong 163'840'000}$ Après 1 semaine, il y aura $1,6384 \cdot 10^8$ bactéries.

c) population initiale $= 10'000 \rightarrow$ " triplé " $= 30'000$

$\Rightarrow 10'000 \cdot 2^{\frac{t}{12}} = 30'000 \Rightarrow 2^{\frac{t}{12}} = 3$

$\Rightarrow \frac{t}{12} = \log_2(3) \Rightarrow t = 12\log_2(3) \cong \boxed{19,02}$

Le nombre de bactéries aura triplé après environ 19 h

4.21 Un étang contient 1'000 truites. Trois mois plus tard, il n'en reste que 600.

a) A l'aide d'un modèle exponentiel, trouver une formule permettant d'estimer le nombre N de truites restantes après t mois.

b) Combien y aura-t-il de truites dans l'étang après une année ? → $t = 12$ mois

c) Après combien de temps y en aura-t-il plus que 80 ?

a) $1000 \xrightarrow[3\text{mois}]{} 600$: décroissance → taux de décroissance $= 0{,}6$

$$\Rightarrow \boxed{N(t) = 1'000 \cdot 0{,}6^{\frac{t}{3}}}$$

b) $N(12) = 1'000 \cdot 0{,}6^{\frac{12}{3}} = 1'000 \cdot 0{,}6^{4}$

$$\Rightarrow \boxed{N(12) = 129.6}$$

Après une année, il y aura environ 129 truites.

c) $1000 \cdot 0{,}6^{\frac{t}{3}} = 80 \Rightarrow 0{,}6^{\frac{t}{3}} = 0{,}08$

$$\Rightarrow t = 3 \log_{0{,}6}(0{,}08) \boxed{\cong 14{,}83}$$

Il n'y aura plus que 80 truites après environ 14,8 mois

4.22 ~~4.21~~ Un médicament est éliminé du corps par l'urine. Un patient en avale une dose de 10 mg. Une heure plus tard, des mesures montrent qu'il ne reste plus que 8 mg de ce médicament dans son corps.

a) A l'aide d'un modèle exponentiel, trouver une formule permettant d'estimer la quantité Q de médicament encore présente dans le corps du patient après t heures.

b) Donner approximativement la quantité du médicament dans le corps du patient 8 h après l'absorption.

c) Après combien de temps, le patient n'aura plus que 1 mg de ce médicament dans son corps ?

$\hookrightarrow Q(t) = 1$

a) $10\text{ mg} \xrightarrow[1h]{} 8\text{ mg}$: décroissance $\rightarrow$ taux de décroissance $= 0{,}8$

$\Rightarrow \boxed{Q(t) = 10 \cdot 0{,}8^t}$

b) $t = 8h \Rightarrow Q(8) = 10 \cdot 0{,}8^8 \cong \boxed{1{,}678}$

Après 8h, il reste environ 1,678 mg de médicament dans le corps.

c) $10 \cdot 0{,}8^t = 1 \Rightarrow 0{,}8^t = 0{,}1 \Rightarrow t = \log_{0{,}8}(0{,}1)$

$\Rightarrow \boxed{t \cong 10{,}319}$

Il faut attendre 10 h 19 mn et 8 s pour qu'il ne reste plus que 1 mg de médicament dans le corps du patient.

4.23

~~4.25~~ Le taux de dépréciation annuel d'une voiture de valeur initiale CHF 18'000.- est de 25%.

a) Trouver la valeur v de cette voiture après t années.

b) Calculer la valeur de la voiture après 8 ans.

c) Calculer la valeur de la voiture lorsque t devient très grand.

a) $v_0 = 18\,000$ CHF

taux de dépréciation $= 25\%$ $\rightarrow$ décroissance : $1 - 0{,}25 = 0{,}75$

$\Rightarrow \boxed{v(t) = 18'000 \cdot 0{,}75^t}$

b) $t = 8$ ans $\Rightarrow$ $v(8) = 18\,000 \cdot 0{,}75^8$

$\Rightarrow \boxed{v(8) \cong 1802.03}$

Après 8 ans, la voiture ne vaut plus que CHF 1802.-

c) t devient très grand $\Leftrightarrow$ $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{t \to +\infty} v(t) = \lim_{t \to +\infty} 18'000 \cdot \underbrace{0{,}75}_{1}{}^t = 0$$

quand $t \rightarrow +\infty \rightarrow 0{,}75^t \rightarrow 0$

Lorsque t est très grand, la voiture ne vaut plus rien.

Exercice 4.25

Une population de volatiles, dans une région donnée, chute de 10% chaque année relativement à la population du début de l'année.

a) Vérifier que dans 3 ans, la population aura chuté à environ 73% de sa valeur actuelle.

b) Quelle sera la situation dans 7 ans ?

a)

$$t=0 \xrightarrow{+12} t=12 \xrightarrow{+12} t=24 \xrightarrow{+12} t=36 \quad \dots$$

$$N_0 \longrightarrow 0{,}9N_0 \longrightarrow (0{,}9N_0)\cdot 0{,}9 \longrightarrow 0{,}81N_0\cdot 0{,}9$$

$$N(t) = N_0\cdot 0{,}9^{\frac{t}{12}}$$

Après 1 an $\Rightarrow$ $N(12) = N_0\cdot 0{,}9^{\frac{12}{12}}$

2 ans = 24 mois $\Rightarrow$ $N(24) = (0{,}9N_0)\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9^{\frac{24}{12}}$

$N(24) = 0{,}9^2N_0\cdot 0{,}9^2$

3 ans = 36 mois $\Rightarrow$ $N(36) = (0{,}9^2N_0)\,0{,}9\cdot 0{,}9^{\frac{36}{12}}$

$\Rightarrow$ $N(36) = \underbrace{0{,}9^3}\,N_0\cdot 0{,}9^3$

$\boxed{\approx 73\,\% \text{ dans 3 ans}}$

b) Dans 7 ans $\Rightarrow$ $N(84) = 0{,}9^7\cdot N_0\ 0{,}9^{\frac{84}{12}}$

$= \underbrace{0{,}9^7}\,N_0\cdot 0{,}9^7$

La population aura chuté $\boxed{\text{à } 47{,}8\,\%}$ de sa valeur actuelle.

Exercice 4.26

Un pêcheur esquimau tombe dans l'eau dont la température est de 0°C .

La relation $T = 37e^{-0,0045t}$ donne la température T de son corps après t minutes.

a) Quelle sera la température de son corps après 30 minutes ?

b) Calculer le temps dont disposent ses amis pour le secourir si l'on sait qu'il s'évanouira lorsque son corps sera à une température de 25°C.

a) $t = 45$ minutes $\Rightarrow T(30) = 37e^{-0,0045 \cdot 30} = 37e^{-0,135}$

$\Rightarrow \boxed{T(30) \simeq 32,33\,°C}$ $\Rightarrow$ elle sera de 32,33 °C

b) $T = 25\,°C \Rightarrow 25 = 37e^{-0,0045t}$

$\Rightarrow e^{-0,0045t} = \frac{25}{37} \Rightarrow \ln\left(e^{-0,0045t}\right) = \ln\left(\frac{25}{37}\right)$

$\Rightarrow -0,0045t = \ln\left(\frac{25}{37}\right) \Rightarrow t = -\frac{1}{0,0045}\ln\left(\frac{25}{37}\right)$ $\boxed{\simeq 87,12 \text{ mn}}$

$\Rightarrow$ Il faut le secourir avant environ 87 minutes.

Exercice 4.27

La relation d'Ehrenberg $\ln(m) = \ln(2.4) + 1.84h$ est une formule empirique liant la taille h (en mètres) à la masse moyenne m (en kilogrammes) d'enfants âgés de 5 à 13 ans.

a) Évaluer, à l'aide de cette formule, la taille moyenne d'un enfant de 7 ans qui pèse 21.8 kg.

b) Évaluer, à l'aide de cette formule, la masse moyenne d'un enfant de 8 ans qui mesure 1.5 m.

$$\ln(m) = \ln(2{,}4) + 1{,}84\,h$$

a) $m = 21{,}8$ kg

$$\Rightarrow \ln(21{,}8) = \ln(2{,}4) + 1{,}84\,h$$

$$\Rightarrow 1{,}84\,h = \ln(21{,}8) - \ln(2{,}4)$$

$$\Rightarrow h = \frac{\ln(21{,}8) - \ln(2{,}4)}{1{,}84} \cong \boxed{1{,}20\ m}$$

b) ici, on connaît $h = 1{,}5$ m

$$\Rightarrow \ln(m) = \ln(2{,}4) + 1{,}84\,h = \ln(2{,}4) + 1{,}84 \cdot 1{,}5$$

$$\Rightarrow \ln(m) = \ln(2{,}4) + 2{,}76$$

$$\Rightarrow e^{\ln(2{,}4) + 2{,}76} = m \Rightarrow \boxed{m \cong 37{,}9\ \text{kg}}$$

Exercice 4.28

Dans l'étude de 15 villes ayant une population P allant de 300 à 3'000'000 d'habitants, on a déterminé que la vitesse moyenne v (en m/s) d'un piéton pouvait être donnée approximativement par $v = 0.0151 + 0.258\log(P)$.

a) Selon ce modèle, quel est la vitesse moyenne d'un piéton à Lausanne ($\sim$ 130'000 habitants) ?

b) Évaluer, à l'aide de cette formule, le nombre d'habitants d'une ville dont la vitesse moyenne d'un piéton est de 1.5 m/s (arrondir la réponse à 100 habitants près).

$$v = 0{,}0151 + 0{,}258 \log(P)$$

a) Lausanne : $P \cong 130'000$ habitants

$\Rightarrow \quad v = 0{,}0151 + 0{,}258 \log(130'000)$

$\Rightarrow \quad \boxed{v \cong 1{,}33 \text{ m/s}}$

b) Si $v = 1{,}5$ m/s $\Rightarrow P = ?$

$\Rightarrow \quad 1{,}5 = 0{,}0151 + 0{,}258 \log(P) \Rightarrow \log(P) = \dfrac{1{,}5 - 0{,}0151}{0{,}258}$

$\Rightarrow \quad P = 10^{\frac{1{,}5-0{,}0151}{0{,}258}} \cong \boxed{569411 \text{ habitants}}$

Exercice 4.29

Une courbe logistique est le graphe d'une courbe géométrique du type

$$\boxed{y = \frac{k}{1 + b \cdot e^{-c \cdot t}} \text{ où } k, b \text{ et } c} \text{ sont des constantes positives}$$

La taille d'un arbre est souvent décrite par un modèle logistique.

Supposons que la hauteur h (en mètres) d'un arbre de t années est donnée par la relation

$$\boxed{h(t) = \frac{40}{1 + 200e^{-0,2t}}}$$

a) Quelle est la hauteur d'un arbre vieux de 30 ans ?

b) A quel âge l'arbre aura-t-il une hauteur de 16m ?

c) Quelle hauteur maximale l'arbre peut-il atteindre ?

a)

$$h(t) = \frac{40}{1 + 200e^{-0,2t}}$$

$t = 30$ ans

$$\Rightarrow \quad h(30) = \frac{40}{1 + 200e^{-0,2 \cdot 30}} = \frac{40}{1 + 200e^{-6}} \simeq 26,74 \text{ m}$$

un arbre de 30 ans mesure environ $\boxed{26,74 \text{ m}}$

b) $h = 16$ m

$$\Rightarrow \quad 16 = \frac{40}{1 + 200e^{-0,2t}} \Rightarrow 16(1 + 200e^{-0,2t}) = 40$$

$$\Rightarrow \quad 200e^{-0,2t} = \frac{40}{16} - 1 = \frac{24}{16} = \frac{3}{2} \Rightarrow e^{-0,2t} = \frac{3}{2 \cdot 200}$$

$\Rightarrow \quad -0{,}2t = \ln\left(\frac{3}{400}\right) \Rightarrow t = \frac{1}{-0{,}2} \ln\left(\frac{3}{400}\right)$

$\Rightarrow \boxed{t \simeq 24{,}46}$

$\Rightarrow$ Après 24 ans et demi, l'arbre mesura 16 m

c) $h(t) = \dfrac{40}{1 + 200\, e^{-0{,}2t}}$

Si t devient très grand $\rightarrow e^{-0{,}2t} = \dfrac{1}{e^{0{,}2t}} = 0$

$\rightarrow h(t) = \dfrac{40}{1+0} = \boxed{40\,m}$

La hauteur maximale qu'un arbre peut atteindre est de 40m