1 Taux nominal, taux périodique, taux réel

Exemple 1

Vous voulez placer un montant de 2'000 francs et vous avez consulté trois banques. La première banque B_1 offre un taux annuel de 9%, capitalisé annuellement. La seconde banque B_2 offre un taux nominal de 9% capitalisé trimestriellement. La troisième banque B_3 offre un taux nominal de 9%, capitalisé mensuellement. Quelle institution offre les meilleures conditions ?

Calcul du capital après 1 année

B_1 → $2'000 \cdot 1{,}09^1 \cong 2'180$ frs

B_2 $(j;m) = (9\%;4) \to i = \frac{9\%}{4} = 2{,}25\%$ et $1+i = 1{,}0225$

→ après 1 année : $C = 2'000 \cdot 1{,}0225^{4\cdot 1} \cong 2'186{,}17$ frs

B_3 $(j;m) = (9\%;12) \to i = \frac{9\%}{12} = 0{,}75\%$ et $1+i = 1{,}0075$

→ après 1 année : $C = 2'000 \cdot 1{,}0075^{12\cdot 1} \cong 2'187{,}61$ frs

Ainsi, la banque B_3 offre les meilleures conditions.

Définitions : Taux nominal, taux périodique, taux réel et taux équivalents

On appelle *taux nominal* que l'on note $(j;m)$ un taux annuel j qui est composé m fois par année au taux périodique $i = j/m$.
On appelle *taux périodique* le taux i qui s'applique à chaque période de capitalisation.
On appelle *taux réel* ou *taux effectif* le taux r réellement payé annuellement. On l'obtient en ramenant le taux périodique à un taux annuel.
Deux taux sont *équivalents* s'ils correspondent au même taux réel.

Ainsi, dans l'exercice précédent :
la banque B_1 propose un taux périodique annuel de 9% qui est le taux réel.
La banque B_2 propose un taux nominal de $(9\%, 4)$. Le taux trimestriel est de $9\%/4 = 2.25\%$ et le taux réel r est tel que $1 + r = 1.0225^4 = 1.0931$, c'est-à-dire un taux annuel r égal à 9.31%.
La banque B_3 propose un taux nominal de $(9\%, 12)$. Le taux semestriel est de $9\%/12 = 0.75\%$ et le taux réel $r = 1.0075^{12} - 1 = 9.38\%$ est le taux annuel équivalent.

2 Annuités

On appelle *annuités* les versements égaux que l'on fait à intervalle régulier pour constituer un capital ou rembourser un emprunt. Les versements permettant de constituer un capital sont appelés *annuités de début de période*, ceux permettant de rembourser un emprunt *annuités de fin de période.*

Exemple 2

Vous décidez de constituer un capital en faisant 4 versements semestriels de 500 francs à un taux nominal de 6% capitalisé semestriellement.

On remarque tout d'abord que dans ce cas, la capitalisation coïncide avec les versements (nous verrons plus tard quoi faire si ce n'est pas le cas).

Le capital accumulé est égal à la somme des valeurs à échéance, soit

$$500 \cdot 1.03 + 500 \cdot 1.03^2 + 500 \cdot 1.03^3 + 500 \cdot 1.03^4 = 2154.57 \text{ francs.}$$

On constate que les calculs seraient fastidieux si on effectuait un grand nombre de versements. La somme à effectuer ci-dessus est une somme de termes qui forment ce qu'on appelle une *progression géométrique*. Il existe une formule directe pour calculer la somme des n premiers termes d'une progression géométrique.

2.1 Capitalisation par annuités de début de période

Puisque nous allons parler de placements et de remboursements, nous distinguerons la valeur actuelle VA et la valeur cumulée VC d'une suite d'annuités. Par ailleurs, les indices d et f seront utilisés pour indiquer s'il s'agit d'annuités de <u>d</u>ébut de période ou d'annuités de <u>f</u>in de période. Nous noterons donc

VA_d	la valeur actuelle d'annuités de début de période
VC_d	la valeur cumulée à l'échéance d'annuités de début de période
VA_f	la valeur actuelle d'une suite d'annuités de fin de période
VC_f	la valeur cumulée à l'échéance d'annuités de fin de période

La valeur cumulée de n annuités de début de période placées à un taux périodique i vaut

$$VC_d = \frac{A(1+i)\,[(1+i)^n - 1]}{i} \tag{1}$$

La valeur actuelle VA_d d'une suite de versements de début de période est le montant qu'il faudrait placer au début de la première période au même taux i pour obtenir la valeur cumulée VC_d après n périodes. On a donc, par définition

$$VC_d = VA_d(1+i)^n \tag{2}$$

⚠ Notations équivalentes : annuité $< \begin{matrix} A \\ a \end{matrix}$

Reprenons notre exemple de quatre versements semestriels de 500 francs à un taux nominal de 6% capitalisé semestriellement :

$(j;m) = (6\%;2)$

$A = 500$, $i = \frac{0{,}06}{2} = 0{,}03$, $n = 4$

$VC_d = \frac{A(1+i)\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}$ $\Rightarrow$ $VC_d = \frac{500 \cdot 1{,}03\left[1{,}03^4 - 1\right]}{0{,}03} \cong 2'154{,}57$ frs

$VC_d = VA_d(1+i)^n$ $\Rightarrow$ $2'154{,}57 = VA_d \cdot 1{,}03^4 \quad | : 1{,}03^4$

$VA_d = \frac{2'154{,}57}{1{,}03^4} \cong 1'914{,}31$ frs

2.2 Remboursement par annuités de fin de période

Les annuités de fin de période servent à calculer les versements à effectuer pour rembourser un emprunt, car le versement se fait à la fin de chaque période. Par exemple, si on désire rembourser un emprunt par des versements mensuels, le premier versement est effectué un mois après avoir contracté l'emprunt.

Exemple 3

Vous effectuez un emprunt de 2'000 francs pour trois ans et le taux d'intérêt nominal est de 10% capitalisé semestriellement. $(j;m) = (10\%;2) \rightarrow i = \frac{10\%}{2} = 5\% = 0{,}05$

Pour la banque, ce prêt constitue un placement qui doit rapporter des intérêts selon le taux en vigueur.

$2 \cdot 3 = 6$

$m \cdot$ nombre d'années

La valeur actuelle de l'emprunt $VA_f = 2'000$ francs.
La valeur cumulée dans trois ans sera $VC_f = 2'000(1.05)^6 = 2'680.19$ francs.
C'est le montant que vous devriez payer si vous remboursiez votre dette en un seul versement dans trois ans. Les intérêts seraient alors de 2'680.19 - 2'000 = 680.19 francs.

Voir aussi la remarque p.4

Cependant, vous pouvez aussi choisir de rembourser votre dette par annuités réparties sur les trois ans de votre emprunt. Ainsi, votre dette diminue au fur et à mesure de vos versements et vous payez moins d'intérêts.
La valeur cumulée de n annuités de fin de période placées à un taux périodique i vaut

$$VC_f = \frac{A\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} \qquad (3)$$

Si vous décidez de rembourser votre dette en six annuités semestrielles, quel sera le montant des annuités ? Quel sera alors le coût en intérêts ?

$VA_f = 2'000 \quad VC_f = 2'000 \cdot 1{,}05^6 = 2'680{,}19$

- $VC_f = \dfrac{A\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} \Rightarrow 2'680{,}19 = \dfrac{A \cdot (1{,}05^6 - 1)}{0{,}05} \quad \Big| \cdot 0{,}05$

  $A \cdot (1{,}05^6 - 1) = 134{,}0095 \quad \Big| : (1{,}05^6 - 1)$

  annuité : $A \cong 394{,}03$ frs

- intérêts : $6A - 2'000 = 6 \cdot 394{,}03 - 2'000 \cong 364{,}18$ frs

Remarques

Que l'on ait affaire à des annuités de début ou de fin de période, la relation entre la valeur cumulée et la valeur actuelle a toujours la forme $VC = VA(1+i)^n$.

Exemple 4

Une personne emprunte $\underbrace{10'000}_{VA_f}$.- francs au taux de 4% et s'engage à rembourser sa dette par annuité sur 5 ans. Calculer le montant de l'annuité.

capitalisation annuelle, $i = 4\%$, $VC_f = 10'000 \cdot 1{,}04^5 \cong 12'166{,}53$

$VC_f = \dfrac{A\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} \rightarrow 12'166{,}53 = \dfrac{A\left[1{,}04^5 - 1\right]}{0{,}04} \quad \Big| \cdot 0{,}04$

$A \cdot \left[1{,}04^5 - 1\right] = 486{,}6612 \quad \Big| : \left[1{,}04^5 - 1\right]$

$A \cong 2'246{,}27$ frs

3 Annuités générales

Dans les exemples présentés jusqu'ici le nombre de versements annuels coïncidait avec le nombre de capitalisations annuelles. Dans la pratique, ce n'est pas toujours le cas. Par exemple, vous pouvez rembourser un prêt par des versement mensuels alors que la capitalisation se fait semestriellement. Pour traiter ce genre de situation, il faut calculer le taux i applicable à la période de versement et équivalent au taux de capitalisation affiché.

4 Calcul du taux périodique

Par définition, deux taux sont équivalents s'ils donnent le même rendement sur une même période. En pratique, on utilise une base annuelle pour calculer l'équivalence.

Exemple 5

On affiche un taux nominal de 9% capitalisé semestriellement. Trouver le taux périodique équivalent pour des versements mensuels.

- $(j_1; m_1) = (9\%; 2) \rightarrow i_1 = \frac{9\%}{2} = 4{,}5\% = 0{,}045$
- $m_2 = 12 \quad i_2 = ?$

Même rendement après 1 année :

$$1{,}045^2 = (1+i)^{12} \quad \Big| \sqrt[12]{}$$

$$1+i = \sqrt[12]{1{,}045^2} \quad \Big| -1 \quad \Rightarrow \quad i = \sqrt[6]{1{,}045} - 1 \cong 0{,}4363\%$$

Les taux exprimés en pourcent seront toujours arrondis à quatre chiffres significatifs, même si dans la pratique les sommes en jeu justifient parfois une plus grande précision.

Exemple 6

Une personne dépose 1'000 francs par trimestre à un taux nominal de 12% capitalisé mensuellement. Elle vous demande de calculer le capital accumulé dans cinq ans ainsi que le gain en intérêts.

- $(j_1; m_1) = (12\%; 12) \rightarrow i_1 = \frac{12\%}{12} = 1\% = 0{,}01$
- $m_2 = 4 \quad i_2 = ?$

$$1{,}01^{12} = (1+i_2)^4 \quad \Big| \sqrt[4]{}$$

$$1+i_2 = \sqrt[4]{1{,}01^{12}} = 1{,}01^3 \quad \Big| -1$$

$$i_2 = 1{,}01^3 - 1 = 0{,}030301 = 3{,}0301\%$$

- $A = 1'000$ frs : annuité de début de période

Dans 5 ans

Nombre de versements : $n = m_2 \cdot 5 = 20$

Capital cumulé : $VC_d = \dfrac{1'000 \cdot 1{,}03031\,[1{,}03031^{20} - 1]}{0{,}03031} \cong \underline{24'769{,}49 \text{ frs}}$

Intérêts : $VC_d - 20 \cdot 1'000 = \underline{4'769{,}49 \text{ frs}}$

Exemple 7

Une personne rembourse un emprunt par des versements mensuels de 120 francs. Le taux nominal de 9% est capitalisé trimestriellement et il reste encore deux ans pour clore cet emprunt. Calculer la valeur future et la valeur actuelle de l'emprunt, ainsi que le coût en intérêt jusqu'à échéance.

- $(j_1; m_1) = (9\%; 4) \Rightarrow i_1 = \frac{9\%}{4} = 2{,}25\% = 0{,}0225$

$m_2 = 12 \quad i_2 = ?$

$$1{,}0225^4 = (1+i)^{12} \quad \Big| \sqrt[12]{\ }$$

$$1+i_2 = \sqrt[12]{1{,}0225^4} \quad \Big| -1$$

$$i_2 = \sqrt[3]{1{,}0225} - 1 \cong 0{,}007444 = 0{,}7444\%$$

- $A = 120 \quad m_2 = 12 \quad 2$ ans $\to n = 12 \cdot 2 = 24$ versements

Valeur future (= valeur cumulée) :

$$VC_f = \frac{120\,[1{,}007444^{24} - 1]}{0{,}007444} \cong 3'140{,}55 \text{ frs}$$

Valeur actuelle (= montant à verser aujourd'hui si un seul versement) :

$$VA_f \cdot 1{,}00744^{24} = 3'140{,}55 \quad \Big| : 1{,}00744^{24}$$

$$VA_f \cong 2'628{,}47 \text{ frs}$$

Intérêts : $\underbrace{24 \cdot 120}_{\text{TOT versé}} - \underbrace{2'628{,}47}_{\text{somme à verser si un seul versement}} = 251{,}53$ frs