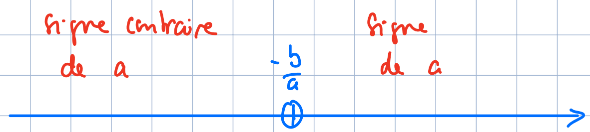
2E

Étude du signe

1) Signe du binôme $ax+b$:

Le signe du binôme $ax+b$ est donné par la règle :

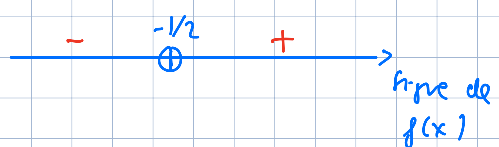


zéro du binôme : $x = \frac{-b}{a}$

* Exemple :

$f(x) = 2x + 1$ → zéro : $2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$a = 2 > 0$

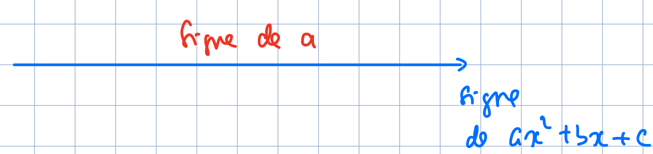


2) Signe du trinôme ax^2+bx+c :

$ax^2+bx+c = 0$

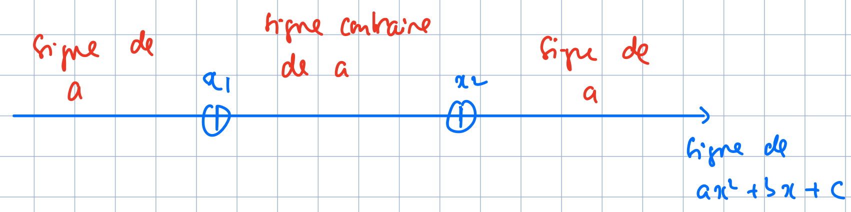
$\Delta = b^2 - 4ac$ ⇒ Le signe du trinôme ax^2+bx+c est donné par :

a) Si $\Delta < 0$ ⇒ aucune solution



b) Si $\Delta = 0$ ⇒ une solution $x = \frac{-b}{2a}$

c) Si $\Delta > 0$ $\Rightarrow$ 2 solutions $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$



$\boxed{\text{Donc le trinôme est du même signe que } a \text{ en dehors de ses zéros et du signe contraire entre ses zéros.}}$

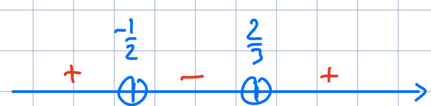
* Exemple :

$f(x) = 6x^2 - x - 2$

On cherche les zéros de $f(x)$: $6x^2 - x - 2 = 0$ signe de $a = 6$: $+$

$\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 6(-2) = 49 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 7$

$\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{2}{3}$



3) Signe d'un polynôme :

On étudie le signe d'un polynôme en déterminant le signe de chacun de ses facteurs. On détermine alors le signe du polynôme grâce à la règle des signes. On présente cette étude dans un tableau dans lequel on prend soin d'ordonner les zéros des différents facteurs.

* Exemple :

Étude du signe de $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

$\Rightarrow$ il faut en premier lieu factoriser ce polynôme :

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = x^2(x+1) - 4(x+1) = (x+1)(x^2-4)$$
$$= (x+1)(x-2)(x+2)$$

$\Rightarrow$ Les zéros : $x = -1$, $x = -2$, $x = 2$

$\Rightarrow$ On établit ensuite le tableau des signes :

x	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$p(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

4) Signe d'une fraction rationnelle :

On étudie également le signe d'une fonction rationnelle à l'aide d'un tableau des signes, en tenant compte des facteurs du numérateur et du dénominateur. Les zéros du dénominateur constituent les valeurs pour lesquelles la fraction rationnelle n'est pas définie : on les signale par une double barre.

* Exemple :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x - 3}$$

$\Rightarrow$ On commence par factoriser $f(x)$:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{\underbrace{x^2 - 2x - 3}_{(x+1)(x-3)}} = \frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-3)} \qquad ED : \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 3\}$$

=> zéro de $f(x)$: $x = 2$

=> On peut alors établir le tableau des signes :

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$(x-2)^2$		$+$	|	$+$	0	$+$	|	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	||	$-$	0	$-$	||	$+$	