Introduction aux processus exponentiels

Exemple 1

Les bactéries sont des organismes unicellulaires qui se reproduisent par division cellulaire. Deux cellules identiques sont créées à partir d'une cellule mère. Ainsi, si des bactéries sont gardées dans une culture, leur nombre augmente rapidement, selon un modèle exponentiel.

On suppose qu'un biologiste place 600 bactéries dans une culture, et que la division cellulaire a lieu toutes les heures, c'est-à-dire que chaque heure, chaque bactérie se transforme en 2 bactéries identiques.

Étudions l'évolution du nombre de bactéries :

$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
600	1'200	2'400	4'800

$$600 \xrightarrow{\cdot 2} 1'200 \xrightarrow{\cdot 2} 2'400 \xrightarrow{\cdot 2} 4'800$$

Le nombre de bactéries, en fonction du temps t (en heures) peut être exprimé à l'aide de la fonction suivante :

$$\boxed{f(t) = 600 \cdot 2^{t}}$$

$f(0) = 600 \cdot 2^0 = 600$ ✓

$f(3) = 600 \cdot 2^3 = 4'800$ ✓

Exemple 2

Cette fois, au départ il y a 1'500 bactéries, et leur nombre double toutes les 3 heures :

$$t = 0 \xrightarrow{+3} t = 3 \xrightarrow{+3} t = 6 \xrightarrow{+3} t = 9$$

$t = 0$	$t = 3$	$t = 6$	$t = 9$
1'500	3'000	6'000	12'000

$$1'500 \xrightarrow{\cdot 2} 3'000 \xrightarrow{\cdot 2} 6'000 \xrightarrow{\cdot 2} 12'000$$

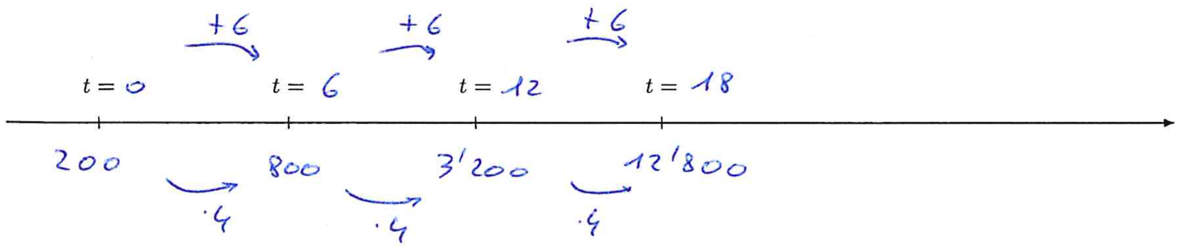
Le nombre de bactéries, en fonction du temps t (en heures) peut être exprimé à l'aide de la fonction suivante :

$$\boxed{f(t) = 1'500 \cdot 2^{t/3}}$$

$f(9) = 1'500 \cdot 2^3 = 12'000$ ✓

Exemple 3

Cette fois, au départ il y a 200 bactéries, et leur nombre quadruple toutes les 6 heures :



Le nombre de bactéries, en fonction du temps t (en heures) peut être exprimé à l'aide de la fonction suivante :

$$\boxed{f(t) = 200 \cdot 4^{t/6}}$$

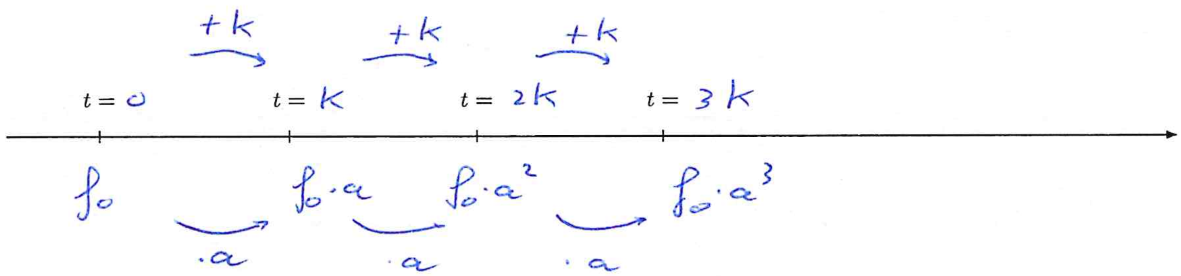
$$f(18) = 200 \cdot 4^3 = 12'800 \checkmark$$

Cas général :

Un processus exponentiel représente une quantité qui est multipliée par un même facteur à chaque fois que s'écoule la même durée. Il peut toujours être représenté par une fonction du type :

$$\boxed{f(t) = f_0 \cdot a^{t/k}}$$

- f_0 : $f_0 = f(0)$ = Quantité initiale, au temps $t = 0$
- a : a = facteur de croissance
- k : k = facteur correctif pour le temps



Exemple 4

Cette fois, au départ il y a 100 bactéries, et leur nombre triple toutes les 2 heures :

$$t=0 \xrightarrow{+2} t=2 \xrightarrow{+2} t=4 \xrightarrow{+2} t=6 \xrightarrow{+2} t=8$$

$$100 \xrightarrow[\cdot 3]{} 300 \xrightarrow[\cdot 3]{} 900 \xrightarrow[\cdot 3]{} 2'700 \xrightarrow[\cdot 3]{} 8'100$$

$$\boxed{f(t) = 100 \cdot 3^{t/2}}$$

a) Combien y a-t-il de bactéries dans cette culture après 4 heures ?

$$f(4) = 100 \cdot 3^{4/2} = 100 \cdot 3^2 = \underline{\underline{900 \text{ bactéries}}}$$

b) Combien y a-t-il de bactéries dans cette culture après 6 heures ?

$$f(6) = 100 \cdot 3^{6/2} = 100 \cdot 3^3 = \underline{\underline{2'700 \text{ bactéries}}}$$

c) Combien y a-t-il de bactéries dans cette culture après 5 heures ?

$$f(5) = 100 \cdot 3^{5/2} = 100 \cdot 3^{2,5} \cong 1'558,8 \cong \underline{\underline{1'559 \text{ bact.}}}$$

⚠ Ce n'est pas la moyenne entre 4h et 5h : $\frac{900 + 2700}{2} = 1'800$

d) Combien y a-t-il de bactéries dans cette culture après 30 minutes ?

⚠ $30' = 0,5$ h

$$f(0,5) = 100 \cdot 3^{0,5/2} = 100 \cdot 3^{0,25} \cong 131,6$$

$$\cong \underline{\underline{132 \text{ bactéries}}}$$

e) Après combien de temps y a-t-il 8′100 bactéries ?

$$100 \cdot 3^{t/2} = 8'100 \quad | : 100$$

$$3^{t/2} = 81$$

$$3^{t/2} = 3^4 \Longrightarrow \frac{t}{2} = 4$$

$$\underline{\underline{t = 8 \text{ heures}}}$$

f) Après combien de temps y a-t-il 20′000 bactéries ?

$$100 \cdot 3^{t/2} = 20'000 \quad | : 100$$

$$3^{t/2} = 200$$

$$\log(3^{t/2}) = \log(200) \rightarrow \frac{t}{2} \cdot \log(3) = \log(200) \quad | : \log(3)$$

$$\frac{t}{2} = \frac{\log(200)}{\log(3)} \quad | \cdot 2 \qquad t \cong 9,645 \text{ h}$$

$$\cong \underline{\underline{9 \text{ h } 39'}}$$

Exemple 5

Cette fois, au départ il y a 1'000 bactéries, et on injecte un virus dans la culture. Le nombre de bactéries est divisé par 2 toutes les 5 heures :

$$t=0 \xrightarrow{+5} t=5 \xrightarrow{+5} t=10 \xrightarrow{+5} t=15$$

$$1'000 \xrightarrow{\cdot 0,5} 500 \xrightarrow{\cdot 0,5} 250 \xrightarrow{\cdot 0,5} 125$$

$$\boxed{f(t) = 1'000 \cdot 0,5^{t/5}}$$

a) Combien y a-t-il de bactéries dans cette culture après 5 heures ?

La moitié, donc <u>500 bactéries</u>

b) Combien y a-t-il de bactéries dans cette culture après 2 heures 30 ? $= 2,5$ h

$$f(2,5) = 1000 \cdot 0,5^{2,5/5} = 1000 \cdot 0,5^{0,5} \cong \underline{707 \text{ bactéries}}$$

c) Après combien de temps y a-t-il 50 bactéries ?

$$1000 \cdot 0,5^{t/5} = 50 \quad | : 1000$$

$$0,5^{t/5} = 0,05$$

$$\log(0,5^{t/5}) = \log(0,05)$$

$$\frac{t}{5} \cdot \log(0,5) = \log(0,05) \quad | \cdot 5$$

$$t \cdot \log(0,5) = \log(0,05) \cdot 5 \quad | : \log(0,5)$$

$$t = \frac{5 \cdot \log(0,05)}{\log(0,5)} \cong 21,610 \text{ h} = 21 \text{ h } 37'$$