École de Commerce

3ème année

Mathématiques

Juillet 2021 / HAF

Table des matières

Chapitre 1

Statistiques descriptives, partie 1

Exercice 1.1

Dans chaque situation exposée ci-dessous,

a) décrire la population étudiée ;

b) décrire l'échantillon ;

c) nommer la variable étudiée ;

d) décrire l'ensemble des catégories ou des valeurs de la variable ;

e) donner le type de variable étudiée.

Situation1

On effectue un sondage auprès de 500 habitants de la ville de Lausanne pour connaître leur chaîne de télévision favorite.

Situation2

Dans une étude portant sur l'évolution de la situation économique en Suisse de 2000 à 2010, on s'intéresse au taux de chômage annuel de cette décennie.

Situation3

Afin de déterminer le profil socioéconomique des ménages de la ville de Genève, on a noté le nombre d'enfants par ménage pour un échantillon de 380 ménages.

Situation4

Selon les données du recensement helvétique de l'an 2000, à la question « Quelle est la langue dans laquelle vous pensez et que vous savez le mieux ? »,

- 63.7% de la population a répondu « l'allemand » ;
- 20.4% de la population a répondu « le français » ;
- 6.5% de la population a répondu « l'italien » ;
- 0.5% de la population a répondu « le romanche » ;
- et 9.0% de la population a cité une langue non nationale ;

Exercice 1.2

Donner le type de chacune des variables suivantes :

a) La superficie des lacs de Suisse.

b) Le pays d'origine des touristes qui visitent la Suisse.

c) Le nombre d'étudiants dans les gymnases vaudois.

d) La longueur d'un crayon

e) Prenez-vous le train chaque semaine ?

   (a) Oui
   (b) Non

f) Ressentez-vous du stress avant de prendre l'avion ?

   (a) Toujours
   (b) Souvent
   (c) Parfois
   (d) Rarement
   (e) Jamais

Exercice 1.3

Pour chaque question, indiquer le type de variable et l'échelle de mesure.

a) Avez-vous au moins une note insuffisante dans votre bulletin semestriel ?
1. Non 2. Oui

b) Combien de notes insuffisantes avez-vous dans votre bulletin semestriel ?
1. 0 2. 1 3. 2 ou 3 4. 4 et plus

c) Combien de note insuffisante avez-vous dans votre bulletin semestriel ?

d) Quel est votre taux d'échec au semestre ?

$$\left(\text{taux d'échec} = \frac{\text{Nombre de notes insuffisantes}}{\text{Nombre total de notes}}\right)$$

1. 0% 2. De 1% à 15.9% 3. De 16% à 49.9% 4. 50% et plus

e) Quel est votre taux d'échec au semestre ?

f) Dans quelle mesure êtes-vous d'accord avec l'affirmation « Les élèves ayant plus de quatre notes insuffisantes en fin de première année devraient arrêter leurs études gymnasiales ».
1. Fortement en désaccord 2. En désaccord 3. Plutôt d'accord 4. Totalement d'accord

g) Quelle est votre année de naissance ?

Exercice 1.4

Dans le bulletin météo du journal local, on trouve notamment pour chaque jour de la semaine l'heure du lever du soleil et la vitesse des vents. Indiquer le type de chacune des deux variables et l'échelle de mesure qui lui est associée.

Exercice 1.5

D'après l'office fédéral de la statistique, les blessés légers victimes d'accidents de la route en 2013 se répartissent par moyen de locomotion de la façon suivante :

Moyen de locomotion	**Blessés légers**
Voiture de tourisme	9570
Motocycle	2479
Bicyclette	2435
Piétons	1570
Autres	1196

a) Représenter cette situation à l'aide d'un diagramme circulaire.

b) Faire de même à l'aide d'un diagramme en barres.

c) Peut-on déduire de ces chiffres qu'il est moins dangereux de se déplacer en moto plutôt qu'en voiture ?

Exercice 1.6

Le nombre de véhicules à moteur mis en circulation en Suisse en 2011 est donné par catégorie dans le tableau suivant :

Catégorie	Nombre
Voitures de tourisme	327'955
Véhicules de transport de personnes	3'950
Véhicules de transport de choses	33'119
Véhicules agricoles	3'714
Véhicules industriels	4'006
Motocycles	48'133
Total des véhicules	420'875

Source : Office fédéral de la statistique, site web Statistique suisse 2012

Représenter ces données graphiquement par un diagramme à rectangles horizontaux et par un diagramme circulaire. Laquelle de ces deux représentations est-elle la plus appropriée ?

Exercice 1.7

Lors d'un sondage, on a demandé à 820 citoyens suisses leur opinion sur les accords bilatéraux Suisse-UE. Les réponses se répartissent comme suit.

Répartition de .... selon ....

Utilité	**Effectifs**	**Pourcentage**
Très utiles	95	
Utiles	342	
Nuisibles	210	
Très nuisibles	46	
Sans opinion	127	
Total		

a) Décrire la population étudiée, nommer la variable considérée et le type d'échelle de mesure.

b) Compléter le tableau de distribution ci-dessus ainsi que son titre.

c) Représenter graphiquement la distribution par un diagramme approprié au type de variable.

d) Calculer le taux de confiance en ces accords, soit le pourcentage de personnes qui estiment les accords bilatéraux utiles ou très utiles.

Exercice 1.8

Donner la première des classes qui permettraient de grouper une série de 36 données, précises au centième, sachant que la plus petite valeur est 2,65 et la plus grande 18,45.

Exercice 1.9

On désire grouper en classes les revenus de 80 stagiaires. Le plus petit revenu est de 252 francs et le plus grand de 937 francs. Donner la première classe de la distribution des revenus.

Exercice 1.10

On a récolté les données suivantes :

314	473	500	812	566	212	606	935	247	474	993	432
262	1080	972	383	975	978	366	322	638	570	1094	270
813	227	950	1030	776	503	398	398	755	650	1008	711
563	930	1054	836	631	519	1019	299	1032	500	918	979
570	592	1023	859	759	990	964	598	1097	803	998	337

a) Grouper les données en 6 classes de largeur 150 ([200 ;350[, [350 ;500[, etc.) et dresser un tableau de distribution.

b) Construire l'histogramme et le polygone des fréquences.

Exercice 1.11

Sur une route où la vitesse est limitée à 80 km/h, on a mesuré la vitesse de 50 véhicules.

84	81	76	71	80	81	83	84	80	83
74	75	92	76	80	82	94	73	83	83
75	81	79	97	78	82	76	78	82	82
78	81	91	68	82	73	82	79	75	77
83	80	77	81	69	78	81	83	87	87

a) Grouper les données en classes **fermées à droites** et dresser un tableau de distribution.

b) Construire l'histogramme et le polygone des fréquences.

c) Compléter l'analyse suivante : « Une .... des véhicules respectent la limitation de vitesse de 80 km/h et ..... % roulent entre 80 et 85 km/h. En tenant compte d'une marge de tolérance de 5 km/h, ... % des véhicules sont amendables. »

d) Pourquoi a-t-on fermé les classes à droite dans ce contexte ?

Exercice 1.12

Le tableau ci-dessous met en parallèle la distribution de l'âge des Suisses en 1860, lors du premier recensement, et en 2009.

Répartition de la population suisse en 1860 et 2009 selon l'âge.

Âge	1860		2009	
	Effectif	**Pourcentage**	**Effectif**	**Pourcentage**
] 0 ; 10]	518'538	20.6%	763'546	9.8%
] 10 ; 20]	476'347	18.9%	872'579	11.2%
] 20 ; 30]	429'507	17.1%	978'050	12.6%
] 30 ; 40]	362'978	14.4%	1'096'126	14.1%
] 40 ; 50]	287'564	11.4%	1'277'392	16.4%
] 50 ; 60]	230'276	9.2%	1'031'892	13.3%
] 60 ; 70]	138'932	5.5%	840'583	10.8%
] 70 ; 80]	59'549	2.4%	554'034	7.1%
] 80 ; 90]	11'095	0.4%	311'195	4.0%
90 et plus	610	0.0%	60'409	0.8%
Total	2'515'396	99.9% *	7'785'806	100.1% *

Source : Office fédéral de la statistique, site web Statistique suisse 2012.

*Les pourcentage totaux ne sont pas exactement égaux à 100% à cause des arrondis.

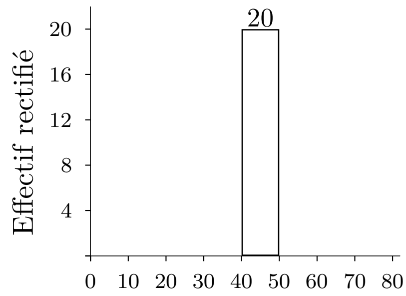
a) Quelle représentation graphique mettrait le mieux en évidence les différences de distribution des deux années étudiées ? Justifier la réponse.

b) Représenter sur un même graphique le polygone des fréquences relatives de ces deux années.

c) Compléter le texte suivant :
« La population suisse a plus que .... entre 1860 et 2009 en passant de .... à presque .... d'habitants. En 1860, la population était très jeune : l'aire sous le polygone est plus grande avant ..... ans qu'après. A cette époque, seulement ....% des habitants avaient plus de 70 ans, contre ....% actuellement, soit une proportion ...... fois plus élevée. En 1860, le groupe des moins de 20 ans représentait près de ....% de la population contre ....% aujourd'hui, soit une proportion réduite de .... En 1860, la classe la plus représentée est celle des .... , avec ....% des habitants, alors qu'en 2009, c'est la classe des .... avec ....% des habitants. »

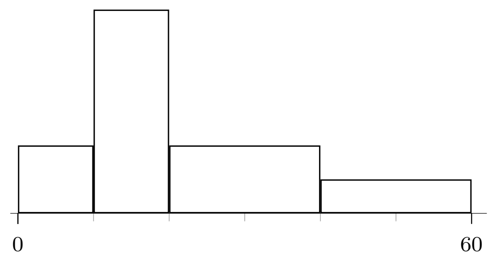
Exercice 1.13 a) Compléter l'histogramme de la distribution suivante :

Amplitude	Classe	Effectif	Effectif rectifié
	[10 ; 40 [	12	
	[40 ; 50 [	20	
	[50 ; 60 [	18	
	[60 ; 80 [	10	
	Total	60	

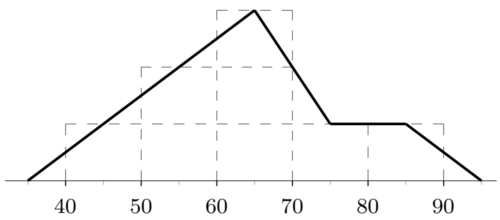


b) Compléter le tableau de distribution en utilisant l'information donnée par l'histogramme.

	Pourcentage
[0 ; [	
[; [	
[; [	
[; 60 [	
Total	100%



c) Le polygone de fréquences ci-contre représente une distribution. Quel est le pourcentage des données ayant une valeur comprise entre 50 et 60 ?



Exercice 1.14

Dans une usine, lors d'un contrôle qualité, le diamètre, en mm, de 50 boulons tirés au hasard dans la production a été mesuré. Les résultats suivants ont été obtenus.

Répartition de .... **selon** ....

Diamètre [mm]	**Effectifs**
$[21.5; 21.8[$	4
$[21.8; 21.9[$	6
$[21.9; 22.0[$	6
$[22.0; 22.1[$	13
$[22.1; 22.2[$	8
$[22.2; 22.3[$	7
$[22.3; 22.5[$	6
Total	50

a) Décrire la population étudiée, nommer la variable considérée, le type de la variable et l'échelle de mesure. Compléter le titre du tableau de distribution.

b) Représenter l'histogramme de ces données.

c) Représenter le polygone des fréquences cumulées.

d) Si la valeur nominale du diamètre des boulons est de 22 mm, calculer le pourcentage de boulons qui s'en écartent de plus de 0.3 mm ? Vérifier la cohérence du résultat sur le polygone des fréquences cumulées.

Solutions des exercices

1.1

Situation1 a) *Population :* tous les habitants de la ville de Lausanne.

b) *Echantillon :* les 500 habitants choisis parmi la population totale.

c) *Variable étudiée :* la chaîne de télévision préférée d'une personne.

d) *Ensemble des catégories :* les noms des chaînes que peuvent recevoir les habitants de la ville de Lausanne, pour autant qu'on les retiennent pour le sondage.

e) *Type de variable :* qualitative nominale.

Situation2 a) *Population :* la situation économique de la Suisse durant les années comprises entre 2000 et 2010.

b) *Echantillon :* toute la population est étudiée ici, il n'y a pas d'échantillon.

c) *Variable étudiée :* le taux de chômage.

d) *Ensemble des catégories :* tous les pourcentages compris entre 0% et 100%.

e) *Type de variable :* quantitative continue.

Situation3 a) *Population :* les ménages de la ville de Genève.

b) *Echantillon :* les 380 ménages sélectionnés.

c) *Variable étudiée :* le nombre d'enfants par ménage.

d) *Ensemble des catégories :* l'ensemble des nombres entiers inférieurs à 20, en tous cas !

e) *Type de variable :* quantitative discrète.

Situation4 a) *Population :* la population suisse.

b) *Echantillon :* la quasi-totalité de la population suisse.

c) *Variable étudiée :* la première langue d'une personne.

d) *Liste des catégories :* « l'allemand », « le français », « l'italien », « le romanche », « autre langue ».

e) *Type de variable :* qualitative nominale.

1.2

a) C'est une variable quantitative continue.

b) C'est une variable qualitative nominale.

c) C'est une variable quantitative discrète.

d) C'est une variable quantitative continue.

e) C'est une variable qualitative nominale.

f) C'est une variable qualitative ordinale (les valeurs peuvent être classées).

1.3

a) Variable qualitative nominale ; échelle nominale.

b) Variable quantitative discrète ; échelle ordinale.

c) Variable quantitative discrète ; échelle de rapports.

d) Variable quantitative continue ; échelle ordinale.

e) Variable quantitative continue ; échelle de rapports.

f) Variable qualitative ordinale ; échelle ordinale.

g) Variable quantitative discrète ; échelle d'intervalle.

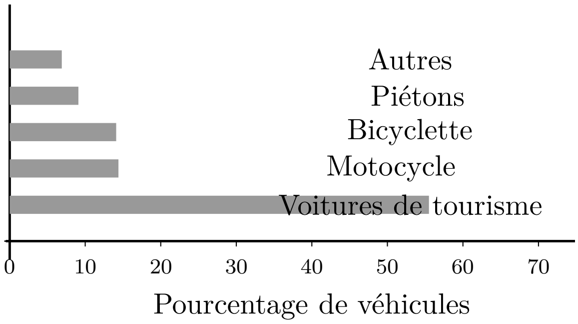
1.4

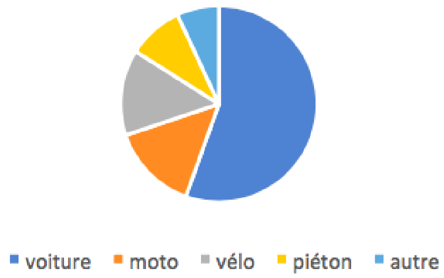
Heure du lever du soleil : variable quantitative continue ; échelle d'intervalle. La valeur 0h n'indique pas une absence de temps et diviser une heure par une autre n'a pas de sens.

Vitesse des vents : variable quantitative continue ; échelle de rapports. Toutes les opérations mathématiques peuvent être effectuées sur les données.

1.5

Moyen de locomotion	Blessés légers	Pourcentage	Angle
Voitures de tourisme	9570	55,5%	199,7°
Motocycle	2479	14,4%	51,7°
Bicyclette	2435	14,1%	50,8°
Piétons	1570	9,1%	32,8°
Autres	1196	6,9%	25 °
Total	17250	100%	360°



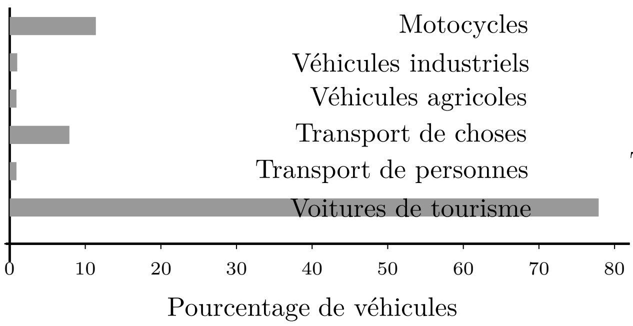


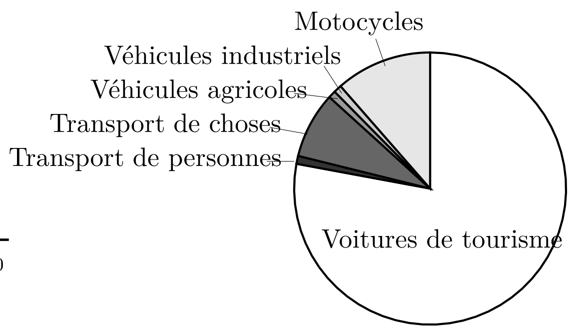
Non, on ne peut pas en déduire qu'il est moins dangereux de se déplacer en moto qu'en voiture car on ne sait pas le nombre total d'utilisateurs d'une voiture ou d'une moto. Il faudrait comparer les pourcentages relatifs et non absolus.

1.6

Répartition par catégorie des véhicules à moteur mis en circulation en CH en 2011.

Catégorie	Nombre	Pourcentage	Angle
Voitures de tourisme	327'955	77.9%	280.5°
Transport de personnes	3'950	0.9%	3.4°
Transport de choses	33'119	7.9%	28.3°
Véhicules agricoles	3'714	0.9%	3.2°
Véhicules industriels	4'006	1.0%	3.4°
Motocycles	48'133	11.4%	41.2°
Total des véhicules	420'875	100%	360°





Les deux représentations graphiques conviennent car on traite une variable qualitative relevée sur une échelle nominale. On atteint toutefois la limite de visibilité des petites parts sur le diagramme circulaire.

1.7

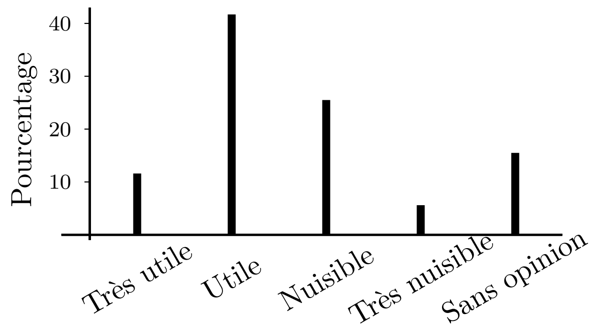
a) Population étudiée : les citoyens suisses, variable : opinion sur les accords bilatéraux,
Si on excepte la catégorie "sans opinion", échelle ordinale ; sinon échelle nominale.

Répartition de 820 répondants selon leur opinion sur les accords bilatéraux.

b)

Utilité	**Effectifs**	**Frq**
Très utiles	95	11.6%
Utiles	342	41.7%
Nuisibles	210	25.5%
Très nuisibles	46	5.6%
Sans opinion	127	15.6%
Total	820	100%

c)



d) 11.6% + 41.7% = 53.3% des sondés sont favorables aux accords bilatéraux.

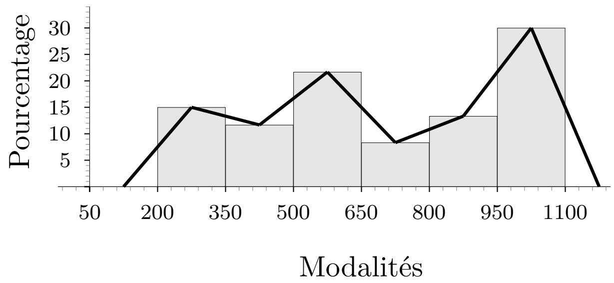
1.8 $k \approx 6$, $E = 18.45 - 2.65 = 15.8$, amplitude théorique : $\dfrac{15.8}{6} \approx 2.63$.
Amplitude choisie : 2.5, première classe $[\ 2.5\,;\, 5.0\ [$ et on formera finalement 7 classes.

1.9 $k \approx 7$, $E = 937 - 252 = 685$, amplitude théorique : $\dfrac{685}{7} \approx 98$.
Amplitude choisie : 100, première classe $[\ 250\,;\, 350\ [$ et on formera finalement 7 classes.

1.10

Répartition des données.

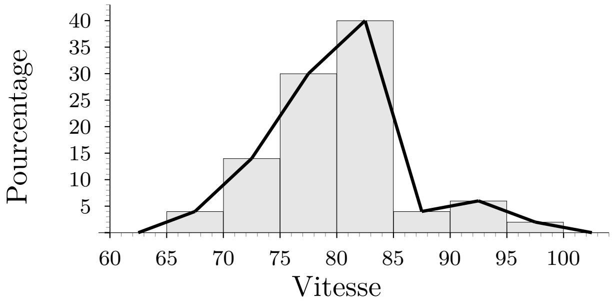
Classes	Effectif	Pourcentage
$[200; 350[$	9	15%
$[350; 500[$	7	11.67%
$[500; 650[$	13	21.67%
$[650; 800[$	5	8.33%
$[800; 950[$	8	13.33%
$[950; 1100[$	18	30%
Total	60	100%



1.11

Répartition de 50 véhicules selon leur vitesse.

Vitesse [km/h]	Effectif	Pourcentage
]65; 70]	2	4%
]70; 75]	7	14 %
]75; 80]	15	30%
]80; 85]	20	40%
]85; 90]	2	4%
]90; 95]	3	6%
]95; 100]	1	2%
Total	50	100%

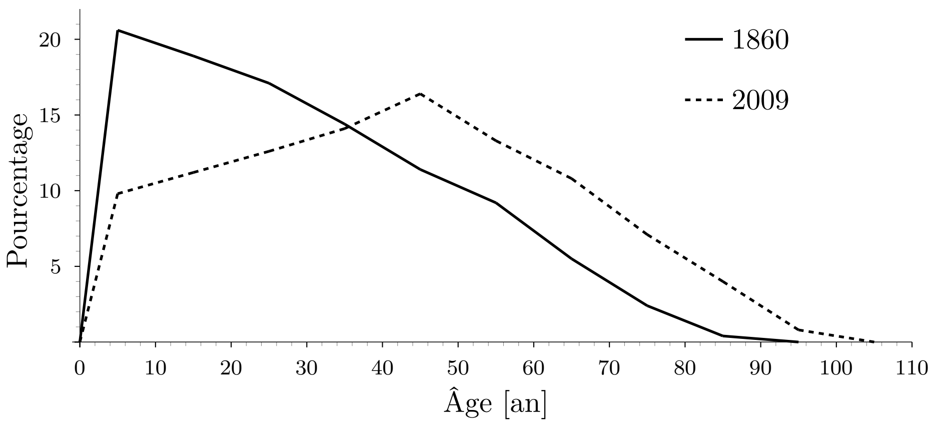


c) Une petite moitié des véhicules respectent la limitation de vitesse de 80 km/h et 40% roulent entre 80 et 85 km/h. En tenant compte d'une marge de tolérance de 5 km/h, 12% des véhicules sont amendables.
d) Parce que les véhicules roulant exactement à 80 km/h respectent la limitation et doivent être groupées avec ceux roulant plus lentement.

1.12

a) Le plus approprié est de représenter sur un même graphique le polygone des fréquences de chacune des deux années. Deux histogrammes superposés produiraient un graphique illisible. On utilise les fréquences relatives car les deux distributions n'ont pas le même effectif total.

b) **Répartition de la population suisse en 1860 et 2009 selon l'âge.**

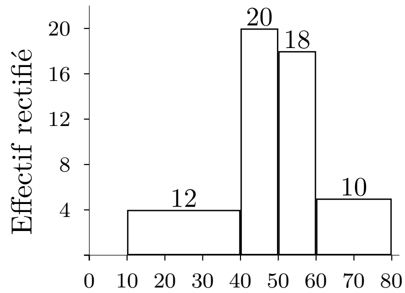


c) « La population suisse a plus que triplé entre 1860 et 2009 en passant de 2,5 millions à presque 7,8 millions d'habitants. En 1860, la population était très jeune : l'aire sous le polygone est plus grande avant 30 ans qu'après. A cette époque, seulement 3% des habitants avaient plus de 70 ans, contre 12% actuellement, soit une proportion quatre fois plus élevée. En 1860, le groupe des moins de 20 ans représentait près de 40% de la population contre 21% aujourd'hui, soit une proportion réduite de moitié. En 1860, la classe la plus représentée est celle des 0 à 10 ans, avec 20.6% des habitants, alors qu'en 2009, c'est la classe des 40 à 50 ans avec 16.4% des habitants. »

1.13

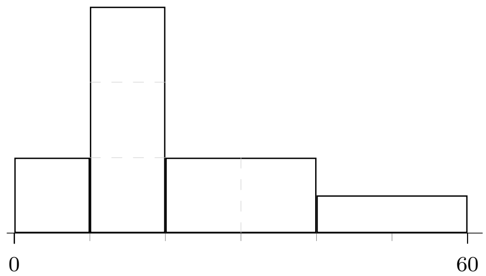
a)

Amplitude	Classe	Effectif	Effectif rectifié
30	[10 ; 40 [	12	4
10	[40 ; 50 [	20	20
10	[50 ; 60 [	18	18
20	[60 ; 80 [	10	5
	Total	60	



b)

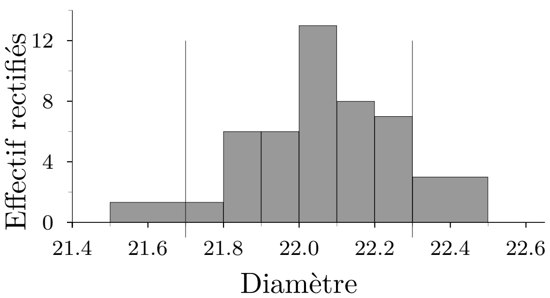
	Pourcentage
[0; 10[	14.3% (1/7)
[10; 20[	42.9% (3/7)
[20; 40[	28.6% (2/7)
[40; 60[	14.3% (1/7)
Total	100%



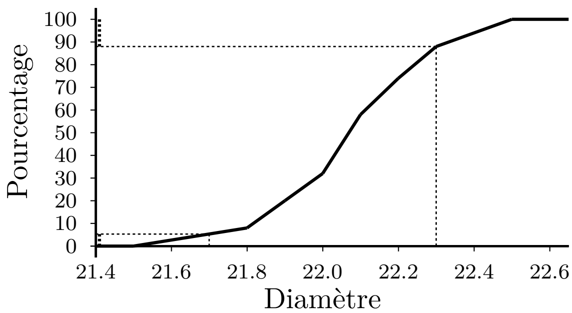
c) $\dfrac{\text{Aire de la portion comprise entre les abscisses 50 et 60}}{\text{Aire totale du polygone}} = \dfrac{2}{8} = 25\%.$

1.14 **a)** Population étudiée : Tous les boulons de la production, variable : diamètre des boulons, variable quantitative continue, échelle de rapport.

Répartition de 50 boulons selon leur diamètre.



Poly. des fréq. cum.



d) $\dfrac{4}{50} \cdot \dfrac{2}{3} = 5.3\%$ des boulons ont un diamètre < 21.7 mm et $\dfrac{6}{50} = 12\%$ ont un diamètre $>$ 22.3 mm. Ainsi, 17.3% des boulons ont un diamètre qui s'écarte de plus de 0.3 mm de la valeur nominale.

Chapitre 2

Statistiques descriptives, partie 2

Exercice 2.1

Déterminer la moyenne, la médiane et le mode ou la classe modale de chaque jeu de données.

a)

valeur	1	2	3	4	5	6
effectif	1	3	5	5	7	4

b) -0.5 0.1 0.9 0.3 0.2 -0.6 0 -1.0 0.7 -0.1

c)

classe	$[100; 200[$	$[200; 300[$	$[300; 400[$	$[400; 500[$
fréquence	32%	20%	12%	36%

d)

classe	$[0; 2[$	$[2; 3[$	$[3; 4[$	$[4; 5[$	$[5; 10[$
effectif	12	48	94	42	4

Exercice 2.2

Un professeur de mathématiques recueille toutes les notes qu'il a mises dans une classe donnée et obtient le tableau de distribution suivant :

Note	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
Effectif	0	1	4	9	9	21	28	33	34	30	21

a) Décrire la variable statistique étudiée et donner son type.

b) Tracer le diagramme en bâtons de cette distribution.

c) Calculer le pourcentage associé à chacune des valeurs de ce tableau de distribution.

d) Donner le mode, la médiane et la moyenne.

Exercice 2.3

Lors d'une journée de recrutement de l'armée, on a mesuré la taille en centimètres de 50 hommes âgés de 20 ans et reporté les mesures ci-dessous :

```
171.5 171.5 172.0 177.0 171.0 169.5 176.0 174.5 170.5 175.0 173.5
172.5 172.0 173.0 175.5 176.5 173.0 173.5 171.0 169.5 173.5 171.0
174.0 166.0 173.5 168.0 177.0 170.0 175.0 167.5 176.5 172.5 177.0
172.5 179.5 168.0 175.0 174.0 178.5 167.0 170.5 176.0 172.0 177.0
174.0 171.0 179.0 176.0 170.0 170.0
```

a) Décrire la variable statistique étudiée et donner son type.

b) Grouper les données en 7 classes de deux centimètres de large, comprises entre 166 cm et 180 cm, calculer l'effectif, la fréquence et la fréquence cumulée pour chaque classe.

c) Tracer l'histogramme de cette distribution et tracer le polygone des fréquences cumulées croissantes.

d) Donner la classe modale, la médiane et la moyenne.

Exercice 2.4

La taille moyenne de 41 250 000 adultes d'un pays est de 1,67 m. Si l'on sait de plus que, dans ce pays, la taille moyenne des femmes est de 1,61 m et celle des hommes de 1,74 m, de combien le nombre de femmes dépasse-t-il le nombre d'hommes ?

Exercice 2.5

Le prof de maths m'a dit : « Finalement, vous avez 4.5 de moyenne sur les cinq notes de l'année ». Sachant que mes quatre premières notes étaient 5.2, 3.1, 4.4 et 4.2, calculer la cinquième note.

Exercice 2.6

En utilisant le tableau de distribution de l'exercice 1.12, page 11,

a) Calculer l'âge moyen de la population suisse en 1860 et en 2009 et représenter chaque moyenne par un triangle sous l'axe des âges des polygones de fréquences construits au point b) de l'exercice 1.12.

b) Calculer l'âge médian de la population suisse en 1860 et en 2009 et marquer chaque médiane par une barre verticale sur le graphique précédent.

c) Déterminer la classe modale de l'âge de la population suisse en 1860 et en 2009. Cette notion est-elle représentative dans le cas étudié ? Justifier la réponse

d) Pourquoi l'âge moyen et l'âge médian de l'année 1860 sont-ils différents ? Pourquoi l'âge moyen et l'âge médian de l'année 2009 sont-ils presque égaux ?

e) Que peut-on conclure en comparant les âges moyens et médians des années 1860 et 2009 ?

Exercice 2.7

En utilisant le tableau de distribution de l'exercice 1.14, page 13,

a) Calculer le diamètre moyen des boulons et représenter la moyenne par un triangle sous l'axe horizontal de l'histogramme construit au point b) de l'exercice 1.14.

b) Estimer la valeur de la médiane à l'aide du polygone des fréquences cumulées construit au point b) de l'exercice 1.14. Calculer de diamètre médian et vérifier sa proximité avec la valeur estimée. Marquer cette valeur par une barre verticale sur l'histogramme.

c) Déterminer la classe modale. Cette notion est-elle représentative ici ? Justifier la réponse.

d) Que peut-on conclure en comparant la moyenne, la médiane et la classe modale sur la forme de la distribution des diamètres des boulons ?

Exercice 2.8

Déterminer la variance et l'écart-type de chaque jeu de données.

a)

valeur	1	2	3	4	5	6
effectif	1	3	5	5	7	4

b) -0.5 0.1 0.9 0.3 0.2 -0.6 0 -1.0 0.7 -0.1

c)

classe	[100; 200[	[200; 300[	[300; 400[	[400; 500[
fréquence	32%	20%	12%	36%

d)

classe	[0; 2[	[2; 3[	[3; 4[	[4; 5[	[5; 10[
effectif	12	48	94	42	4

Exercice 2.9

On a mesuré la vitesse de 50 véhicules :

Vitesse	Effectif
[65; 70[	2
[70; 75[	7
[75; 80[	15
[80; 85[	20
[85; 90[	2
[90; 95[	3
[95; 100[	1

a) Décrire la variable statistique étudiée et donner son type.

b) Trouver la classe modale.

c) Calculer le pourcentage associé à chacune des valeurs de ce tableau de distribution.

d) Tracer l'histogramme de cette distribution.

e) Calculer les fréquences cumulées.

f) Tracer le polygone des fréquences cumulées.

g) Calculer la moyenne et l'écart-type de cette distribution.

Exercice 2.10

a) Une série A représente l'âge des cinq membres d'une famille et une série B celui des élèves d'une classe de gymnase. Laquelle des deux séries aura le plus grand écart-type ?

b) Un professeur de mathématiques fait passer un travail dans deux classes. Les deux groupes obtiennent la même moyenne, mais l'écart-type de la première classe est plus grand que celui de la seconde. Dans quelle classe peut-on dire que les élèves ont à peu près tous le même niveau sur ce sujet ?

c) Dans une région aride du globe, on enregistre les précipitations quotidiennes, en mm, durant 60 jours consécutifs. La moyenne des 60 données est de 0. Quelle est la valeur de l'écart-type ?

d) Dans une classe de première année de gymnase, la moyenne d'âge est de 16,16 ans, avec un écart-type de 0,76 an. Si les élèves de cette classes restent les mêmes, que vaudront la moyenne $\overline{x}$ et l'écart-type s en troisième année ?

e) Vrai ou faux ? Toutes les données d'une distribution dont la moyenne est 70 et l'écart-type 10 sont comprises entre 60 et 80.

Exercice 2.11

Un maître rend un test dans une classe de 22 élèves en disant : « La moyenne de la classe est de 4.20 avec un écart-type de 0.83 ». Donner une interprétation de ces informations.

Exercice 2.12

Au laboratoire de physique, une série de mesures de l'accélération de la pesanteur terrestre a donné les résultats suivants : 9.95 9.85 10.13 9.69 9.47 9.98 9.87 9.46 10.00.

Calculer la moyenne et l'écart-type de ces résultats et interpréter.

Exercice 2.13

En reprenant les données du tableau de distribution de l'exercice 2.9, page 24,

a) Calculer une approximation de la vitesse moyenne et de l'écart-type et interpréter.

b) Les données sont-elles homogènes ?

Exercice 2.14

Deux enseignants, l'un travaillant en Suisse où les tests sont notés de 1 à 6 et l'autre travaillant en France où les tests sont notés de 0 à 20, discutent de leur classe.
L'enseignant suisse constate que sa classe a une moyenne de 4.1 avec un écart type de 1.2.
L'enseignant français constate que sa classe a une moyenne de 12.5 avec un écart type de 5.3.

a) Si x est une note attribuée dans le système français et y une note attribuée dans le système suisse, déterminer la relation entre x et y qui permet de transposer les notes d'un système à l'autre.

b) Si on compare les moyennes des ces deux classes, laquelle est la meilleure ?

c) Pourquoi le coefficient de variation $\dfrac{\sigma}{\overline{x}}$ ne permet-il pas de mesurer l'homogénéité des résultats de ces classes ?

d) Quelle est la classe la plus homogène ? Justifier la réponse par un calcul adéquat à définir.

Exercice 2.15

Déterminer la médiane $\tilde{x}$ et les quartiles Q_1 et Q_3 de chaque jeu de données, puis représenter les données sous la forme d'un boxplot.

a)

1	3	6	6	3	4	1
2	1	2	5	2	10	0
6	3	2	3	7	4	2

b)

valeur	-2	-1	0	1	2
effectif	18	10	15	12	5

c)

classe	$[140; 150[$	$[150; 160[$	$[160; 165[$	$[165; 170[$	$[170; 180[$
fréquence	10%	15%	40%	20%	15%

Exercice 2.16

On reprend le tableau de distribution de l'exercice 1.14, page 13,

a) Calculer la variance et l'écart-type.

b) Calculer le premier quartile, la médiane et le troisième quartile.

c) Tracer la boîte à moustaches correspondante.

Exercice 2.17

On reprend le tableau de distribution de l'exercice 2.3, page 22,

a) Calculer la variance et l'écart-type.

b) Calculer le premier quartile, la médiane et le troisième quartile.

c) Tracer la boîte à moustaches correspondante.

Exercice 2.18

On reprend le tableau de distribution de l'exercice 2.9, page 24,

a) Calculer le premier quartile, la médiane et le troisième quartile.

b) Tracer la boîte à moustaches correspondante.

Exercice 2.19

Voici les âges de 20 personnes qui se présentent au permis de conduire :

18	19	19	23	36	21	57	23	22	19
18	18	20	21	19	26	32	19	21	20

a) Donner le type de la variable étudiée.

b) Calculer la moyenne, la médiane et le mode de cette série statistique. Quelle est le paramètre de position le plus approprié ?

c) Quel est le pourcentage de personnes de 25 ans au plus qui se présentent à l'examen ?

d) Quel est la cote z du candidat le plus âgé ? Interpréter le résultat.

e) Quel âge aurait un candidat avec un score $z = -1$? Est-ce possible ?

Exercice 2.20

Trois élèves se disputent le prix du meilleur financement de la semaine spéciale dans une école :

- Edgar a vendu 85 tablettes de chocolat, alors que la moyenne de vente est de 52 tablettes par élève avec un écart-type de 13 tablettes.
- Faustine a vendu 25 arrangements de fleurs, avec une moyenne de 12 arrangements et un écart-type de 6.
- Georges a vendu 75 abonnements au journal de l'école, avec une moyenne de 47 abonnements et un écart-type de 10.

Qui mérite le prix ?

Exercice 2.21

Voici la durée d'hospitalisation en jours de 40 bébés nés à terme :

2	1	7	1	33	2	2	3	4	3
4	3	3	10	9	2	5	4	3	3
20	6	2	4	5	2	1	3	3	4
4	2	3	4	3	2	3	4	2	3

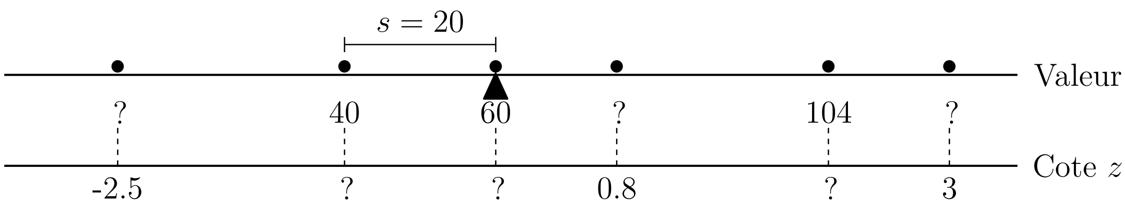
a) Représenter cette distribution sous la forme d'une boîte à moustaches.

b) Quel est la cote z du bébé qui est resté 20 jours à l'hôpital ?

c) Calculer le pourcentage des bébés dont l'écart à la moyenne n'excède pas un écart-type. Quelle a été la durée de leur hospitalisation ?

Exercice 2.22

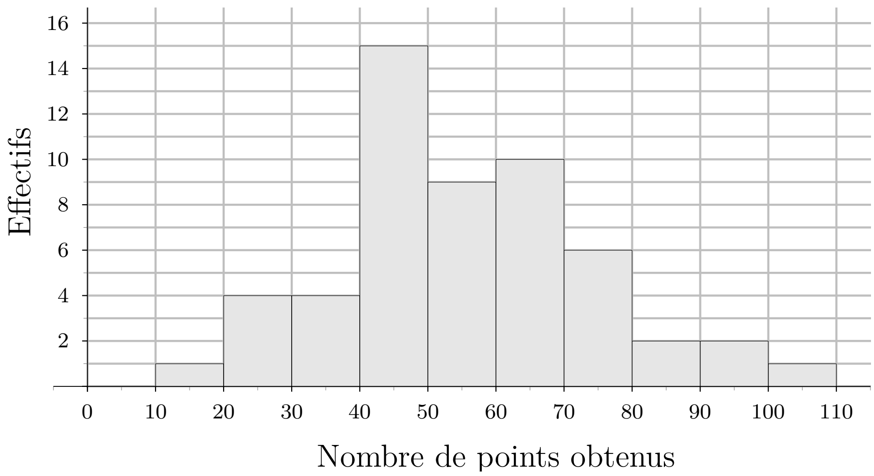
À l'aide de l'information donnée pour chacun des points du pictogramme ci-dessous, déterminer, selon les cas, la valeur ou la cote z de chaque point du graphique.



Exercice 2.23

Le nombre de points obtenus par les écoles de Suisse au concours de *Mathématiques sans Frontières* est représenté dans l'histogramme suivant :

Répartition de .... **selon** ....



a) Nommer précisément la variable étudiée, donner son type et le type d'échelle de mesure. Compléter le titre du graphique.

b) Calculer la moyenne $\bar{x}$ et l'écart-type σ de ces résultats et interpréter ces mesures. Marquer ces résultats sur le graphique de façon appropriée.

c) Quelle est la cote z d'une école ayant obtenu 110 points ?
Quelle est le nombre de points obtenus par une école qui présente une cote z égale à -2 ?

d) Les données sont-elles homogènes ? Justifier la réponse.

Exercice 2.24

Le nombre d'heures de fonctionnement de 50 piles à combustible a été mesuré.

15	238	164	222	764	501	2	43	140	104
492	158	85	311	432	130	308	954	489	491
335	60	209	104	286	229	22	347	326	332
20	225	89	125	61	34	3	287	125	318
91	305	192	491	209	168	869	183	541	552

a) Regrouper ces données dans un tableau de distribution en formant des classes d'amplitude égale à 100 heures, avec une dernière classe ouverte « ≥ 600 » et représenter le polygone des fréquences correspondant.

b) A l'aide du tableau, estimer par calculs la moyenne et l'écart-type. Représenter sur le graphique la moyenne par un triangle et l'écart-type par un intervalle et interpréter.

c) En utilisant la moyenne et l'écart-type obtenus sous b), calculer la cote z des deux valeurs extrêmes. Interpréter et critiquer l'interprétation.

d) Représenter le polygone des fréquences cumulées.

e) Déterminer graphiquement les quartiles et interpréter.

f) La compagnie qui fabrique ces piles garantit leur durée de vie. Ainsi, si une pile achetée dure moins de a heures, la compagnie s'engage à la remplacer gratuitement. D'après cet échantillon, quelle doit être la valeur de a si le fabricant ne veut pas remplacer plus de 3% des piles vendues ?

Solutions des exercices

2.1

a) moyenne : $\bar{x} = 4.04$ médiane : $\tilde{x} = 4$ mode : $M = 5$

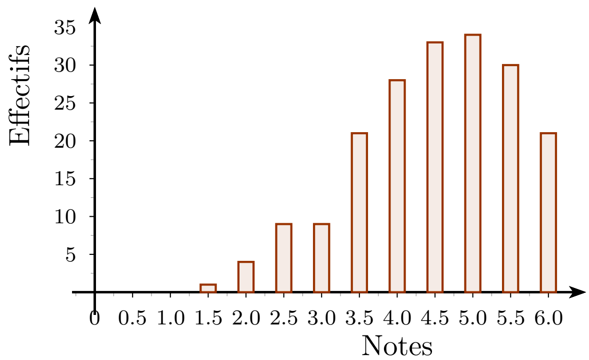
b) moyenne : $\bar{x} = 0$ médiane : $\tilde{x} = 0.05$ le mode n'existe pas

c) moyenne : $\bar{x} = 302$ médiane : $\tilde{x} = 290$ classe modale : $[400; 500[$

d) moyenne : $\bar{x} = 3.4$ médiane : $\tilde{x} \cong 3.43$ classe modale : $[3; 4[$

2.2 a) On étudie l'ensemble des travaux écrits passés par les élèves de cette classe. La variable est la note qui figure sur le travail après correction. Il s'agit d'une variable quantitative discrète qui peut prendre 11 valeurs.

b)



c)

Note	Effectif	Fréquence [%]
1.5	1	0.5
2	4	2.1
2.5	9	4.7
3	9	4.7
3.5	21	11.1
4	28	14.7
4.5	33	17.4
5	34	17.9
5.5	30	15.8
6	21	11.1
Total	190	100

d) le mode vaut 5, la médiane $\tilde{x} = 4.5$ et la moyenne $\bar{x} \cong 4.49$

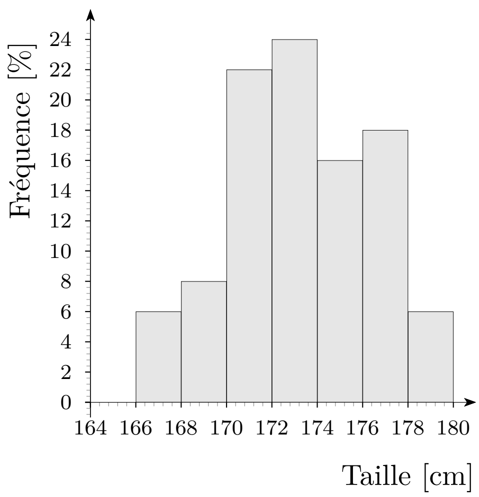
2.3

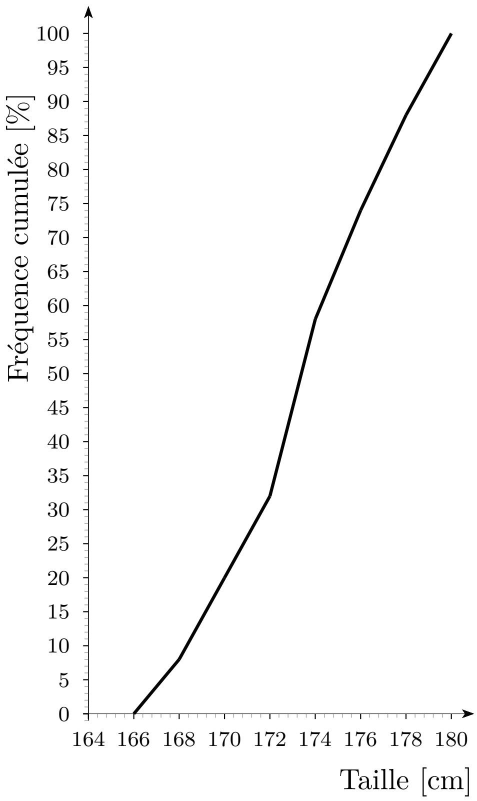
a) La variable étudiée est la taille en centimètres, variable quantitative continue.

b)

Taille [cm]	Effectif	Fréq.	Fréq. cumulées
$[166; 168[$	3	6%	6%
$[168; 170[$	4	8%	14%
$[170; 172[$	11	22%	36%
$[172; 174[$	12	24%	60%
$[174; 176[$	8	16%	76%
$[176; 178[$	9	18%	94%
$[178; 180[$	3	6%	100 %
Total	50	100%	-

c) **Répartition de 50 hommes selon leur taille en cm.**





d) La classe modale : $[172; 174[$, la médiane $\tilde{x} \cong 173.17$, la moyenne $\overline{x} \cong 173.28$

2.4 Soit x le nombre de femmes. On peut écrire

$$x \cdot 1.61 + (41\,250\,000 - x) \cdot 1.74 = 41\,250\,000 \cdot 1.67$$

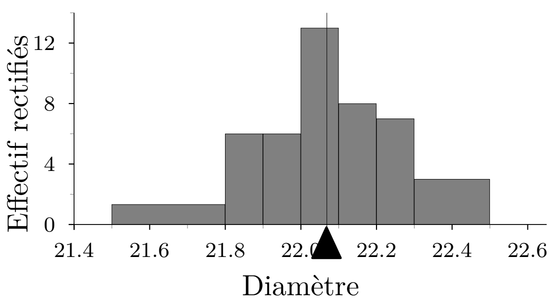
Et donc, $x \simeq 22\,211\,538.46 \simeq 22\,211\,538$, vu que l'on de considère pas des fractions de personnes.

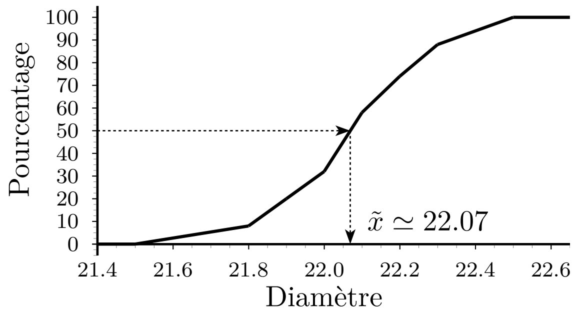
Il y a donc $3\,173\,076$ femmes de plus que le nombre d'hommes.

2.5 La cinquième note est 5.6

2.6 **a)** $\bar{x}_{1860} = 29.1$ ans, $\bar{x}_{2009} = 41.1$ ans **b)** $\tilde{x}_{1860} = 26.1$ ans, $\tilde{x}_{2009} = 41.4$ ans
c) 0 à 10 ans pour 1860 et 40 à 50 ans pour 2009. Ces classes modales sont peu significatives car leurs effectifs ne sont pas beaucoup plus élevés que ceux des autres grandes classes.
d) En 1860, l'âge moyen est plus élevé que l'âge médian, car les quelques personnes très âgées tirent la moyenne vers le haut. En 2009, les âges moyen et médian sont identiques, car la répartition de la population autour de ces mesures est symétrique. **e)** La population est plus vieille en 2009 qu'en 1860.

2.7





a) $\bar{x} = 22.068$ mm **b)** $\tilde{x} = 22.069$ mm **c)** La classe modale [22.0 ; 22.1[est significative car son effectif est nettement plus élevé que ceux des autres classes. **d)** La classe modale contient la moyenne et la médiane qui sont très proches. La distribution est de type normale, en forme de cloche.

2.8

a) variance : $s^2 = 1.9584$ écart-type : $s \cong 1.40$

b) variance : $s^2 = 0.306$ écart-type : $s \cong 0.55$

c) variance : $s^2 = 16096$ écart-type : $s \cong 126.87$

d) variance : $s^2 = 1.135$ écart-type : $s \cong 1.07$

2.9

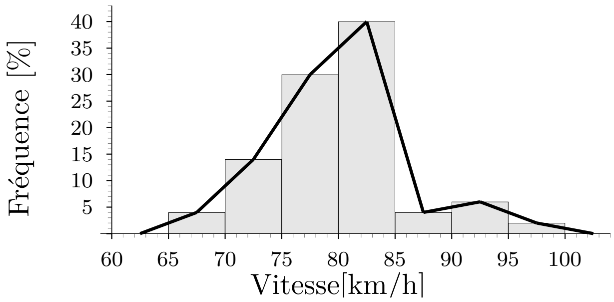
a) On étudie la vitesse des véhicules, variable quantitative continue.

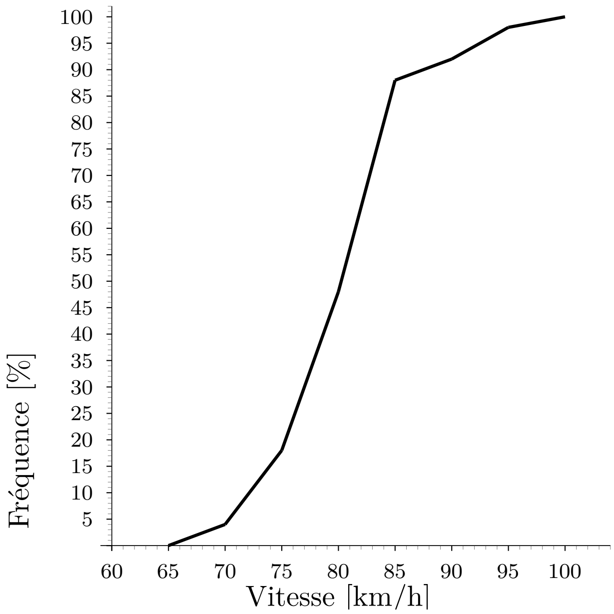
b) Classe modale : [80 ;85 [

c)

Vitesse [km/h]	Effectif	Frq.	Frq. cum
[65; 70[	2	4%	4%
[70; 75[	7	14 %	18%
[75; 80[	15	30%	48%
[80; 85[	20	40%	88%
[85; 90[	2	4%	92%
[90; 95[	3	6%	98%
[95; 100[	1	2%	100%
Total	50	100%	-

Répartition de 50 véhicules selon leur vitesse.





g) Moyenne $\bar{x} = 80,1 km/h$. Ecart-type $s \cong 6,02$.

2.10

a) C'est la série A. En effet, il y a plus d'écart à la moyenne dans une famille que dans une classe.

b) Plus l'écart-type est faible, plus les résultats sont proches. C'est donc dans la deuxième classe que les élèves ont à peu près le même niveau sur ce sujet.

c) L'écart-type et la moyenne sont tous les deux nuls, car aucune des données n'est inférieure à 0. On peut aussi écrire $s = \overline{x} = 0$

d) Nouvelle moyenne : $\overline{x}' = 18.16$. Nouvel écart-type : $s' = s = 0.76$.

e) C'est faux ; une part importante des données est comprise entre 60 et 80, mais pas toutes.

2.11 Une pluralité de notes sont comprises entre 3.37 et et 5.03, c'est-à-dire entre 3.5 et 5.0 si les notes sont arrondies au demi-point.

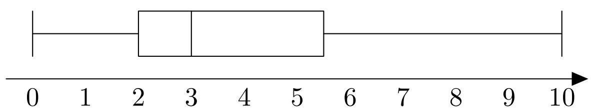
2.12 $\bar{x} = 9.822$ et $s = 0.222$.
Une pluralité de mesures donne une accélération comprise entre 9.600 et 10.044 m/s^2.

2.13 **a)** $\bar{x} = 80.1 \quad s = 6.0$. Une pluralité de véhicules roulent entre 74.1 km/h et 86.1 km/h.
b) coefficient de variation $= \dfrac{6.0}{80.1} = 0.075 = 7.5\% < 15\%$. Les données sont homogènes.

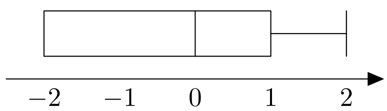
2.14 **a)** $y = \dfrac{x}{4} + 1$ et $x = 4 \cdot (y - 1)$ **b)** La classe française. **c)** Les notes suisses se mesurent sur une échelle d'intervalle et non de rapport. De plus, dans les deux cas, les notes sont bornées supérieurement.
d) $\dfrac{1.2}{6-1} = 0.24 < \dfrac{5.3}{20-0} = 0.263$. La classe suisse est plus homogène que la française.

2.15

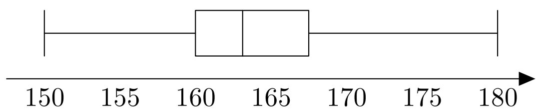
a) $Q_1 = 2 \quad \tilde{x} = 3 \quad Q_3 = 5.5$



b) $Q_1 = -2 \quad \tilde{x} = 0 \quad Q_3 = 1$

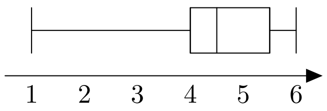


c) $Q_1 = 160 \quad \tilde{x} = 163.125 \quad Q_3 = 167.5$



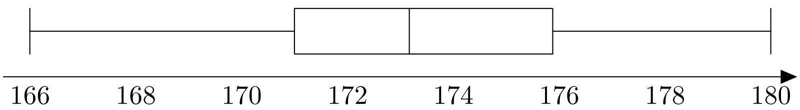
2.16 a) $s^2 = 1.074$ écart-type : $s \cong 1.04$

b) Q_1, 48^e valeur $\Rightarrow Q_1 = 4$, médiane $\tilde{x} = \dfrac{4.5 + 4.5}{2} = 4.5$
et Q_3, 143^e valeur $\Rightarrow Q_3 = 5,5$,

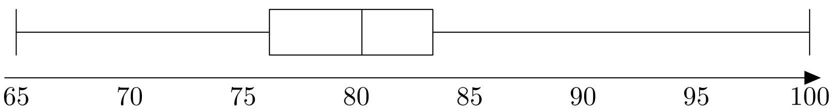
c) 

2.17 a) $s^2 \cong 1.074$ écart-type : $s \cong 1.04$

b) $Q_1 = 171$ cm $\tilde{x} \cong 173,17$ $Q_3 \cong 175,88$ cm

c) 

2.18 a) $Q_1 \cong 76.17$ $\tilde{x} = 80.25$ $Q_3 \cong 83.38$

b) 

2.19

a) Variable quantitative continue (traitée comme discrète).

b) La médiane vaut 20.5 et la moyenne $\overline{x} = 23.55$ et le mode vaut 19. La médiane est la mesure la plus appropriée, car elle n'est pas influencée par les très grandes valeurs contrairement à la moyenne. Le mode ne présente pas une fréquence suffisante par rapport aux autres valeurs.

c) Il y a 80% des candidats qui ont moins de 25 ans.

d) On calcule la cote z comme suit :

$$z = \frac{57 - 23.55}{8.93} \simeq 3.75$$

L'âge du candidat est très éloigné de la moyenne. Cela constitue une exception.

e) Si la cote z vaut -1, cela implique que $x \simeq 14.62 < 18$. Cette situation ne peut pas se produire, vu que l'âge minimal pour se présenter à l'examen du permis de conduire est de 18 ans !

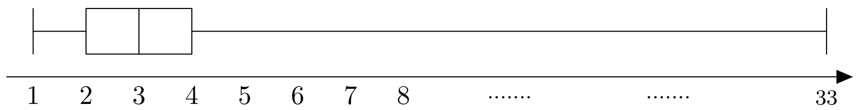
2.20 On a calculé la cote z du nombre d'objets vendus pour chacun des élèves concernés :

$$z_E \simeq 2.54 \qquad z_F \simeq 2.17 \qquad z_G \simeq 2.8$$

C'est Georges qui obtiendra le prix, vu que la cote z de ses ventes est la plus élevée.

2.21

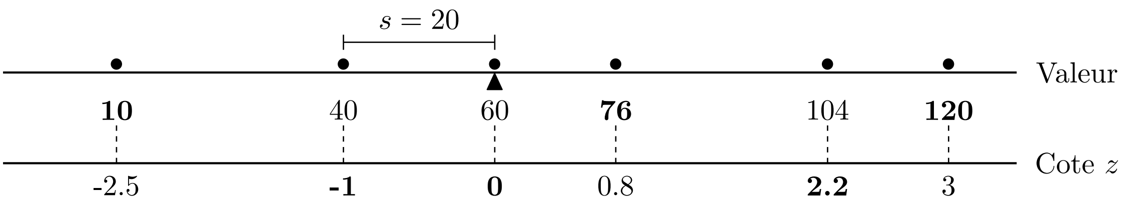
a) $Q_1 = 2 \quad \tilde{x} = 3 \quad Q_3 = 4$



b) $z \simeq (20 - 4.6)/5.55 \simeq 2.77$

c) Si $z = -1$, alors $x = -0.95$ et donc $x = 1$. Si $z = 1$, alors $x = 10.15$. L'ensemble des valeurs de cette variable comprises entre 1 et 10 représentent le 95% de toutes les valeurs. On peut donc affirmer que 95% des bébés sont restés entre 1 et 10 jours.

2.22



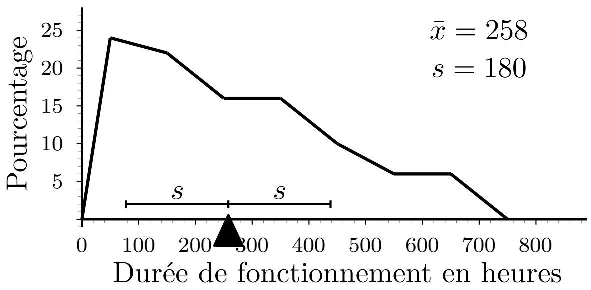
2.23 **a)** Le nombre de points obtenus est une variable quantitative discrète, mesurée sur une échelle de rapport. Titre du graphique : Répartition de 54 écoles suisses selon le nombre de points obtenus au concours.
b) $\bar{x} = 55.37$; $\sigma = 18.85$. Une pluralité d'écoles ont obtenus entre 37 et 74 points.
c) $z_{110} = 2.9$ et $x_{-2} \simeq 18$ points. **d)** $CV = 34\% > 15\%$. Les résultats ne sont pas du tout homogènes.

2.24

a) Répartition de 50 piles à combustible selon leur durée de fonctionnement.

Durée [h]	Effectif	Pourcentage
$[0;100[$	12	24%
$[100;200[$	11	22%
$[200;300[$	8	16%
$[300;400[$	8	16%
$[400;500[$	5	10%
$[500;600[$	3	6%
≥ 600	3	6%
Total	50	100%

b) Polygone des fréquences.

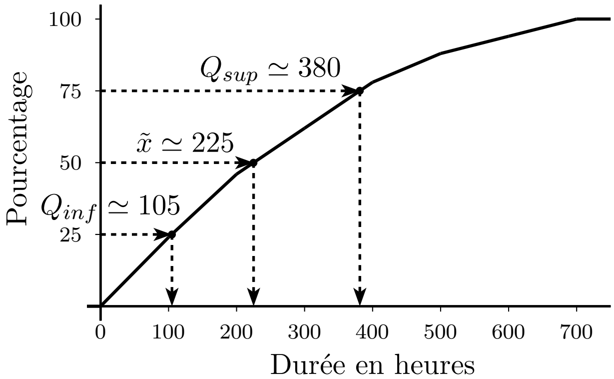


Une pluralité de piles ont une durée de fonctionnement comprise entre 78 et 438 heures.

c) $z_{min} = \dfrac{2-258}{180} = -1.42$ et $z_{max} = \dfrac{954-258}{180} = 3.87$.

D'après les cotes z, une durée de fonctionnement de 954 heures est exceptionnelle alors qu'une durée de fonctionnement de 2 heures ne constitue pas un cas particulièrement rare. Cette dernière interprétation n'est toutefois pas valide pour ces données dont la plus petite cote z possible est $\dfrac{0-258}{180} = -1.4\bar{3}$.

d) Polygone des fréquences cumulées.



e) 50% des piles fonctionnent entre 105 et 380 heures, 25% des piles fonctionnent moins de 105 heures et 25% des piles plus de 380 heures.

A partir des données brutes, on obtient les quartiles suivants :
$Q_0 = x_{min} = 2, \quad Q_1 = Q_{inf} = 104,$
$Q_2 = \bar{x} = 215.5, \quad Q_3 = Q_{sup} = 335,$
$Q_4 = x_{max} = 954.$

Par calcul sur les données regroupées en classe, on obtient les valeurs suivantes :
$Q_0 = 0, \quad Q_1 = 104.5, \quad Q_2 = 225,$
$Q_3 = 381.25, \quad Q_4 = 700$

f) 3% des piles de l'échantillon ont duré moins de $a = \dfrac{3\%}{24\%} \cdot 100 = 12.5$ heures.
Ainsi, les piles ayant duré moins de 12.5 heures devraient être remplacées gratuitement.

Chapitre 3

Programmation linéaire

Exercice 3.1

Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'inéquations suivants.

a) $\begin{cases} 3x + y > 3 \\ 2x - y < 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -2x + y < -2 \\ -x + y \geqslant 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y \geqslant 0 \\ 2x + 5y < 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y \leqslant 8 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x + y \leqslant 6 \\ -2x + y > 1 \\ x \geqslant -2 \\ y < 4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + 3y \leqslant 12 \\ 2x + y \geqslant 2 \\ 3x - y \leqslant 8 \\ x \leqslant 3 \\ y \leqslant 4 \end{cases}$

Exercice 3.2

Déterminer par calculs les sommets de chacun des polygones de l'exercice précédent puis préciser s'ils appartiennent ou non à la solution.

Exercice 3.3

Maximiser $f(x; y) = 6x + 5y$ sous les contraintes suivantes.

$$2x + y \leqslant 9, \quad 3x + y \geqslant 6, \quad 2x + 2y \leqslant 14, \quad x \geqslant 0 \quad \text{et} \quad y \geqslant 0$$

Exercice 3.4

Déterminer la valeur maximum et minimum de la fonction $f(x;y) = 4x - 2y$ sujette aux contraintes suivantes.

$$\begin{cases} x - 2y \geqslant -8 \\ 7x - 2y \leqslant 28 \\ x + y \geqslant 4 \end{cases}$$

Applications

Exercice 3.5

Une entreprise fabrique deux types de boîtes en métal. La fabrication d'une boîte de type A demande 1 heure de travail et 3 kg de métal, alors que le type B, demande 2 heures de travail et 2 kg de métal. L'entreprise dispose de 80 heures de temps de travail et de 120 kg de métal. Pour une boîte, le profit est de CHF 50.- pour le type A et de CHF 20.- pour le type B.

a) En posant x pour le nombre de boîtes de type A et y pour le nombre de boîtes de type B, déterminer la fonction objectif, puis exprimer les contraintes.

b) Représenter graphiquement le polygone des solutions, puis déterminer ses sommets.

c) Comment organiser la production, afin de maximiser le profit ?

Exercice 3.6

Une entreprise fabrique des automobiles et des camions dans une usine divisée en deux ateliers : l'atelier A où s'effectue le travail d'assemblage et de montage et l'atelier B où s'accomplissent toutes les opérations de finissage. L'atelier A emploie 5 journées de travail par camion et 2 par automobile. L'atelier B emploie 3 journées de travail indifféremment pour l'un ou pour l'autre. En raison de limitations de personnel et de machines, l'atelier A peut disposer au maximum de 180 journées de travail par semaine et l'atelier B de 135.

a) Si le fabricant fait un profit de CHF 3'000.- par camion et de CHF 2'000.- par automobile, combien doit-il produire de véhicules de chaque type pour maximiser son profit ?

b) Et si les profits respectifs étaient de CHF 4'000 et CHF 1'000 ?

c) Et si les profits respectifs étaient de CHF 2'000 et CHF 2'000 ?

Exercice 3.7

René est Charcutier. Il dispose aujourd'hui de 105 kg de lard haché. Avec cette viande, il doit fabriquer des tourtières et des bols de cretons. Pour chaque tourtière qu'il fabrique, il utilise 1 kg de lard haché alors que pour un bol de cretons, il n'a besoin que de 500 g de lard haché. De plus, chaque tourtière lui coûte CHF 0,25 en main-d'oeuvre, alors qu'un bol de cretons lui coûte CHF 0,50 en main d'oeuvre. Il ne peut pas payer plus de CHF 60.– par jour en main-d'oeuvre.

a) Pour chacune des tourtières qu'il vend, il réalise un profit de CHF 0,50 et pour chaque bol de cretons qu'il vend, il réalise un profit de CHF 0,75. Combien de tourtières et combien de bols de cretons doit-il fabriquer, s'il veut maximiser son profit ?

b) Même exercice mais le profit est de CHF 0,50 sur une tourtière et CHF 1,25 sur un bol de cretons.

c) Même exercice mais le profit est de CHF 1.– sur une tourtière et CHF 0,25 sur un bol de cretons.

Exercice 3.8

Jean est un champion cycliste qui prépare son entraînement en vue d'une importante compétition. Son entraînement doit se composer chaque semaine d'un certain nombre d'heures de travail en salle et d'un certain nombre d'heures de travail sur route. Au total, il doit s'entraîner au moins 20 heures chaque semaine et son nombre d'heures de travail sur route doit être au moins égal au tiers du nombre d'heures de travail en salle. Pour s'entraîner en salle, il retient les services d'un entraîneur spécialisé qui lui coûte CHF 10.– l'heure ; cependant, cet entraîneur ne sera disponible que s'il est engagé pour au moins 10 heures par semaine. Pour s'entraîner sur route, il retient les services d'un spécialiste qui lui coûte CHF 12.– l'heure ; ce spécialiste ne peut être disponible pour plus de 15 heures par semaine.

a) Comment Jean doit-il planifier sa semaine d'entraînement pour que cela lui coûte le moins cher possible ?

b) Et si l'entraîneur en salle coûte CHF 15.– l'heure et celui sur route CHF 12.– l'heure, de quelle façon Jean doit-il planifier sa semaine d'entraînement pour que cela lui coûte le moins cher possible ?

Exercice 3.9

On désire préparer des rations alimentaires contenant au moins 90 g de protéines, 120 g d'hydrate de carbone et $2'400$ calories à partir de deux produits A et B. Une dose du produit A coûte CHF 1.- et contient 15 g de protéines, 20 g d'hydrate de carbone et 300 calories. Une dose du produit B coûte CHF 1.- et contient 10 g de protéines, 30 g d'hydrate de carbone et 400 calories.

Quelle est la composition de la ration alimentaire la plus économique ?

Exercice 3.10

Une société importatrice de café achète des lots de grains de café en vrac, puis les sépare en grains de premier choix, ordinaires et inutilisables. La société a besoin d'au moins 280 t de grains de premier choix et 200 t de grains ordinaire. Elle peut acheter des grains non triés à volonté chez deux fournisseurs. Des échantillons provenant des deux fournisseurs contiennent les pourcentages suivants de grains de premier choix, ordinaires et inutilisables :

Fournisseur	Premier choix	Ordinaire	Inutilisable
A	20%	50%	30%
B	40%	20%	40%

Si le fournisseur A facture CHF 125.- la tonne et le fournisseur B CHF 200.- la tonne, quelle quantité la société devrait-elle acheter chez chacun des fournisseurs pour satisfaire à ses besoins à un coût minimum ?

Exercice 3.11

Un sculpteur décide de créer deux nouveaux styles de statues ; le modèle A et le modèle B. Le modèle A nécessite 1 heure de sculpture, 2 heures de ponçage et 1 heure de finition. Le modèle B nécessite 2 heures de sculpture, 1 heure de ponçage et 1 heure de finition. Il dispose quotidiennement de 20 heures à l'atelier de sculpture, de 22 heures à l'atelier de ponçage et de 12 heures à l'atelier de finition. Les profits qu'il peut réaliser pour chacun des modèles sont de CHF 200.- pour le modèle A et de CHF 300.- pour le modèle B.

Quel nombre de statues de chaque modèle doit-il fabriquer par jour, afin d'obtenir un profit maximal ?

Exercice 3.12

Un ébéniste fabrique des tables et des armoires avec trois sortes de bois : chêne, pin et noyer. Dans le tableau ci-dessous, on donne le nombre de mètres carrés de bois nécessaire à la fabrication de chaque type de meubles et le nombre de mètres carrés de bois disponible.

	Armoire	Table	Disponible
Chêne	4	5	210 m^2
Pin	5	2,5	180 m^2
Noyer	6	5	240 m^2

Combien d'armoires et de tables cet artisan doit-il fabriquer pour rendre son gain maximum si :

a) il gagne CHF 1'000.- par armoire et CHF 900.- par table ?

b) il gagne CHF 1'200.- par armoire et CHF 1'000.- par table ?

Exercice 3.13

Un artisan fabrique deux modèles de lampes, un modèle de style canadien et un modèle de style futuriste. Pour chacune des lampes qu'il fabrique il doit utiliser deux machines M_1 et M_2 . Dans le cas d'une lampe de style canadien, il doit mettre 2 heures de travail sur la machine M_1 et 4 heures sur la machine M_2. Pour une lampe de style futuriste, il doit mettre 3 heures de travail sur la machine M_1 et 2 heures sur la machine M_2. Même avec l'aide d'apprentis, les machines ne peuvent fonctionner plus de 16 heures par jour. L'artisan connaît bien le marché et il sait qu'il vendra toutes les lampes qu'il peut fabriquer, en réalisant un profit de CHF 5.– sur chaque lampe de style canadien et un profit de CHF 4.– sur chaque lampe de style futuriste.

Déterminer le nombre de lampes de style canadien et le nombre de lampes de style futuriste que cet artisan devrait fabriquer à chaque jour, s'il veut maximiser son profit.

Exercice 3.14

Une chaîne de montage automobile permet de monter deux types de voiture, la "standard" et la "luxe" d'après les conditions suivantes :

	standard	luxe
capacité maximum par jour de la chaîne de montage	500 voitures	300 voitures
nombre d'heures de travail par voiture	24 h	48 h
prix de revient par voiture sans main-d'oeuvre	CHF 5'000.–	CHF 6'500.–
bénéfice réalisé par voiture	CHF 10'000.–	CHF 30'000.–

Calculer le nombre de voitures de chaque type qu'il faut monter par jour afin de réaliser un bénéfice maximum, sachant que 19'200 heures de travail sont disponibles chaque jour et que l'investissement ne doit pas dépasser CHF 3'250'000.– .

Exercice 3.15

Une petite usine fabrique des savonnettes de deux modèles : pour le ménage M, de luxe L. La cuve de fabrication du mélange, pour des raisons mécaniques et de rendement, peut, en une cuvée, préparer une quantité de produit correspondant à au moins 100, mais au plus 1'500 savonnettes M, ou à au moins 80, mais au plus 1'200 savonnettes L. La demande de savonnettes est au plus de 1'400 pour le modèle M, au plus de 320 pour le modèle L. La machine, unique, à former, puis à emballer les savonnettes peut en débiter au maximum 1'520 par jour. On gagne CHF 0.40 par savonnette M et CHF 1.- par savonnette L.

Quel bénéfice journalier maximum cette usine peut-elle faire et comment ?

Exercice 3.16

Un fabricant de raquettes de tennis fait un bénéfice de 8 € sur chaque raquette ordinaire et de 15 € sur chaque grande raquette. Pour satisfaire à la demande des vendeurs, la production journalière de raquettes ordinaires devrait se situer entre 30 et 80, et la production journalière de grandes raquettes entre 10 et 30. Pour maintenir une bonne qualité, le nombre de raquettes produites ne devrait pas dépasser 80 par jour.

Combien de raquettes de chaque type faudrait-il fabriquer quotidiennement pour réaliser un bénéfice maximum ?

Exercice 3.17

Une entreprise fabrique deux produits qu'elle désire vendre aux USA. Le produit A rapporte 4 € par kilogramme et le produit B rapporte 6 € par kilogramme. Ayant des moyens financiers limités, la société ne peut affréter qu'un seul avion. Celui-ci ne peut transporter que 50 tonnes et a un volume de 2100 m^3. Le produit A a un volume de 30 m^3 par tonne, le produit B a un volume de 70 m^3 par tonne.

Combien de kilogrammes de chaque produit l'entreprise doit-elle mettre dans l'avion afin de maximiser ses gains ?

Exercice 3.18

Pour fleurir un parc, il faut au minimum 1200 jacinthes, 3200 tulipes et 3000 narcisses.
Un premier pépiniériste propose le lot A pour 15 € comportant 30 jacinthes, 40 tulipes et 30 narcisses. Un deuxième pépiniériste propose le lot B pour 12 € comportant 10 jacinthes, 40 tulipes et 50 narcisses.

Combien faut-il acheter de lots A et de lots B pour minimiser la dépense de l'achat des fleurs ?

Exercice 3.19

Un artisan de la région lausannoise produit deux types de glaces, velvet et classic, vendues en barquettes. La production quotidienne de glace est limitée à 700 barquettes. Pour confectionner une barquette velvet, il a besoin de 90 grammes de crème et 40 grammes de sucre. Pour confectionner une barquette classic, il a besoin de 45 grammes de crème et 120 grammes de sucre.
L'artisan dispose de 54 kilogrammes de crème et 60 kilogrammes de sucre par jour.

Déterminer le nombre de barquettes de chaque type que l'artisan doit produire chaque jour en vue de maximiser son bénéfice, sachant qu'il reçoit 60 centimes par barquette velvet et 40 centimes par barquette classic.

Exercice 3.20

L'entreprise Jardinbiquet, productrice de nains de jardin, voyant le marché saturé, décide de remplacer une partie de cette production par celles de statues de Blanche-Neige et de dinosaures. Pour cela, elle disposera chaque jour de 5 heures d'atelier de moulage, 16 heures d'atelier de peinture et 3 heures d'atelier d'emballage. Chaque exemplaire de Blanche-Neige nécessite 3 minutes de moulage, 24 minutes de peinture et 4 minutes d'emballage. Chaque exemplaire de dinosaure nécessite 10 minutes de moulage, 15 minutes de peinture et 5 minutes d'emballage. Le profit est de CHF 40.– par statue de Blanche-Neige et de CHF 35.– par dinosaure.

Déterminer le nombre de statues de Blanche-Neige et le nombre de dinosaures à produire pour maximiser le profit.

Exercice 3.21

Une grande entreprise de distribution doit acheter des pommes chez deux producteurs de fruits. Elle a besoin d'au moins 60 tonnes de pommes de première qualité, 45 tonnes de pommes de deuxième qualité et 24 tonnes de pommes de qualité inférieure pour la production du cidre. Un échantillon de fruits provenant du producteur Apifruits indique que 30% de ses pommes sont de première qualité, 50% de deuxième qualité et 20% de qualité inférieure. Un second échantillon de fruits provenant du producteur Jonagold indique que 60% de ses pommes sont de première qualité, 25% de deuxième qualité et 15% de qualité inférieure.

Si Apifruits facture CHF 1200.– pour une tonne de pommes et Jonagold CHF 1400.– la tonne, combien de tonnes l'entreprise doit-elle commander à chaque producteur pour couvrir ses besoins au moindre coût ?

Exercice 3.22

Sophie projette un voyage d'une longueur de 8′000 km aux USA, qu'elle parcourra en train, en car et en bateau. Les prix et les vitesses de déplacement sont donnés ci-dessous :

	Bateau	Car	Train
Prix au km en CHF	0,15	0,20	0,25
Vitesse en km/h	30	40	80

Elle souhaite parcourir au moins 3′000 km en bateau, et ne désire pas effectuer plus de kilomètres en train qu'en car.

Quelles distances doit-elle parcourir avec chaque moyen de transport si elle veut que le prix total de son voyage ne dépasse pas CHF 1'500.- et que sa durée soit minimum ?

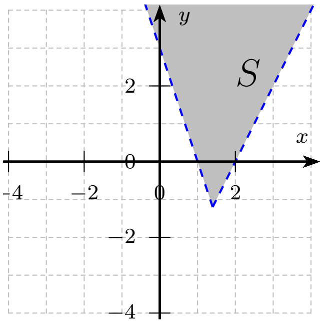
Exercice 3.23

Dans une usine de boissons, on fabrique du Coca, du Fanta et du Sprite. Le Coca représente plus de la moitié de la demande, le Sprite le tiers de la demande de Fanta au plus. Quotidiennement, l'usine produit 30'000 bouteilles, dont au moins 3'000 de Sprite.

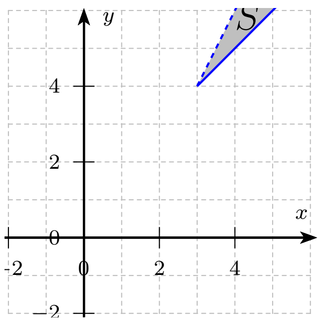
Quel bénéfice maximum peut-on faire chaque jour si l'on gagne 20 cts par bouteille de Coca, 25 cts pour le Fanta et 35 cts pour le Sprite ?

Solutions des exercices

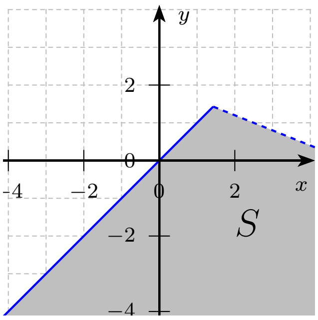
3.1 a)



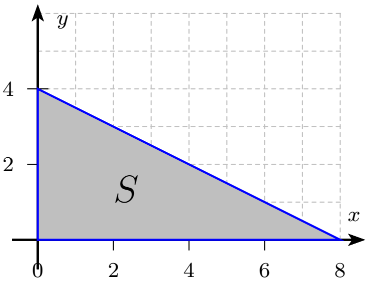
b)



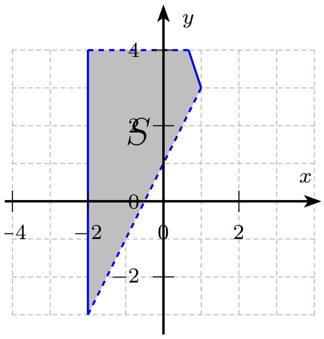
c)



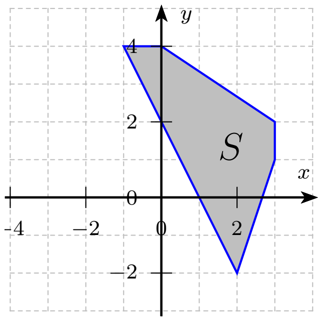
d)



e)



f)



3.2 a) $\left(\frac{7}{5};-\frac{6}{5}\right) \notin S$; b) $(3;4) \notin S$; c) $\left(\frac{10}{7};\frac{10}{7}\right) \notin S$; d) $(0;0)$, $(0;4)$, $(8;0)$ tous appartiennent à S ; e) $(1;3)$, $\left(\frac{2}{3};4\right)$, $(-2;4)$, $(-2;-3)$ aucun n'appartient à S ; f) $(3;2)$, $(0;4)$, $(-1;4)$, $(2;-2)$, $(3;1)$ tous appartiennent à S.

3.3 $x = 2$ et $y = 5$, max : 37.

3.4 max : 16, min : -8.

3.5 a) $f(x;y) = 50x + 20y$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + 2y \leqslant 80$, $3x + 2y \leqslant 120$; b)– ;c) 40 boîtes de type A, 0 boîte de type B.

3.6 a) 30 camions et 15 voitures (max : CHF 120'000.–) ; b) 36 camions et aucune voiture (max : de CHF 144'000.–) ; c) x camions ($0 \leqslant x \leqslant 30$) et $45 - x$ voitures (max : de CHF 90'000.–).

3.7 a) 60 tourtières et 90 bols de cretons (max : CHF 97,50) ; b) 120 bols de cretons et aucune tourtière (max : CHF 150.–) ; c) 105 tourtières et aucun bol de cretons (max : de CHF 105.–).

3.8 a) 15 heures d'entraînement en salle et 5 heures sur route (min : CHF 210.–) ; b) 10 heures d'entraînement en salle et 10 heures sur route (min : CHF 270.–).

3.9 4 doses de produit A et 3 doses de produit B.

3.10 150 t du fournisseur A et 625 t du fournisseur B.

3.11 4 modèles A et 8 modèles B.

3.12 a) 15 armoires et 30 tables ; b) il y a quatre choix possibles : 15 armoires et 30 tables, 20 armoires et 24 tables, 25 armoires et 18 tables, 30 armoires et 12 tables.

3.13 2 lampes de style canadien et 4 lampes de style futuriste (max : CHF 26.–).

3.14 200 voitures "Standard" et 300 voitures "Luxe" (max : CHF 11'000'000.–).

3.15 Bénéfice maximum quotidien de CHF 800.–, 1200 savonnettes de ménage et 320 savonnettes de luxe.

3.16 50 raquettes ordinaires et 30 grandes raquettes (max : 850 €).

3.17 35'000 kg du produit A et 15'000 kg du produit B (max : 230'000 €).

3.18 20 lots A et 60 lots B (min : 1020 €).

3.19 500 barquettes velvet et 200 barquettes classic (max : CHF 380.–).

3.20 35 statues Blanche-Neige et 8 statues dinosaure (max : CHF 1'680.–).

3.21 72 tonnes chez Apifruits et 64 tonnes chez Jonagold (min : CHF 176'000.–).

3.22 $4'000$ km en bateau, $2'000$ km en car et $2'000$ km en train.

3.23 Bénéfice maximum quotidien de CHF 7'125.– (15'000 bouteilles de Coca, 11'250 bouteilles de Fanta et 3750 bouteilles de Sprite).

Chapitre 4

Processus exponentielles

Révisions 2E

Exercice 4.1
Simplifier les expressions suivantes :

a) $(2x^2)^4 \cdot (3x^5)^2$

b) $\left(\dfrac{2}{3}x^3\right)^2 \cdot \left(\dfrac{3}{2}x^2\right)^3$

c) $\dfrac{3x^2y^4}{2x^0y^3}$

d) $\dfrac{3x^3 \cdot 2y}{(2x^2y)^3}$

e) $\left(\dfrac{4a^2b}{a^3b^2}\right) \cdot \left(\dfrac{5a^2b}{2b^4}\right)$

f) $(-2xy^2)^5 \cdot \left(\dfrac{x^7}{8y^3}\right)$

Exercice 4.2
Résoudre les équations ci-dessous :

a) $5^x = 25$

b) $3^x = \dfrac{1}{9}$

c) $x^4 = 16$

d) $4^x = 64$

e) $4^x = 8$

f) $9^{2x+1} = 1$

g) $16 \cdot 2^x = 4^{3x+5}$

h) $8^{7x-2} = 8^{-3x+8}$

i) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+7} = 2$

Exercice 4.3
Résoudre les équations ci-dessous :

a) $3^{2x+3} = 3^{(x^2)}$

b) $9^{(x^2)} = 3^{3x+2}$

c) $2^{-100x} = 0,5^{x-4}$

d) $(\dfrac{1}{4})^{6-x} = 4$

e) $27^{x-1} = 9^{2x-3}$

f) $2^x \cdot 4^x = -5$

g) $(5^{x-2})^4 = 125 \cdot 5^{5x-3}$

h) $(3^{x-1})^3 = 9 \cdot 3^{x-2}$

Exercice 4.4

Résoudre les équations ci-dessous :

a) $145^x = 3451$ b) $5^{2x} = 456.35$ c) $1000 \cdot 1.12^x = 10'000$

d) $20 \cdot 5^{3x} = 800$ e) $\dfrac{7^{x+1}}{100} = 20$ f) $20 + 100 \cdot 4^{-0.5x} = 60$

Exercice 4.5

Résoudre les équations ci-dessous :

a) $\log_{11}(x+1) = \log_{11}(7)$ b) $\log_6(2x-3) = \log_6(12) - \log_6(3)$

c) $\log(x) - \log(4) = 3\log(4)$ d) $\log_3(x) = 3\log_3(5)$

e) $\ln(x) + \ln(x-2) = 0,5\ln(9)$ f) $\log_8(x+4) = 1 - \log_8(4)$

g) $\log(x+2) - \log(2) = 3\log(3)$ h) $\log(x) + \log(x-5) = \log(2) + \log(7)$

Exercice 4.6

a) Calculer la valeur acquise par $40'000$ francs à 3.75% pendant 10 ans à intérêts composés.

b) Calculer la valeur actuelle d'un capital qui vaudra $10'730.40$ francs dans 7 ans à 5.25%.

c) Il y a six ans, on a placé $12'000$ francs à un certain taux. On retire aujourd'hui $14'751.05$ francs. Quel était ce taux ?

d) On dispose de $100'000$ francs. On place cette somme à 9%. Après combien d'années aura-t-on $364'248.25$ francs ?

Exercice 4.7

a) Calculer l'intérêt gagné durant la $12^{\text{ème}}$ année grâce à un capital initial de $15'000$.- placés à un taux de 3%.

b) Un capital de $80'000$.- placé à 4.5% a rapporté $15'401.50$ francs d'intérêts. Quelle est la durée du placement ?

c) Un capital de $20'000$ francs a rapporté 9282 francs en 4 ans. Quel est le taux ?

d) Une personne a gagné 5000.- en 10 ans à un taux de 3%. Quel était le capital initial ?

Exercice 4.8

On place $2'900$ francs à 4% pendant un certain temps. Pour un an de plus, on retirerait 185.72 francs de plus. Calculer la durée du placement.

Exercice 4.9

Vous voulez placer un montant de $2'000$ CHF et vous avez consulté trois banques. La première banque B_1 offre un taux annuel de 9% capitalisé annuellement. La seconde banque B_2 offre un taux nominal de 9% capitalisé trimestriellement. La troisième banque B_3 offre un taux périodique mensuel de 0.75%. Quelle banque offre les meilleures conditions ?

Exercice 4.10

On place un capital de 100'000 francs à un taux nominal de 12%. Quelle somme aura-t-on après 6 ans si la capitalisation est annuelle ? semestrielle ? trimestrielle ?

Exercice 4.11

A quel taux nominal capitalisé semestriellement a-t-on placé un capital de 100'000 francs si l'on obtient un capital de 166'817.25 francs après 8 ans ?

Exercice 4.12

Combien de temps faut-il placer un capital initial de 12'000 francs à un taux nominal de 8% capitalisé semestriellement pour obtenir 49'247,20 francs ?

Applications aux sciences sociales, expérimentales ou économiques

Exercice 4.13

Le nombre de bactéries triple toutes les 5 heures. Au départ, il y en a 2000.

a) Trouver la fonction exprimant le nombre de bactéries en fonction du temps.

b) Trouver le nombre de bactéries après 1 jour.

c) Après combien de temps le nombre de bactéries aura-t-il centuplé ?

Exercice 4.14

a) Un objet vaut actuellement 2000 francs. Sa valeur double tous les 3 ans. Quelle sera sa valeur dans 12 ans ? Dans n ans ?

b) Il y a 5 ans, un objet valait 1000 francs. Actuellement, il vaut 3000 francs. Sachant que son prix évolue de manière exponentielle, quel sera son prix dans 12 ans ? Après combien de temps vaudra-t-il $21'000$ francs (au mois près) ?

Exercice 4.15

La valeur en francs d'un équipement informatique est donnée par la formule suivante : $P(t) = 6000 \cdot 0.82^t$, où t représente le nombre d'années écoulées depuis l'achat.

a) Quelle est la valeur d'achat ?

b) Quelle est la valeur après 5 ans ?

c) Après combien de temps cet équipement ne vaut plus que 1000 francs ?

Exercice 4.16

Un biologiste sait que la population canine d'une ville croît selon une fonction exponentielle. Une enquête faite il y a six ans montre qu'il y avait alors 3500 chiens. Aujourd'hui, on sait qu'il y a 5500 chiens. Combien y aura-t-il de chiens dans cette ville dans quatre ans ?

Exercice 4.17

Selon le test effectué en usine, la fonction $f(h) = 101 - e^{0.064 \cdot h}$ représente le pourcentage de téléphones mobiles de la marque Konia 4440, encore en fonction après h heures de veille.

a) Calculer le pourcentage de téléphones fonctionnant après 17 heures de veille.

b) Calculer le pourcentage de téléphones fonctionnant après 2 jours de veille.

c) Après combien d'heures le dernier Konia s'éteint-il ?

Exercice 4.18

a) Quel est le plus grand nombre entre $a = 10^{15000}$ et $b = e^{3454}$?

b) Déterminer la plus grande puissance de 5 qui est inférieure à 6^{1000}.

c) Déterminer le nombre de chiffres du nombre $a = 1234^{456}$.

Exercice 4.19

Un objet a une température de 80 ° C ; on suppose que la température T de l'objet décroît exponentiellement et que sa température est de 50 ° C après 20 minutes.

a) Déterminer la température de l'objet après 50 minutes.

b) Après combien de minutes et de secondes (à la seconde près) la température de l'objet est-elle de 15 ° C ?

Exercice 4.20

La population d'une culture bactérienne double toutes les 12 heures. Supposons que la population initiale est de 10'000 bactéries.

a) Déterminer la relation qui représente la taille de la population N après t heures.

b) Combien y aura-t-il de bactéries après une semaine ?

c) Au bout de combien de temps le nombre de bactéries aura-t-il triplé ?

Exercice 4.21

Un étang contient 1'000 truites. Trois mois plus tard, il n'en reste que 600.

a) A l'aide d'un modèle exponentiel, trouver une formule permettant d'estimer le nombre N de truites restantes après t mois.

b) Combien y aura-t-il de truites dans l'étang après une année ?

c) Après combien de temps y en aura-t-il plus que 80 ?

Exercice 4.22
Un médicament est éliminé du corps par l'urine. Un patient en avale une dose de 10 mg. Une heure plus tard, des mesures montrent qu'il ne reste plus que 8 mg de ce médicament dans son corps.

a) A l'aide d'un modèle exponentiel, trouver une formule permettant d'estimer la quantité Q de médicament encore présente dans le corps du patient après t heures.

b) Donner approximativement la quantité du médicament dans le corps du patient 8 h après l'absorption.

c) Après combien de temps, le patient n'aura plus que 1 mg de ce médicament dans son corps ?

Exercice 4.23
Le taux de dépréciation annuel d'une voiture de valeur initiale CHF 18'000.- est de 25%.

a) Trouver la valeur v de cette voiture après t années.

b) Calculer la valeur de la voiture après 8 ans.

c) Calculer la valeur de la voiture lorsque t devient très grand.

Exercice 4.24
La population d'un pays A était de 80 millions au début de l'année 1985. De 1985 à 1995, la population a augmenté chaque année de 4% de la valeur qu'elle avait au début de chaque année.

a) Déterminer la grandeur (à 0.1 million près) de la population au début de l'année 1995.

b) Avec ce même taux de croissance, au cours de quelle année la population dépassera-t-elle 200 millions ?

Exercice 4.25
Une population de volatiles, dans une région donnée, chute de 10% chaque année relativement à la population du début de l'année.

a) Vérifier que dans 3 ans, la population aura chuté à environ 73% de sa valeur actuelle.

b) Quelle sera la situation dans 7 ans ?

Exercice 4.26

Un pêcheur esquimau tombe dans l'eau dont la température est de 0°C .

La relation $T = 37e^{-0{,}0045t}$ donne la température T de son corps après t minutes.

a) Quelle sera la température de son corps après 30 minutes ?

b) Calculer le temps dont disposent ses amis pour le secourir si l'on sait qu'il s'évanouira lorsque son corps sera à une température de 25°C.

Exercice 4.27

La relation d'Ehrenberg $\ln(m) = \ln(2.4) + 1.84h$ est une formule empirique liant la taille h (en mètres) à la masse moyenne m (en kilogrammes) d'enfants âgés de 5 à 13 ans.

a) Évaluer, à l'aide de cette formule, la taille moyenne d'un enfant de 7 ans qui pèse 21.8 kg.

b) Évaluer, à l'aide de cette formule, la masse moyenne d'un enfant de 8 ans qui mesure 1.5 m.

Exercice 4.28

Dans l'étude de 15 villes ayant une population P allant de 300 à 3'000'000 d'habitants, on a déterminé que la vitesse moyenne v (en m/s) d'un piéton pouvait être donnée approximativement par $v = 0.0151 + 0.258\log(P)$.

a) Selon ce modèle, quel est la vitesse moyenne d'un piéton à Lausanne ($\sim$ 130'000 habitants) ?

b) Évaluer, à l'aide de cette formule, le nombre d'habitants d'une ville dont la vitesse moyenne d'un piéton est de 1.5 m/s (arrondir la réponse à 100 habitants près).

Exercice 4.29

Une courbe logistique est le graphe d'une courbe géométrique du type

$$y = \frac{k}{1 + b \cdot e^{-c \cdot t}} \text{ où } k, b \text{ et } c \text{ sont des constantes positives}$$

La taille d'un arbre est souvent décrite par un modèle logistique.

Supposons que la hauteur h (en mètres) d'un arbre de t années est donnée par la relation

$$h(t) = \frac{40}{1 + 200e^{-0{,}2t}}$$

a) Quelle est la hauteur d'un arbre vieux de 30 ans ?

b) A quel âge l'arbre aura-t-il une hauteur de 16m ?

c) Quelle hauteur maximale l'arbre peut-il atteindre ?

Solutions des exercices

4.1 a) $144x^{18}$; b) $\frac{3}{2}x^{12}$; c) $\frac{3}{2}x^2y$; d) $\frac{3}{4x^3y^2}$; e) $\frac{10a}{b^4}$; f) $-4x^{12}y^7$.

4.2 a) $S = \{2\}$; b) $S = \{-2\}$; c) $S = \{-2; 2\}$; d) $S = \{3\}$; e) $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$; f) $S = \left\{\frac{-1}{2}\right\}$; g) $S = \left\{\frac{-6}{5}\right\}$; h) $S = \{1\}$; i) $S = \{-8\}$

4.3 a) $S = \{-1; 3\}$; b) $S = \{-\frac{1}{2}; 2\}$; c) $S = \{-\frac{4}{99}\}$; d) $S = \{7\}$; e) $S = \{3\}$; f) $S = \emptyset$; g) $S = \{-8\}$; h) $S = \{\frac{3}{2}\}$.

4.4 a) $x = \frac{\log(3451)}{\log(145)} \cong 1.6369$; b) $x \cong 1.9023$; c) $x \cong 20.3178$;
d) $x = \frac{\log(40)}{3 \cdot \log(5)} \cong 0.7640$; e) $x \cong 2.9061$; f) $x \cong 1.3219$

4.5 a) $S = \{6\}$; b) $S = \{\frac{7}{2}\}$; c) $S = \{256\}$; d) $S = \{125\}$; e) $S = \{3\}$; f) $S = \{-2\}$;
g) $S = \{52\}$; h) $S = \{7\}$.

4.6 a) $57'801.75$ francs ; b) 7500 francs ; c) 3.5% ; d) 15 ans

4.7 a) 622.90 francs ; b) $n \cong 4$; c) Le taux est de 10% ; d) $C_0 \cong 14'538.40$ francs

4.8 12 ans

4.9 Si on compare sur une année, $B_1 = 2'180$ CHF, $B_2 \cong 2'186,17$ et $B_3 \cong 2'187,61$. En comparant les taux réels, B_1 offre 9%, B_2 offre 9.31% et B_3 offre 9.38% ce qui est le meilleur taux.

4.10 $\sim 197'382,27$ francs, $201'219,65$ francs, $203'279.41$ francs

4.11 (6.5% , 2)

4.12 18 ans

4.13 a) $N(t) = 2000 \cdot 3^{t/5}$ avec t en heures ; b) $N(24) = 2000 \cdot 3^{4.8} \cong 390'132$ bactéries ; c) $t \cong 21$ heures

4.14 a) $P(n) = 2000 \cdot 2^{\frac{n}{3}}$ avec n en années ; $P(12) = 32'000$; b) $P(12) = 41899.85$; 8 ans 10 mois

4.15 a) $P(0) = 6000$; b) $P(5) \cong 2224$; c) $t \cong 9$ ans

4.16 $C(t) = 3500 \cdot \left(\frac{11}{7}\right)^{\frac{t}{6}}$ avec t en années. Selon ce modèle, il y aura 7434 chiens.

4.17 a) 98.0% ; b) 79.4% ; c) 72.1 heures

4.18 a) $b > a$; b) $5^{1113} < 6^{1000} < 5^{1114}$; c) $1'410$ chiffres

4.19 a) 24.7 ° C ; b) 71 min 14 s

4.20 a) $N = 10'000 \cdot 2^{t/12}$; b) après une semaine, il y aura $1.6384 \cdot 10^8$ bactéries ; c) le nombre de bactéries aura triplé après environ 19 h.

4.21 a) $Q = 1'000 \cdot 0.6^{t/3}$; b) après une année, il y aura environ 129 truites ;
c) il n'y aura plus que 80 truites après environ 14.8 mois.

4.22 a) $N = 10 \cdot 0.8^t$;
b) après 8h, il reste environ 1.67 mg de médicament dans le corps ;
c) il faut attendre 10h, 19min et 7s pour qu'il ne reste plus que 1 mg de médicament dans le corps du patient.

4.23 a) $v = 18'000(1 - 25\%)^t$; b) après 8 ans, la voiture ne vaut plus que CHF $1'802.-$;
c) lorsque t est grand, la voiture ne vaut plus rien.

4.24 a) 118.4 millions ; b) 2008.

4.25 b) La population aura chuté à 47.8% de sa valeur actuelle.

4.26 a) $32.3°$ C

b) Il faut le secourir avant environ 87 min.

4.27 a) Il mesure environ 1.2 m

b) Il pèse environ 37.9 kg

4.28 a) La vitesse moyenne est de 1.3 m/s ;

b) La population doit être d'environ $569'400$ habitants.

4.29 a) Un arbre de 30 ans mesure environ 26.74 m

b) Après 24 ans et demi, l'arbre mesurera 16 m

c) La hauteur maximale qu'un arbre peut atteindre est de 40 m.

Chapitre 5

Annuités

Rappels : Taux nominal, taux périodique, taux réel

Exercice 5.1
On place un capital de 100'000 francs à un taux nominal de 12%. Quelle somme aura-t-on après 6 ans si la capitalisation est annuelle ? semestrielle ? trimestrielle ?

Exercice 5.2
A quel taux nominal capitalisé semestriellement a-t-on placé un capital de 100'000 francs si l'on obtient un capital de 166'817.25 francs après 8 ans ?

Exercice 5.3
Combien de temps faut-il placer un capital initial de 12'000 francs à un taux nominal de 8% capitalisé semestriellement pour obtenir 49'247,20 francs ?

Exercice 5.4
Calculer le taux mensuel équivalent au taux annuel de 12%.

Exercice 5.5
Calculer le taux trimestriel équivalent au taux mensuel de 1%.

Exercice 5.6
Calculer le taux réel correspondant au taux nominal de 8% capitalisé trimestriellement.

Exercice 5.7
On vous propose un prêt avec un intérêt annuel de 12% payable par tranches mensuelles. Quel est en fait le taux réel ?

Annuités de début/fin de période

Exercice 5.8

Vous désirez constituer un capital en déposant 50 francs au début de chaque mois à un taux mensuel de 0.6% et avec une capitalisation mensuelle. Quel est le capital accumulé dans cinq ans ? dans dix ans ? dans quinze ans ?

Exercice 5.9

Quel montant faut-il placer au début de chaque trimestre à un taux nominal de 8% capitalisé trimestriellement pour constituer un capital de 15'000 francs en 10 ans ? Quel est le gain en intérêts ? Quelle est la valeur actuelle de ces annuités ?

Exercice 5.10

Quel est le montant faut-il verser à la fin de chaque mois pour rembourser un emprunt de 6'000 francs en cinq ans, sachant que l'intérêt nominal est de 9% capitalisé mensuellement ? Quel est le coût en intérêts ?

Exercice 5.11

Trouver la valeur après dix ans et la valeur actuelle d'un placement constitué de dix versements au début de chaque année de 1'500 francs chacun, sachant que le taux d'intérêt est de 8% capitalisé annuellement.

Exercice 5.12

Quelle est la valeur du capital constitué par des versements au début de chaque mois de 100 francs pendant quinze ans à un taux nominal de 7.5% capitalisé mensuellement ? Quel est le gain en intérêts ?

Exercice 5.13

Quels versements au début de chaque trimestre devrez-vous effectuer pour constituer un capital de 10'000 francs en dix ans, le taux nominal étant de 8% capitalisé trimestriellement ? Quel est le gain en intérêts ?

Exercice 5.14

Vous devez préparer le contrat de deux clients empruntant chacun 2'000 francs. L'un désire rembourser en deux ans et l'autre en quatre ans. Le taux nominal pour les prêts personnels est de 12% capitalisé mensuellement. Quels sont les versements à la fin de chaque mois que chacun doit effectuer et quel est le coût en intérêts de ces prêts ?

Exercice 5.15
Vous versez 100 francs à la fin de chaque mois pour rembourser une dette. Le taux nominal est de 14.4% capitalisé mensuellement. Déterminer la valeur actuelle de la dette s'il vous reste quatre ans pour la rembourser.

Exercice 5.16
Vous achetez une voiture de 13'500 francs en versant 3'500 francs comptant. Vous empruntez le reste à 12% capitalisé mensuellement. Vous devez rembourser cet emprunt en cinq ans avec des versements mensuels, le premier fois un mois après l'emprunt. Quels sont les versements mensuels et le coût de cet emprunt ?

Exercice 5.17
Vous remboursez actuellement un emprunt par des versements de 80 francs chaque fin de mois. Il vous reste dix ans pour rembourser le tout et vous désirez augmenter le montant des annuités afin de vous acquitter de la dette en cinq ans. Quels seront les nouveaux versements sachant que le taux nominal est de 12% capitalisé mensuellement ?

Exercice 5.18
Vous avez emprunté 50'000.- au taux de 5% que vous devez rembourser en 15 ans. A la fin de la 10ème année, vous convertissez votre emprunt au taux de 4%. L'annuité est alors recalculée. Calculer l'économie annuelle des 5 dernières années.

Taux périodique

Exercice 5.19
On affiche un taux nominal de 6% capitalisé mensuellement. Calculer le taux périodique équivalent pour des versements semestriels.

Exercice 5.20
On affiche un taux nominal de 9% capitalisé semestriellement. Calculer le taux périodique équivalent pour des versements bimensuels.

Exercice 5.21
On affiche un taux nominal de 9% capitalisé mensuellement. Calculer le taux périodique équivalent pour des versements trimestriels.

Exercice 5.22
On affiche un taux nominal de 9% capitalisé six fois par années. Calculer le taux périodique équivalent pour des versements trimestriels.

Exercice 5.23
Vous empruntez 6'000 francs au taux nominal de 12% capitalisé trimestriellement. Quelles sont les mensualités à verser en fin de chaque mois pour s'acquitter de cette dette en trois ans ? Quel sera le coût en intérêts ?

Exercice 5.24
Vous placez 30 francs par semaine à un taux de 7.8% capitalisé annuellement. En considérant que l'année compte 52 semaines, dans combien de temps aurez-vous accumulé le montant de 10'000 francs ?

Exercice 5.25
Quelle est la valeur cumulée et la valeur actuelle d'une suite de remboursement de 75 francs par mois au taux nominal de 9% capitalisé semestriellement, sachant que la durée du contrat est de trois ans ?

Exercice 5.26
Vous placez 100 francs au début de chaque mois à un taux nominal de 7.5% capitalisé trimestriellement pour constituer un capital pour votre retraite dans 25 ans. Quel sera alors le montant accumulé ? Quel sera le gain en intérêts ?

Exercice 5.27
Quel capital peut-on constituer en dix ans en effectuant des versements de 200 francs au début de chaque mois à un taux nominal de 9% capitalisé trimestriellement ? Quel est le gain en intérêts ?

Exercice 5.28
Votre entreprise rembourse actuellement un emprunt en versant 2'000 francs chaque fin de mois. On vous demande d'établir le montant qu'il faudrait verser pour liquider cette dette. Le taux d'intérêt nominal est de 13% capitalisé trimestriellement et il reste dix-huit versements à effectuer.

Solutions des exercices

5.1 $\sim 197'382,27$ francs, $201'219,65$ francs, $203'279.41$ francs

5.2 (6.5% , 2)

5.3 18 ans

5.4 $\cong 0,9489\%$

5.5 $\cong 3,0301\%$

5.6 $\cong 8,2432\%$

5.7 $\cong 12,6825\%$

5.8 Pour cinq ans, $VC_d = 3'619.83$ francs.

Pour dix ans, $VC_d = 8'802.65$ francs.

Pour quinze ans, $VC_d = 16'223.36$ francs.

5.9 A = 243,47 francs. Le montant placé est de 9’738,80 francs.
Le gain en intérêt est de 15’000 - 9’738.80 = 5’261.20 francs. Il faudrait placer 6’793,36 francs aux mêmes conditions de taux pour obtenir un capital de 15’000 francs 10 ans plus tard.

5.10 La valeur cumulée de l’emprunt dans cinq ans vaut $VC_f = 9'394.09$ francs. $A = 124.55$ francs. Le paiement total s’élèvera à = 7’473 francs. Le coût en intérêts sera de 1’473 francs.

5.11 $VC_d = 23'468,23$ francs et $VA_d = 10'870,33$ francs

5.12 $VC_d = 33'318.17$ francs, gain de $15'318.17$ francs

5.13 $A = 162.31$ francs, gain de $3'507.60$ francs

5.14 En deux ans $A = 94.15$ francs, coût de 259.60 francs, en quatre ans $A = 52.67$ francs, coût de 528.16 francs

5.15 $VA_f = 3'632.73$ francs

5.16 $A = 222.44$ francs, coût de $3'346.40$ francs.

5.17 Rép : $VA_f = 5'576.04$ francs, $A = 124.04$ francs

5.18 $A_1 = 4'817.11$ et $A_2 = 4'684.74$. Économie annuelle $= 132.37$ francs

5.19 3,0378%

5.20 0.3675%

5.21 2.267%

5.22 2.258%

5.23 $A = 198.95$ francs, coût de 1'162.20 francs.

5.24 272 semaines, soit 5 ans et 12 semaines

5.25 $VC_f = 3'078.78$ francs, $VA_f = 2'364.19$ francs.

5.26 $VC_d = 87'619.23$ francs, gains de $57'619.23$ francs.

5.27 $VC_d = 38'845.85$ francs, gains de 14'845.85 francs.

5.28 $VA_f = 32'584,75$ francs.