Exercice 2.11

Étudier la croissance de la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$x - 1 \longrightarrow$ zéro : $x = 1$

$x + 1 \longrightarrow$ valeur interdite : $x = -1$

$\Rightarrow ED(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{1(x+1) - (x-1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$

valeur interdite : $x = -1 \Rightarrow ED(f') = \mathbb{R} - \{-1\}$

	$-\infty$		-1 $(\cdot 2)$		$+\infty$
sgn(f')		$+$	$\|$	$+$	
croiss(f)		$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	

Exercice 2.12

Étudie la croissance de la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$$

$3x - 1 \longrightarrow$ zéro : $3x - 1 = 0$
$x = \frac{1}{3}$

$x + 2 \longrightarrow$ valeur interdite : $x = -2 \Rightarrow$
$\Rightarrow ED(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$

$$f'(x) = \frac{3(x+2) - (3x-1)\cdot 1}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x+6-3x+1}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2}$$

val. interdite : $x = -2$ $(\cdot 2)$ $\Rightarrow ED(f') = \mathbb{R} - \{-2\}$

	$-\infty$		-2 $(\cdot 2)$		$+\infty$
sgn(f')		$+$	$\|$	$+$	
croiss(f)		$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	

Exercice 2.13

Étudier le signe et la croissance de la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{(x-2)^3}$$

$(x-3)^2 \rightarrow$ zéro : 3 (.2)

$(x-2)^3 \rightarrow$ valeur interdite : 2 (.3) $\Rightarrow$

$\Rightarrow ED(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

- sgn(f)

x	$-\infty$		2 (.3)		3 (.2)		$+\infty$
sgn(f)		$-$	$\Vert$	$+$	0	$+$	

- $$f'(x) = \frac{2(x-3)\cdot 1\cdot (x-2)^3 - (x-3)^2\cdot 3(x-2)^2\cdot 1}{(x-2)^6}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{(x-2)^2}(x-3)\left[2(x-2) - 3(x-3)\right]}{(x-2)^{\cancel{6}\,4}} = \frac{(x-3)(2x-4-3x+9)}{(x-2)^4}$$

$$f'(x) = \frac{(x-3)(5-x)}{(x-2)^4}$$

$\rightarrow$ zéros : 3 (.1), 5 (.1)

$\rightarrow$ val. interdite : 2 (.4) $\Rightarrow ED(f') = \mathbb{R} - \{2\}$

x	$-\infty$		2 (.4)		3		5		$+\infty$
sgn(f')		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	
Croiss(f)		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	min	$\nearrow$	Max	$\searrow$	

min $(3; f(3)) \Rightarrow$ min $(3; 0)$

Max $(5; f(5)) \Rightarrow$ Max $\left(5; \frac{2^2}{3^3}\right) \Rightarrow$ Max $\left(5; \frac{4}{27}\right)$

Exercice 2.14

Étudier le signe et la croissance de la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{(x+2)^3}{(x-1)^3}$$

$\longrightarrow$ zéro : $\overset{(\cdot 2)}{-2}$

$\longrightarrow$ val. interdite : $\overset{(\cdot 3)}{1} \Rightarrow$

$\Rightarrow ED(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

- $\text{sgn}(f)$

$$\begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & \overset{(\cdot 3)}{-2} & & \overset{(\cdot 3)}{1} & & +\infty \\ \hline \text{sgn}(f) & & + & 0 & - & \| & + & \end{array}$$

- $$f'(x) = \frac{3(x+2)^2 \cdot 1 \cdot (x-1)^3 - (x+2)^3 \cdot 3(x-1)^2 \cdot 1}{(x-1)^6}$$

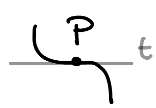
$$f'(x) = \frac{3(x+2)^2 \cancel{(x-1)^2}\,[(x-1)-(x+2)]}{(x-1)^{\cancel{6}\,4}} = \frac{3(x+2)^2(\underbrace{\cancel{x}-1-\cancel{x}-2}_{-3})}{(x-1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{-9(x+2)^2}{(x-1)^4}$$

$\longrightarrow$ zéro : $\overset{(\cdot 2)}{-2}$

$\longrightarrow$ val. interdite : $\overset{(\cdot 4)}{1} \Rightarrow ED(f') = \mathbb{R} - \{1\}$

$$\begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & \overset{(\cdot 2)}{-2} & & \overset{(\cdot 4)}{1} & & +\infty \\ \hline \text{sgn}(f') & & - & 0 & - & \| & - & \\ \text{croiss}(f) & & \searrow & P & \searrow & \| & \searrow & \end{array}$$

$P(-2;0)$ palier 

$f(-2) = 0$

Exercice 2.15

Étudier la croissance de la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2\,x + 1}$$

$\cdot \; f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{(x+1)^2} \longrightarrow$ val. interdite : $\overset{(\cdot 2)}{-1} \Rightarrow ED(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

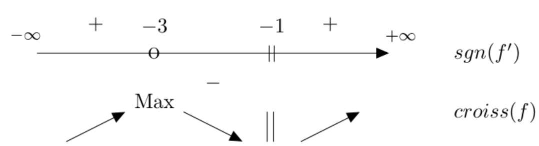
$$\cdot \; f'(x) = \frac{(2x+1)(x+1)^2 - (x^2+x-1)2(x+1).1}{(x+1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{(x+1)}\left[(2x+1)(x+1) - (x^2+x-1).2\right]}{(x+1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{2x^2} + \cancel{2x} + x + 1 - \cancel{2x^2} - \cancel{2x} + 2}{(x+1)^3} = \frac{x+3}{(x+1)^3}$$

$$f'(x) = \frac{x+3}{(x+1)^3}$$

$ED_{f'} = \mathbb{R} - \{-1\}$ et $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3$



Max en $(-3; 5/4)$.

Exercice 2.16

Étudier la croissance de la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-3} \longrightarrow \text{val. interdite : } 3$$

$\Rightarrow ED(f) = \mathbb{R} - \{3\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x-3)-(x^2-1)\cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{2x^2-6x-x^2+1}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+1}{(x-3)^2}$$

zéro(s) de $f'(x)$: $x^2-6x+1=0$ $\quad \Delta = 36-4 = 32$

$$x = \frac{6\pm\sqrt{32}}{2} = \frac{6\pm\sqrt{16\cdot 2}}{2} = \frac{6\pm 4\sqrt{2}}{2} = \frac{\cancel{2}(3\pm 2\sqrt{2})}{\cancel{2}}$$

$x_1 = 3-2\sqrt{2} \cong 0{,}17$

$x_2 = 3+2\sqrt{2} \cong 5{,}83$

$$f'(x) = \frac{x^2-6\,x+1}{(x-3)^2}$$

On a $ED_{f'} = \mathbb{R} - \{3\}$. Les zéros de f' sont $x_1 = -2\sqrt{2}+3 \simeq 0.17$ et $x_2 = 2\sqrt{2}+3 \simeq 5.83$.

	$-\infty$		~ 0.17		3		~ 5.83		$+\infty$
$sgn(f')$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$croiss(f)$		$\nearrow$	Max	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	Min	$\nearrow$	

Maximum en $\sim (0.17; 0.34)$ et minimum en $\sim (5.83; 11.66)$.