Chapitre 3

Optimisation

Exercice 3.1

Dans les combles d'un galetas, on veut réaliser une fenêtre de toit rectangulaire dont la surface doit être de 8 m^2.

Le prix total de cette fenêtre de toit est composé des deux éléments suivants :

- Le prix de la fenêtre (vitre et cadre) qui est de 50 francs par mètre carré
- le prix d'installation et de finition de la fenêtre qui est proportionnel au périmètre de la fenêtre et qui revient à 100 francs par mètre de périmètre.

a) Prouver que si l'on note x la largeur de la fenêtre de toit, le prix P total est donné en fonction de x par

$$P(x) = \frac{200x^2 + 400x + 1600}{x}$$

b) Déterminer, en les donnant au millimètre près, les dimensions de la fenêtre de toit qui minimisent son prix total P. Justifier à l'aide d'un tableau de croissance.

c) Calculer le prix total minimal.

a) x : largeur de la fenêtre

y : longueur "

* On sait que la surface de la fenêtre $= 8\ m^2$

$\Rightarrow x \cdot y = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{x}$

* Prix total : $P_{tot} = P(x) = P_{fenêtre} + P_{installation}$

où $P_{fenêtre} = 50 \cdot 8 = 400$ frs

$P_{\text{installation}} = 100 \cdot$ périmètre de la fenêtre

où Périmètre de la fenêtre $= 2x + 2y = 2x + 2 \cdot \frac{8}{x}$

$$= 2x + \frac{16}{x}$$

$\Rightarrow P_{\text{installation}} = 100 \cdot \left(2x + \frac{16}{x}\right)$

$\Rightarrow P(x) = 400 + 100 \cdot \left(2x + \frac{16}{x}\right) = 40 + 200x + \frac{1600}{x}$

$\Rightarrow \boxed{P(x) = \frac{200x^2 + 400x + 1600}{x}}$ (C.Q.F.D)

b) $P(x) = \frac{200x^2 + 400x + 1600}{x}$ condition $x \neq 0$, $x > 0$

$$P'(x) = \frac{(200x^2 + 400x + 1600)' \cdot x - (200x^2 + 400x + 1600) \cdot x'}{x^2}$$

$$= \frac{(400x + 400)x - (200x^2 + 400x + 1600)}{x^2}$$

$$= \frac{400x^2 + \cancel{400x} - 200x^2 - \cancel{400x} - 1600}{x^2}$$

$\Rightarrow P'(x) = \frac{200x^2 - 1600}{x^2}$ condition : $x \neq 0$, $x > 0$

$\Rightarrow$ <u>Zéros de $P(x)$</u> : $200x^2 - 1600 = 0$

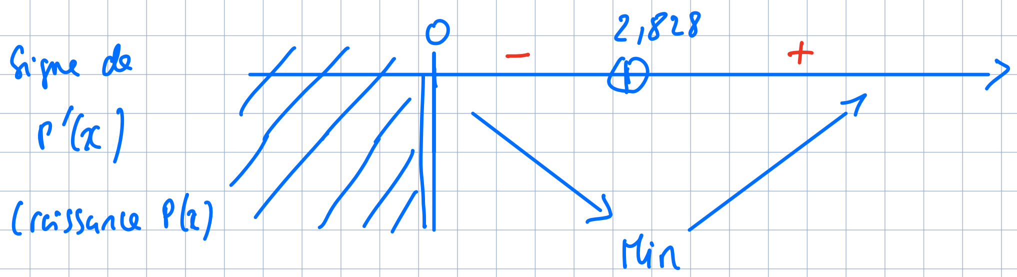
$\Rightarrow x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{8}$

La solution $x = -\sqrt{8}$ est éliminer

$\Rightarrow x = \sqrt{8} \cong 2{,}828\ m$

$\Rightarrow y = \frac{8}{x} \cong \frac{8}{2{,}828} \cong 2{,}828\ m$

$\Rightarrow$ <u>tableau de croissance</u> :



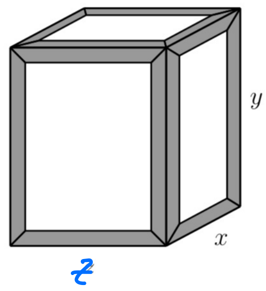
c) Le prix total P est minimum lorsque la largeur $\cong 2{,}828\ m$

$$\Rightarrow P(2{,}828) = \frac{200\cdot(2{,}828)^2 + 400(2{,}828) + 1600}{2{,}828}$$

$\boxed{\text{Prix total minimal est} \cong 1531{,}35\ \text{Frs}}$

Exercice 3.2

Une entreprise est chargée de construire des boîtes rectangulaires avec couvercle, destinées à contenir du thé en vrac. L'ingénieur en charge du projet, s'inspirant de la photographie ci-dessous à gauche, opte pour le modèle dessiné à droite. Il doit tenir compte des trois contraintes de construction suivantes :



- la profondeur x de la boîte vaut la moitié de sa hauteur y ;
- tous les bords de la boîte sont renforcés avec un profil métallique ; il n'y a qu'un seul profil par arête ;
- on dispose de 108 cm de profil métallique par boîte.

a) Montrer que le volume de la boîte est donné par la formule

$$V(x) = 54x^2 - 6x^3$$

b) Pour quelles dimensions la boîte a-t-elle un volume maximal ?

a) Le volume de la boîte : $V = x \cdot y \cdot z$

– " La profondeur x vaut la moitié de sa hauteur y "

$\Rightarrow \quad 2x = y$

– " On dispose de 108 cm de profil métallique par boîte "

$\Rightarrow \quad 4x + 4y + 4z = 108 \quad | \div 4$

$\Rightarrow \quad x + y + z = 27$

$\Rightarrow \quad x + 2x + z = 27 \quad \Rightarrow \quad 3x + z = 27$

$\Rightarrow \quad z = 27 - 3x$

D'où le volume de la boîte :

$$V(x) = x \cdot y \cdot z = x \cdot 2x \cdot (27-3x) = 2x^2(27-3x)$$

$$= 54x^2 - 6x^3$$

$$\Rightarrow \boxed{V(x) = -6x^3 + 54x^2} \quad (\text{C.Q.F.D})$$

b) $V(x) = -6x^3 + 54x^2 \quad , \; x \geq 0$

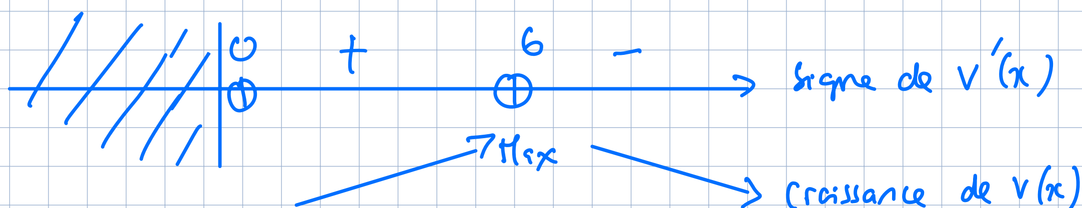
$$V'(x) = -18x^2 + 108x$$

$\Rightarrow$ Zéros de $V'(x)$: $-18x^2 + 108x = 0$

$$-18x(x-6) = 0$$

$\Rightarrow$ $x = 0$ et $x = 6$

$\Rightarrow$ Tableau de croissance :



Les dimensions sont : $x = 6$ cm $\Rightarrow$ $y = 12$ cm $\Rightarrow$ $z = 27 - 3\cdot 6$

$\Rightarrow$ $z = 9$ cm

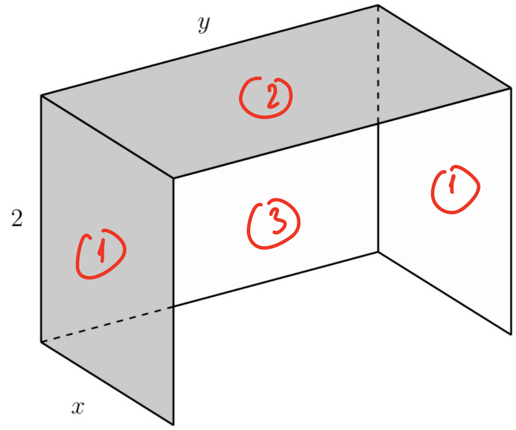
Et le volume maximum vaut :

$$V(6) = -6(6)^3 + 54 \cdot 6^2 = -1296 + 1944$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{max} = 648 \text{ cm}^3}$$

Exercice 3.3

On veut construire un abri de bus en plexiglas ayant la forme d'un parallélépipède rectangle (voir la figure ci-dessous). Cet abri doit avoir un volume de 16 m^3 et une hauteur de 2 m. Quelles dimensions lui donner pour utiliser la plus petite surface possible de plexiglas ?



On négligera l'épaisseur des plaques de plexiglas.

$$V = 16\ m^3 = 2 \cdot x \cdot y$$

$$\Rightarrow \quad x \cdot y = 8 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{8}{x}$$

$\Rightarrow$ Trouver une fonction qui calcule la surface de cet abri :

$$S(x) = 2S_1 + S_2 + S_3$$

où $S_1 = 2 \cdot x$

$$S_2 = x \cdot y = x \cdot \frac{8}{x} = 8$$

$$S_3 = 2 \cdot y = 2 \cdot \frac{8}{x} = \frac{16}{x}$$

$\Rightarrow \quad S(x) = 2 \cdot 2x + 8 + \dfrac{16}{x} = 4x + 8 + \dfrac{16}{x}$

$\Rightarrow \quad \boxed{S(x) = 4x + \dfrac{16}{x} + 8}$

* $S'(x) = 4 + \dfrac{(16)' \cdot x - 16 \cdot (x)'}{x^2} + 0$

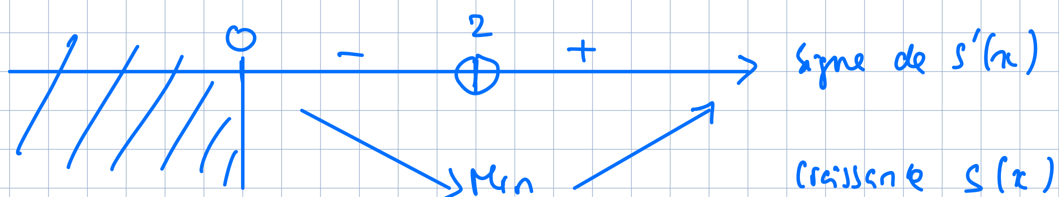
$= 4 - \dfrac{16}{x^2} \quad \Rightarrow \quad S'(x) = \dfrac{4x^2 - 16}{x^2}$

* <u>Zéros de $S'(x)$</u> : $\dfrac{4x^2 - 16}{x^2} = 0$ condition $x > 0$

$\Rightarrow \quad 4x^2 - 16 = 0 \iff x^2 - 4 = 0 \iff (x-2)(x+2) = 0$

$\Rightarrow \quad x = -2$ et $x = 2 \quad \Rightarrow$ <u>$x = -2$ à éliminer</u>

* <u>Tableau de croissance :</u>

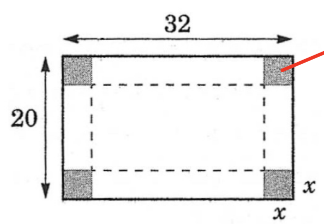


$\Rightarrow$ Les dimensions cherchées sont :

$\rightarrow$ $\boxed{\text{hauteur} = 2\text{ m}, \text{ largeur } x = 2\text{m}, \text{ profondeur } y = \dfrac{8}{x} = \dfrac{8}{2} = 4\text{m}}$

Exercice 3.5

On construit une boîte rectangulaire sans couvercle en découpant quatre carrés aux coins d'une feuille de carton mesurant 32 cm sur 20 cm et en relevant ensuite les rectangles latéraux. Quelle doit être la dimension du carré enlevé pour obtenir la boîte de volume maximal ?



carré enlevé

Contrainte : $0 < x < 10$

$ED_f = \mathbb{R}$

1) $V(x) = (32-2x)(20-2x)\cdot x$

2) Déterminer le max de la fonction $V(x)$:

$\Rightarrow V(x) = 4x(16-x)(10-x) = 4x(160 - 26x + x^2)$

$= 4(x^3 - 26x^2 + 160x)$

d'où $V'(x) = 4(3x^2 - 52x + 160)$

$V'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 52x + 160 = 0$

$\Delta = 784 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 28$

$\Rightarrow x = \dfrac{52 \pm 28}{6}$: $x_1 = \dfrac{40}{3} > 0$ à éliminer ; $x_2 = 4$

3) Tableau de la croissance :

x	0		4		10
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		$\nearrow$	Max	$\searrow$	

4) Conclusion :

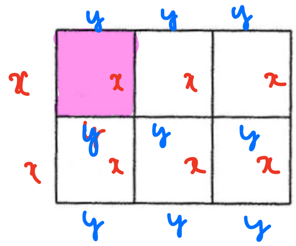
Le max est atteint lorsque $x = 4$

$\Rightarrow$ Le volume est égal à :

$4 \cdot 24 \cdot 12 = 1152$ [cm^3]

Exercice 3.7

On dispose de 288 m de clôture grillagée pour construire 6 enclos rectangulaires pour un zoo selon le plan ci-dessous. Quelles dimensions donner à chacun de ces enclos de manière à maximiser leur surface au sol.



x : longueur (en m) d'un enclos rectangulaire

y : largeur (en m) ″

$\Rightarrow \quad 8x + 9y = 288 \quad \Rightarrow \quad 9y = 288 - 8x$

$\Rightarrow \quad y = \dfrac{288-8x}{9}$

$\Rightarrow$ La surface au sol : $S(x) = 6 \cdot S_{\text{un enclos}} = 6 \cdot x\left(\dfrac{288-8x}{9}\right)$

$\Rightarrow \quad S(x) = 6x\left(\dfrac{288-8x}{9}\right) \qquad ED = [\,0\,;\,36\,]$

$\dfrac{288-8x}{9} = 0$

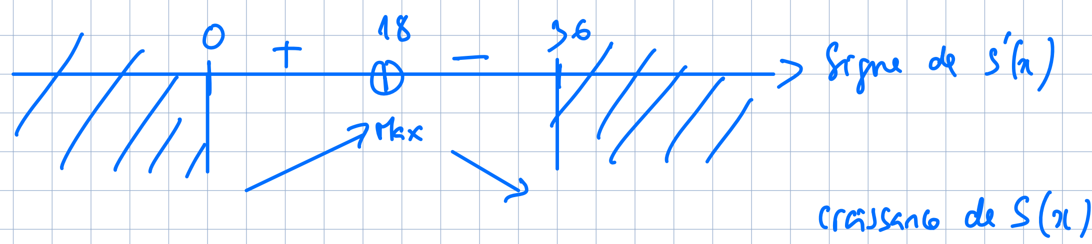
$\Rightarrow x = 36$

$\Rightarrow \quad \boxed{S(x) = -\dfrac{16}{3}x^2 + 192x}$

$\Rightarrow \quad S'(x) = -\dfrac{32}{3}x + 192 = -\dfrac{32}{3}(x - 18)$

* Zéro de $S'(x)$: $x = 18$

* <u>Tableau de croissance :</u>



=> Chaque enclos mesure 18 m sur 16 m

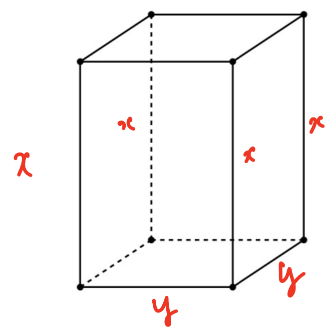
$\left(y = \frac{288 - 8x}{9} = \frac{288 - 8 \cdot 18}{9} = 16 \right)$

et la surface maximale est : $S_{max} = \frac{-16 \cdot 18^2}{3} + 192 \cdot 18$

=> $\boxed{S_{max} = 1728 \text{ m}^2}$

Exercice 3.10

On coupe une baguette de 4 m de long en 12 parties pour former les arêtes d'un parallélépipède rectangle à base carrée.



Calculer la longueur des arêtes pour que le volume du parallélépipède soit maximum.

x : hauteur

y : largeur = profondeur

$\Rightarrow \quad 4x + 8y = 4$

$x + 2y = 1 \quad \Rightarrow \quad 2y = 1 - x$

$y = \frac{1-x}{2}$

$\Rightarrow \quad V(x) = x \cdot y \cdot y = x \cdot \left(\frac{1-x}{2}\right)\left(\frac{1-x}{2}\right)$

$= x \, \frac{(1-x)^2}{4} = \frac{x(1-2x+x^2)}{4}$

$\Rightarrow \quad \boxed{V(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{4}} \qquad E_D = [0 ; 1]$

$V'(x) = \frac{3x^2}{4} - \frac{2}{4} \cdot 2x + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}x^2 - \frac{4}{4}x + \frac{1}{4}$

$$V'(x) = \frac{3}{4}x^2 - x + \frac{1}{4}$$

* <u>zéros de $V'(x)$</u> : $\frac{3}{4}x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 16 - 12 = 4$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{4-2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{4+2}{6} = 1$$

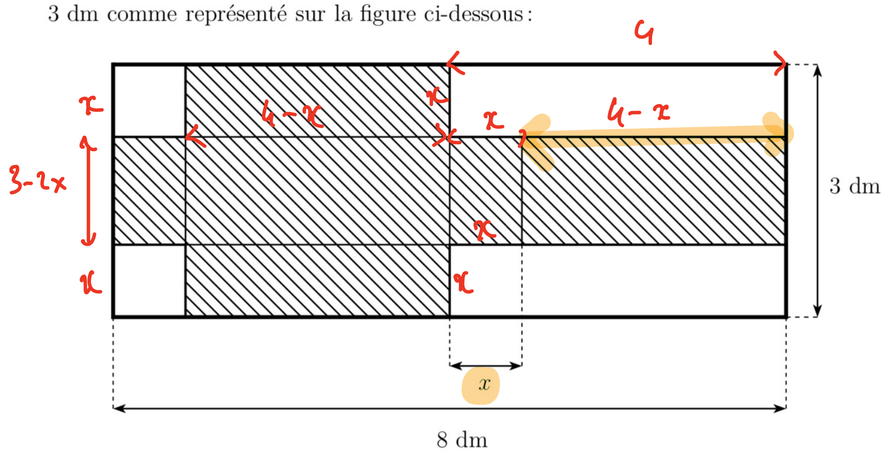
* <u>Tableau de croissance</u> :

x	0		$\frac{1}{3}$		1	
Signe de $V'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
croissance $V(x)$		$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$

$\boxed{\text{Le volume max est le cube dont l'arête mesure } \frac{1}{3} \text{ m}}$

Exercice 3.11

On désire construire une boîte fermée en forme de parallélépipède rectangle. Pour ce faire, on découpe le patron du parallélépipède dans un carton rectangulaire mesurant 8 dm par 3 dm comme représenté sur la figure ci-dessous :



a) Montrer que l'expression en fonction de x du volume de la boîte est donnée par

$$V(x) = 2x^3 - 11x^2 + 12x$$

b) Pour quelles valeurs de x la boîte aura-t-elle un volume $V = 3 \text{ dm}^3$?

c) Déterminer les dimensions de la boîte dont le volume est maximal. Donner la valeur exacte de ce volume maximal.

a) $V(x) = x \cdot (4-x) \cdot (3-2x) = x(12 - 8x - 3x + 2x^2)$

$\Rightarrow V(x) = x(2x^2 - 11x + 12)$ ED = [0 ; 4]

$$\boxed{\Rightarrow V(x) = 2x^3 - 11x^2 + 12x}$$ C.Q.F.D

b) $V = 3 \text{ dm}^3 \Rightarrow 3 = 2x^3 - 11x^2 + 12x$

$\Rightarrow 2x^3 - 11x^2 + 12x - 3 = 0$

Division par Horner : ici $x = 1$ est une solution.

<u>Horner</u> :

	2	-11	12	-3
1		2	-9	3
	2	-9	3	0

$\Rightarrow V(x) = (x-1)(\underbrace{2x^2 - 9x + 3})$

$x_1 = 1$

$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 2(3) = 81 - 24 = 57$

$\Rightarrow x_2 = \dfrac{9 - \sqrt{57}}{4} \cong 0{,}363$

$x_3 = \dfrac{9 + \sqrt{57}}{4} \cong 4{,}137$ à éliminer car > 4

$\Rightarrow$ pour $\boxed{x = 1\,dm \text{ et } x \cong 0{,}363\,dm}$, le volume de la boîte est égal à $3\,dm^3$

c) $V(x) = 2x^3 - 11x^2 + 12x - 3$; $ED = [0;4]$

$V'(x) = 6x^2 - 22x + 12$

* <u>Zéros de $V'(x)$</u> : $6x^2 - 22x + 12 = 0 \mid \div 2$

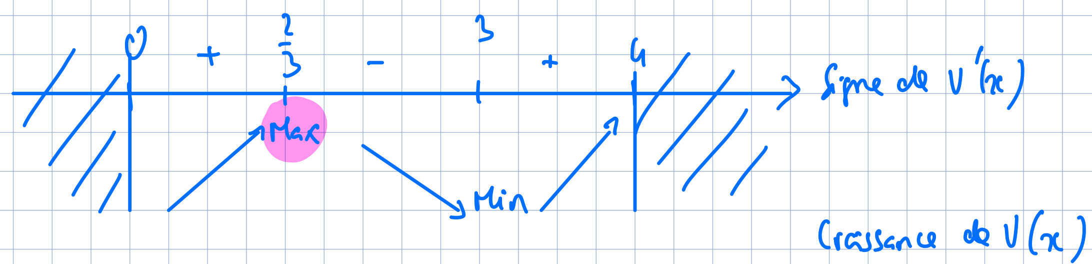
$\Rightarrow 3x^2 - 11x + 6 = 0$

$\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = 121 - 72 = 49$

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{+11 - 7}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

$x_2 = \dfrac{11 + 7}{6} = \dfrac{18}{6} = 3$

* <u>Tableau de croissance :</u>



$\Rightarrow$ Les dimensions de la boîte dont V est max sont :

$$\boxed{x = \frac{2}{3}\ dm} \Rightarrow 4 - x = 4 - \frac{2}{3} = \frac{12-2}{3} = \boxed{\frac{10}{3}\ dm}$$

$$\text{et} \quad 3 - 2x = 3 - 2\cdot\frac{2}{3} = 3 - \frac{4}{3} = \frac{9-4}{3} = \boxed{\frac{5}{3}\ dm}$$

et le volume max : $V_{max} = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 11\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 12\cdot\left(\frac{2}{3}\right)$

$$\Rightarrow V_{max} = 2\cdot\frac{8}{27} - 11\cdot\frac{4}{9} + \frac{24}{3} = \frac{16 - 132 + 216}{27}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{max} = \frac{100}{27}\ dm^3}$$