gymnase BURIER

# École de Commerce

# 3ème année

# Analyses Mathématiques

Juin 2022 / HAF

# Table des matières

# Chapitre 1

# Étude du signe

**Exercice 1.1**

Factoriser au maximum :

a) $3x^2 + 15x - 42$

b) $10x^2 - 13x - 3$

c) $4x^2 + 4x + 1$

d) $12x^2 + 15x - 18$

e) $x^2 - 10x + 42$

f) $x^4 - 7x^3 + 6x^2$

g) $x^2 - 81$

h) $3x^2 + 7x + 3$

i) $-8x^3 - 70x^2 - 48x$

j) $81x^2 + 108x + 36$

k) $x^2 + 5x + 4$

l) $30 + x - x^2$

m) $50x^2 + 2 - 20x$

n) $x^5 - 7x^4 - 18x^3$

o) $3x^3 - 15x^2 + 21x$

p) $2x^4 + 6x^3 + 2x^2$

q) $(x-3)^2(2x-5)^6 + (x-3)^3(2x-5)^5$

r) $(x-4)^2(3x+2)^2 - (4-x)^3(3x+2)$

**Exercice 1.2**

Résoudre les équations suivantes à l'aide des méthodes de factorisation :

a) $4x^2 - 8x - 60 = 0$

b) $12x^3 - x^4 - 36x^2 = 0$

c) $x^{10} - 16x^8 = 15x^9$

d) $6x^2 + 11x = 35$

e) $20x^2 - 2x^3 - 50x = 0$

f) $x^3 + 50x^2 + 625x = 0$

g) $(x-4)^3(2x+3)^2 - (x-4)^4(2x+3) = 0$

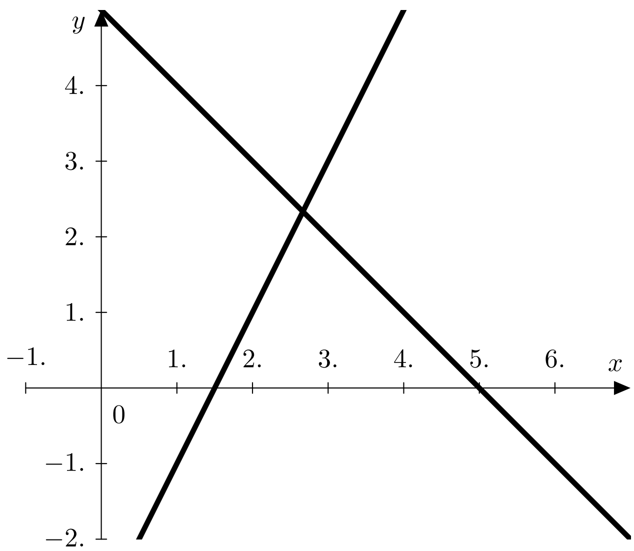
h) $(x-2)^2(2x+3)^3 + (2-x)^3(2x+3)^2 = 0$

**Exercice 1.3**

Étudier le signe des deux fonctions suivantes :

$f(x) = 2x - 3$

$g(x) = -x + 5$

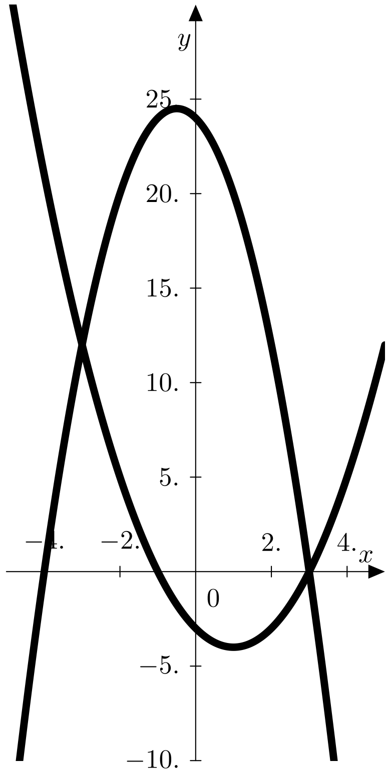


**Exercice 1.4**

Etudier le signe des deux fonctions suivantes :

$f(x) = x^2 - 2x - 3$

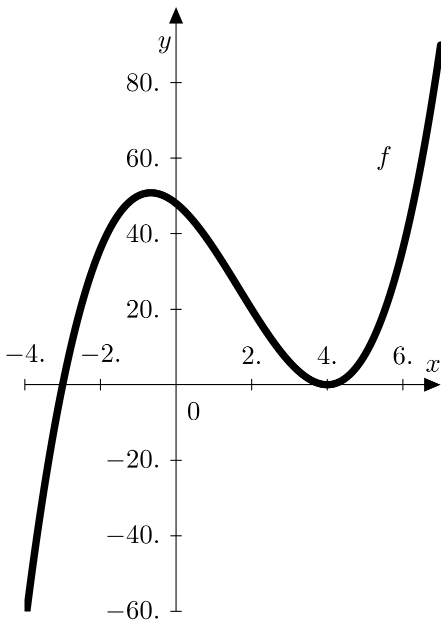
$g(x) = -2x^2 - 2x + 24$




**Exercice 1.5**

Etudier le signe de la fonction suivante :

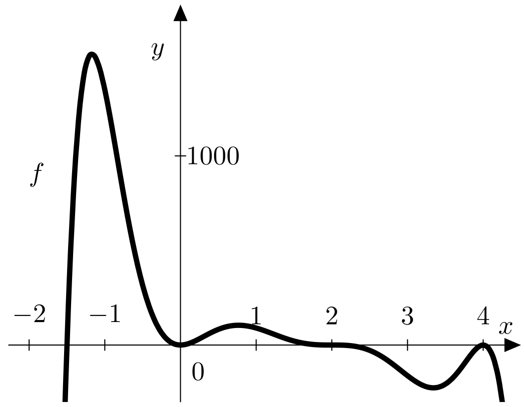
$f(x) = (x + 3)(4 - x)^2$



### Exercice 1.6

Etudier le signe de la fonction suivante :

$f(x) = 2x^2(2x+3)(x-4)^2(2-x)^3$




### Exercice 1.7

Étudier le signe des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3x - 4$

b) $f(x) = -5x + 2$

c) $f(x) = +3$

d) $f(x) = -2$

e) $f(x) = x^2 + 2x - 15$

f) $f(x) = x^2 + 3x + 4$

g) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

h) $f(x) = -x^2 + x + 12$

i) $f(x) = -x^2 + x - 5$

j) $f(x) = -x^2 - 4x - 4$

k) $f(x) = (x-2)(x+3)(x-4)$

l) $f(x) = (2-x)(x+3)^3(x-4)^2$

m) $f(x) = (x-2)^2(x+3)$

n) $f(x) = (x-2)^4(x+3)^2$

o) $f(x) = -(x-2)^2(x+3)^5$

p) $f(x) = (2-x)^2(x+3)^3$

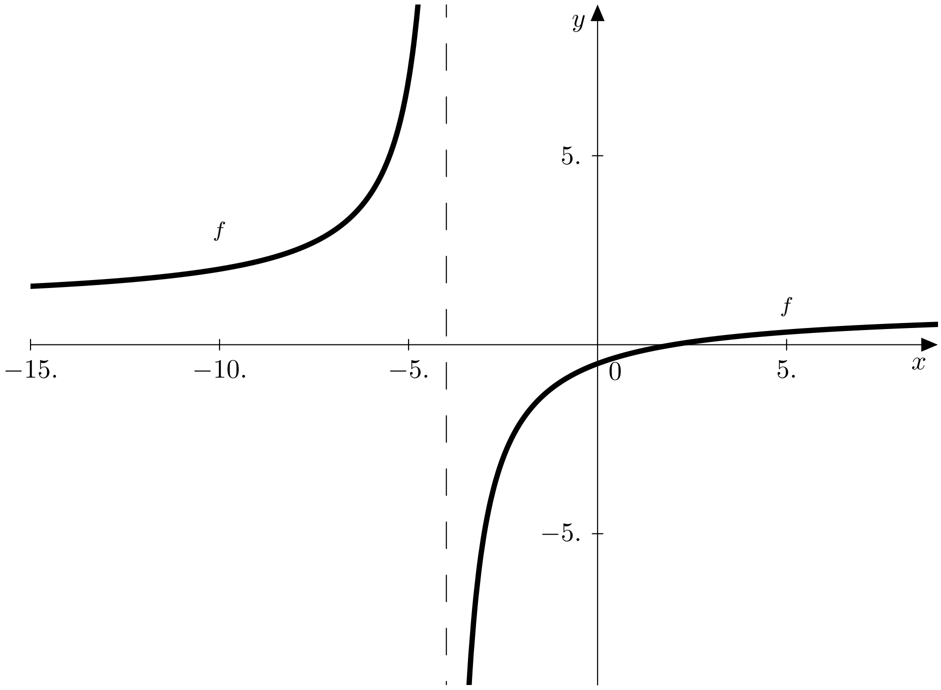
q) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 15x$

r) $f(x) = 3(x-2)(x+4) - 6(x-2)(x+5)$

### Exercice 1.8

Etudier le signe de la fonction suivante :

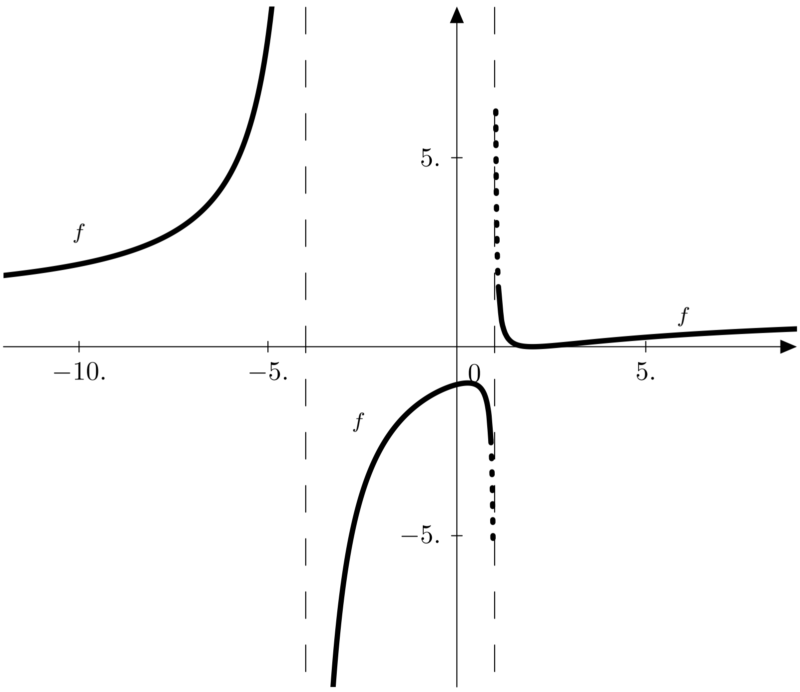
$$f(x) = \frac{x-2}{x+4}$$




### Exercice 1.9

Etudier le signe de la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{(x-1)(x+4)}$$



**Exercice 1.10**

Étudier le signe des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x+4}$

b) $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+2)}{x^2-3x}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-6x+9}{x^2-4}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2-x-12}{x^2+2x}$

e) $f(x) = \dfrac{-2}{x^3}$

f) $f(x) = 5 - \dfrac{125}{x^2}$

g) $f(x) = \dfrac{3}{(x-1)^2}$

h) $f(x) = \dfrac{10x^2-360}{x^2}$

i) $f(x) = \dfrac{x(4x^2-9)^2}{10(x^2-9)}$

j) $f(x) = \dfrac{2x(2x-3)^2}{(x-1)^3}$

k) $f(x) = 375 - \dfrac{150'000}{x^2}$

**Exercice 1.11**

Déterminer l'ensemble de définition et l'expression algébrique d'une fonction dont le signe est donné.

a)

| $x$ | | $-4$ | | $6$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

b)

| $x$ | | $-1$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

c)

| $x$ | | $-4$ | | $0$ | | $7/3$ | | $5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

d)

| $x$ | | $-4$ | | $0$ | | $7/3$ | | $5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ |

e)

| $x$ | | $1$ | | $4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+$ | ‖ | $-$ | ‖ | $+$ |

f)

| $x$ | | $-3$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | ‖ | $-$ | ‖ | $-$ |

g)

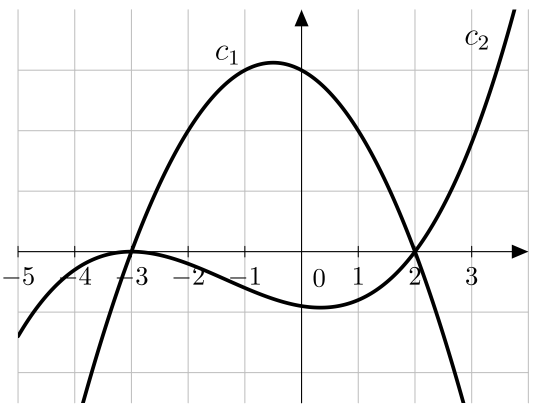
| $x$ | | $-1/5$ | | $2/3$ | | $5/2$ | | $17/4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ |

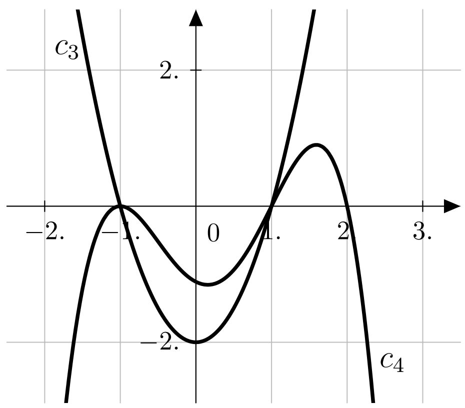
h)

| $x$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $4$ | | $5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | ‖ | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

**Exercice 1.12**

Déterminer une expression algébrique possible pour les fonctions représentées par les courbes $c_1, c_2, c_3$ et $c_4$.



# Solutions des exercices

**1.1**

a) $3(x-2)(x+7)$

b) $(2x-3)(5x+1)$

c) $(2x+1)^2$

d) $3(x+2)(4x-3)$

e) $x^2-10x+42$

car $\Delta$ est négatif.

f) $x^2(x-6)(x-1)$

g) $(x+9)(x-9)$

h) $3x^2+7x+3$

car $\Delta$ n'est pas un carré parfait.

i) $-2x(x+8)(4x+3)$

j) $9(3x+2)^2$

k) $(x+1)(x+4)$

l) $-(x-6)(x+5)$

m) $2(5x-1)^2$

n) $x^3(x+2)(x-9)$

o) $3x(x^2-5x+7)$

car $\Delta$ est négatif.

p) $2x^2(x^2+3x+1)$

car $\Delta$ n'est pas un carré parfait.

q) $(x-3)^2(2x-5)^5(3x-8)$

r) $2(2x-1)(x-4)^2(3x+2)$

**1.2**

a) $S=\{-3\ ;\ 5\}$

b) $S=\{0\ ;\ 6\}$

c) $S=\{-1\ ;\ 0\ ;\ 16\}$

d) $S=\left\{-\dfrac{7}{2}\ ;\ \dfrac{5}{3}\right\}$

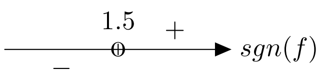
e) $S=\{0\ ;\ 5\}$

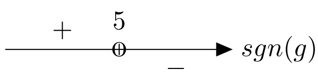
f) $S=\{-25\ ;\ 0\}$

g) $S=\{-7\ ;\ -1,5\ ;\ 4\}$

h) $S=\{-5\ ;\ -1,5\ ;\ 2\}$

**1.3**



**1.4**

| | $-1$ | | $3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $sgn(f)$ |

| | $-4$ | | $3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $sgn(g)$ |

**1.5**

| | $-3$ | | $4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $sgn(f)$ |

**1.6**

| | $-1.5$ | | $0$ | | $2$ | | $4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $sgn(f)$ |

**1.7**

a)

| | $4/3$ | | |
|---|---|---|---|
| $-$ | $0$ | $+$ | $sgn(f)$ |

b)

| | $2/5$ | | |
|---|---|---|---|
| $+$ | $0$ | $-$ | $sgn(f)$ |

c)

| | |
|---|---|
| $+$ | $sgn(f)$ |

d)

| | |
|---|---|
| $-$ | $sgn(f)$ |

e)

| | $-5$ | | $3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $sgn(f)$ |

f)

| | |
|---|---|
| $+$ | $sgn(f)$ |

g)

| | $3$ | | |
|---|---|---|---|
| $+$ | $0$ | $+$ | $sgn(f)$ |

h)

| | $-3$ | | $4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $sgn(f)$ |

i)

| | |
|---|---|
| $-$ | $sgn(f)$ |

j)

| | $-2$ | | |
|---|---|---|---|
| $-$ | $0$ | $-$ | $sgn(f)$ |

k)

| | $-3$ | | $2$ | | $4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $sgn(f)$ |

l)

| | $-3$ | | $2$ | | $4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $sgn(f)$ |

m)

| | $-3$ | | $2$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $sgn(f)$ |

n)

| | $-3$ | | $2$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $sgn(f)$ |

o)

| | $-3$ | | $2$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $sgn(f)$ |

p)

| | $-3$ | | $2$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $sgn(f)$ |

q)

| | $-3$ | | $0$ | | $5/2$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $sgn(f)$ |

r)

| | $-6$ | | $2$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $sgn(f)$ |

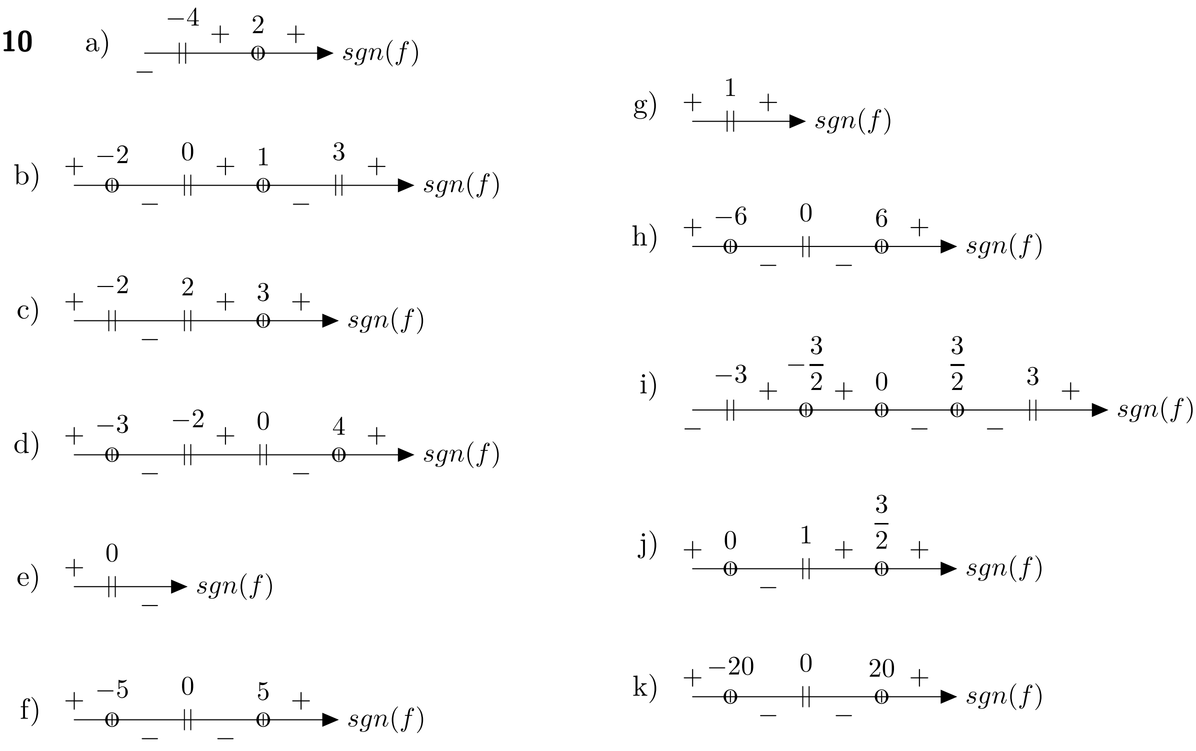
**1.8**

| | $-4$ | | $2$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $+$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | $sgn(f)$ |

**1.9**

| | $-4$ | | $1$ | | $2$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $+$ | $\|\|$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $+$ | $sgn(f)$ |

**1.10**




**1.11** a) $ED(f) = \mathbb{R}$ $\quad f(x) = -(x-6)(x+4)^2 = (6-x)(x+4)^2$

b) $ED(f) = \mathbb{R}$ $\quad f(x) = -(x-1)(x+1) = -(x^2-1) = 1 - x^2$

c) $ED(f) = \mathbb{R}^*$ $\quad f(x) = -\dfrac{(3x-7)(x-5)(x+4)}{x^2} = \dfrac{(3x-7)(5-x)(x+4)}{x^2}$

d) $ED(g) = \mathbb{R} - \{-4, 7/3, 5\}$ $\quad f(x) = \dfrac{x^2}{(3x-7)(x-5)(x+4)}$

e) $ED(f) = \mathbb{R} - \{1, 4\}$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{(x-4)(x-1)}$

f) $ED(g) = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$ $\quad f(x) = \dfrac{-1}{(x+3)^2(x-3)^2}$

g) $ED(g) = \mathbb{R} - \{-1/5, 17/4\}$ $\quad f(x) = -\dfrac{(3x-2)(2x-5)^2}{(5x+1)^2(4x-17)^2} = \dfrac{(2-3x)(2x-5)^2}{(5x+1)^2(4x-17)^2}$

h) $ED(g) = \mathbb{R} - \{1, 2\}$ $\quad f(x) = \dfrac{(x-3)^2(x-4)^2(x-5)}{(x-1)(x-2)}$

**1.12** $c_1(x) = -(x+3)(x-2)$

$c_2(x) = (x+3)^2(x-2)$

$c_3(x) = -2(x+1)(x-1)$

$c_4(x) = (x+1)^2(x-1)(x-2)$

# Chapitre 2

# Dérivées - Croissance

## Techniques de dérivation

### Dérivée d'une somme : $u+v$

**Exercice 2.1**
Donner la dérivée de chacune des fonctions ci-dessous sous la forme d'une somme de termes.

a) $f(x) = 2\,x^2 + 3\,x - 5$

b) $f(x) = 1 - x^2 - x$

c) $f(x) = x^5 - x^3$

d) $f(x) = 20\,x^3 - 50\,x^2 + 30\,x$

e) $f(x) = x^{10} - x^8 + x^6 - x^4 + x^2$

f) $f(x) = \pi + 3500$

g) $f(x) = \dfrac{1}{2}\,x^2 + \dfrac{3}{4}\,x + \dfrac{4}{5}$

h) $f(x) = \frac{1}{5}\,x^5 + \frac{1}{4}\,x^4 + \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{2}\,x^2 + x + 1$

i) $f(x) = -x^{17} + x^{13}$

j) $f(x) = (x-1)(x+1)$

k) $f(x) = (x-3)(x+2)$

l) $f(x) = x^4 + x^3$

m) $f(x) = 4\,x^3 + 2\,x^2 + 7\,x + 5$

n) $f(x) = \dfrac{1}{2}\,x^3 + 4\,x - \dfrac{3}{4}$

o) $f(x) = \sqrt{3}\,x + \pi$

p) $f(x) = 6\,x^4 - 2\,x^3 + x^2 - 9\,x + 5$

q) $f(x) = x^{103} + 2\,x^{57} - 5\,x^4 + 4$

r) $f(x) = (4\,x - 11)\,(x^2 + x + 7)$

s) $f(x) = (5\,x + 3)\,(x^3 + 5)$

t) $f(x) = (x^2 + 7\,x)\,(3\,x^2 - x - 3)$

u) $f(x) = (x + \sqrt{5})\,(x^2 + 2)$

v) $f(x) = (3\,x^2 + 4)\,(2\,x - 7)$

## Dérivée d'une puissance : $u^n$

### Exercice 2.2

Donner la dérivée des fonctions suivantes sous la forme d'un produit de facteurs :

a) $f(x) = (x + 2)^5$

b) $f(x) = (1 - x)^7$

c) $f(x) = (x^2 + 3\,x + 2)^5$

d) $f(x) = (x^3 - 1)^3$

e) $f(x) = 3\,(x^2 + x)^9$

f) $f(x) = 5\,((x^2 - 1) \cdot 2)^7$

## Dérivée d'un produit : $u \cdot v$

### Exercice 2.3

Donner la dérivée de chacune des fonctions ci-dessous en utilisant la règle du produit (simplifications pas demandées).

a) $f(x) = -(x^2 + 3\,x + 2)(x^3 + x^2 - 1)$

b) $f(x) = -(x^2 - 1)(x^4 + 2)$

c) $f(x) = (x^5 + x^3 - 2)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

d) $f(x) = (12 - x^2 - x^4)(x^7 - x^3 - 13)$

e) $f(x) = 5 \cdot (x^3 - 3\,x^2 + 2\,x + 2)$

f) $f(x) = (x^7 - 3\,x^3 + 2\,x^2) \cdot \dfrac{1}{2}$

g) $f(x) = 3 \cdot (x^5 - x^4) \cdot 4$

h) $f(x) = 11 \cdot (x^2 - x^3 - x^5)$

### Exercice 2.4

Calculer les dérivées des fonctions ci-dessous en utilisant la règle du produit (réponse sous forme factorisée).

a) $f(x) = (2x+1)(3x-2)$

b) $f(x) = x(x^2+1)^2$

c) $f(x) = (x+3)(x-1)^3$

d) $f(x) = x^4(2-3x)^2$

e) $f(x) = (x-1)^2(2x+1)^3$

f) $f(x) = (x-3)^3(x^2-4)^2$

# Dérivée d'une fraction : $u/v$

## Exercice 2.5

Donner la dérivée de chacune des fonctions ci-dessous.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

b) $f(x) = \frac{x+1}{x}$

c) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

d) $f(x) = -\frac{2\,x+1}{x-1}$

e) $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$

f) $f(x) = \frac{x^2+2\,x+1}{x^2+5\,x+6}$

g) $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$

h) $f(x) = \frac{15}{1-x^3}$

i) $f(x) = -\frac{11}{x^2}$

j) $f(x) = \frac{7}{x^3+1}$

k) $f(x) = -\frac{3}{5\,x+4}$

l) $f(x) = -\frac{\pi}{x+\sqrt{2}}$

## Exercice 2.6

Donner la dérivée de chacune des fonctions ci-dessous.

a) $f(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3} + 41$

b) $f(x) = \frac{6}{x-5}$

c) $f(x) = \frac{7\,x+1}{2\,x-3}$

d) $f(x) = \frac{x^2+3}{2\,x+7}$

e) $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$

f) $f(x) = x+3+\frac{x+3}{6\,x-3}$

g) $f(x) = \frac{3\,x^2+6}{2\,x^3-1}$

h) $f(x) = \frac{1}{x^5+4\,x^4-11\,x^3+12}$

**Exercice 2.7**

Calculer les dérivées suivantes : (réponses factorisées pour les *)

a) $(3x^3 + 2x^2 + x)'$

b) $\left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - x^2 + x - 5\right)'$

c) $\left(\frac{x^2}{16} - \frac{5x}{4} + \frac{7}{6}\right)'$

d) $\left(\frac{5x^3 + 9x}{2}\right)'$

e) $\left(-\frac{1}{x^5}\right)'$

f) * $((3x-4)^5)'$

g) * $((x^2+4x-5)^3)'$

h) * $\left(\frac{1}{(x-9)^3}\right)'$

i) * $\left(\frac{2-3x}{2x-1}\right)'$

j) * $\left(\frac{x^2+7x+10}{x+1}\right)'$

k) * $\left(\frac{x^2+9x+18}{x+2}\right)'$

l) * $(-x^3(x-5)^2)'$

m) * $((2x+3)^3(x-2)^2)'$

n) * $\left(\frac{(x^2-9)^3}{(x-2)^2}\right)'$

**Exercice 2.8**

Calculer les dérivées suivantes : (réponses factorisées pour les *)

a) $(200)'$

b) $\left(\frac{2x^3 - 5x^2 + 4x}{6}\right)'$

c) $\left(\frac{3}{2x^3}\right)'$

d) * $((16-x^2)^3)'$

e) * $\left(\frac{4x}{(x+1)^2}\right)'$

f) * $((2x-7)(x+2)^3)'$

g) * $\left(\frac{60-12x}{(3-x)^2}\right)'$

h) * $\left(\frac{1}{(4x^2-1)^4}\right)'$

i) * $\left(\frac{x^4}{(2x+3)^2}\right)'$

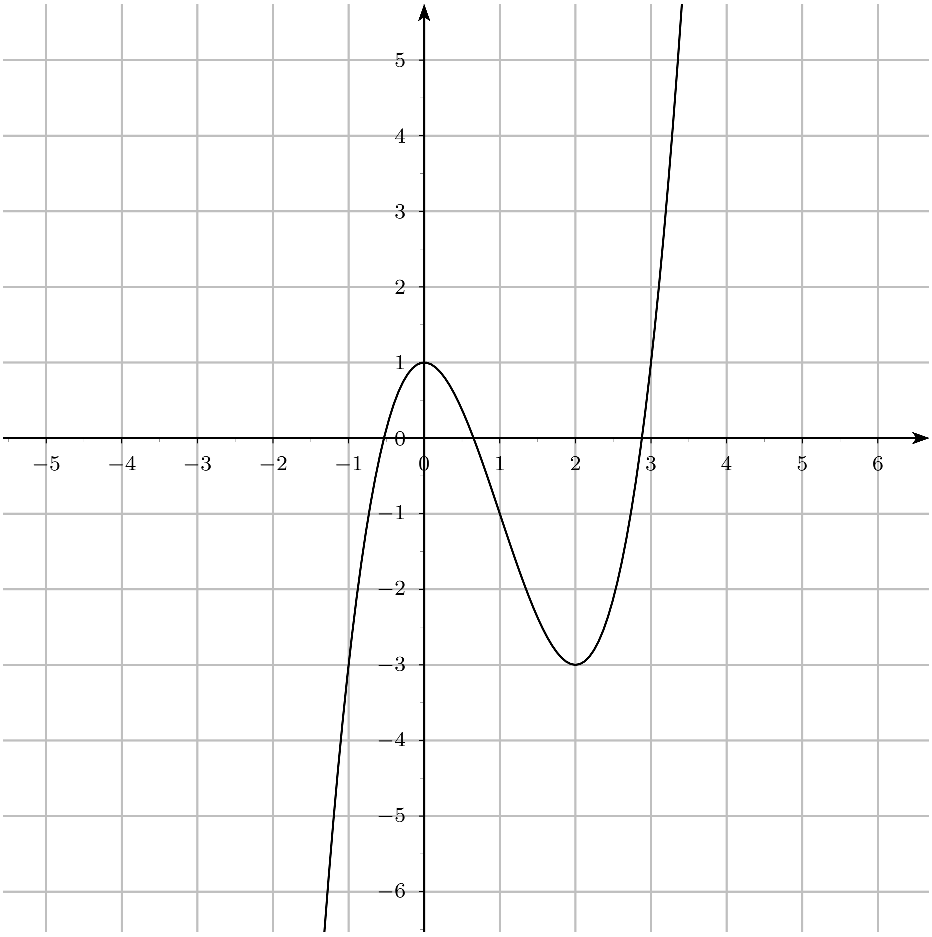
j) * $\left(\frac{(2x-5)^3}{(1-x)^3}\right)'$

# Croissance

## Exercice 2.9

On a tracé ci-dessous une partie du graphe de la fonction

$$f(x) = x^3 - 3\,x^2 + 1$$




a) A partir du graphe, étudier la croissance de la fonction.

b) Calculer la dérivée de la fonction et donner le tableau des signes de la dérivée. Vérifier les calculs à l'aide de la question a).

## Exercice 2.10

A l'aide d'un tableau de valeurs, esquisser la fonction donnée par l'expression

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

La fonction admet-elle des extremums locaux ? Justifier.

**Exercice 2.11**
Étudier la croissance de la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

**Exercice 2.12**
Étudie la croissance de la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{3\,x-1}{x+2}$$

**Exercice 2.13**
Étudier le signe et la croissance de la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{(x-2)^3}$$

**Exercice 2.14**
Étudier le signe et la croissance de la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{(x+2)^3}{(x-1)^3}$$

**Exercice 2.15**
Étudier la croissance de la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^2+2\,x+1}$$

**Exercice 2.16**
Étudier la croissance de la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-3}$$

**Exercice 2.17**
On considère la fonction $f$ définie par

$$f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-1}$$

a) Donner l'ensemble de définition de $f$.

b) Étudier son signe.

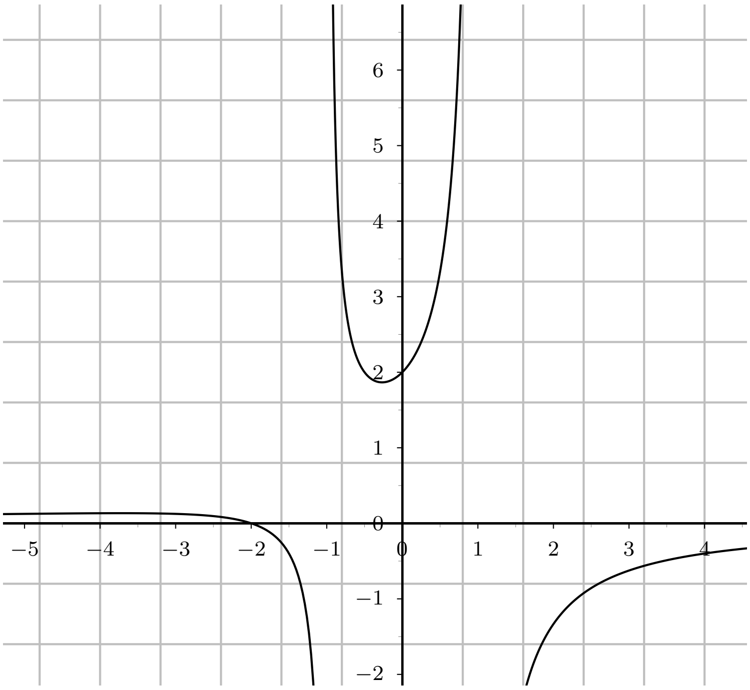
c) Étudier la croissance de cette fonction.

d) Esquisser son graphe.

**Exercice 2.18**

On a tracé ci-dessous une partie du graphe de la fonction

$$f(x) = \frac{x+2}{1-x^2}$$




a) A partir du graphe, étudier la croissance de la fonction.

b) Calculer la dérivée de la fonction et donner le tableau des signes de la dérivée. Vérifier les calculs à l'aide de la question a).

**Exercice 2.19**

Soit $f$ la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{x^3}{4\,x^2 + 4\,x - 15}$$

a) Donner l'ensemble de définition de $f$.

b) Étudier son signe.

c) Étudier la croissance de cette fonction.

d) Esquisser son graphe.

# Solutions des exercices

## 2.1

a) $f'(x) = 4\,x + 3$

b) $f'(x) = -2\,x - 1$

c) $f'(x) = 5\,x^4 - 3\,x^2$

d) $f'(x) = 60\,x^2 - 100\,x + 30$

e) $f'(x) = 10\,x^9 - 8\,x^7 + 6\,x^5 - 4\,x^3 + 2\,x$

f) $f'(x) = 0$

g) $f'(x) = x + \frac{3}{4}$

h) $f'(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

i) $f'(x) = -17\,x^{16} + 13\,x^{12}$

j) $f'(x) = 2\,x$

k) $f'(x) = 2\,x - 1$

l) $f'(x) = 4\,x^3 + 3x^2$

m) $f'(x) = 12\,x^2 + 4\,x + 7$

n) $f'(x) = \dfrac{3}{2}\,x^2 + 4$

o) $f'(x) = \sqrt{3}$

p) $f'(x) = 24\,x^3 - 6\,x^2 + 2\,x - 9$

q) $f'(x) = 103\,x^{102} + 114\,x^{56} - 20\,x^3$

r) $f'(x) = 12\,x^2 - 14\,x + 17$

s) $f'(x) = 20\,x^3 + 9\,x^2 + 25$

t) $f'(x) = 12\,x^3 + 60\,x^2 - 20\,x - 21$

u) $f'(x) = 3\,x^2 + 2\,\sqrt{5}\,x + 2$

v) $f'(x) = 18\,x^2 - 42\,x + 8$

## 2.2

a) $f'(x) = 5\,(x+2)^4$

b) $f'(x) = -7\,(1-x)^6$

c) $f'(x) = 5\,(2\,x+3)(x+2)^4(x+1)^4$

d) $f'(x) = 9\,x^2(x-1)^2\big(x^2+x+1\big)^2$

e) $f'(x) = 27\,(2\,x+1)x^8(x+1)^8$

f) $f'(x) = 8960\,x\,(x-1)^6(x+1)^6$

**2.3** a) $f'(x) = -(2\,x+3)(x^3+x^2-1) - (x^2+3\,x+2)(3\,x^2+2\,x)$

b) $f'(x) = -2x\ (x^4+2) - 4x^3\ (x^2-1)$

c) $f'(x) = (5\,x^4+3\,x^2)(x^4+x^3+x^2+x+1) + (x^5+x^3-2)(4\,x^3+3\,x^2+2\,x+1)$

d) $f'(x) = (-4x^3-2x)\,(x^7-x^3-13) + (7\,x^6-3\,x^2)(-x^4-x^2+12)$

e) $f'(x) = 5\cdot(3\,x^2-6\,x+2) = 15\,x^2-30\,x+10$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{2}\cdot(7\,x^6-9\,x^2+4\,x) = \dfrac{7}{2}\,x^6-\dfrac{9}{2}\,x^2+2\,x$

g) $f'(x) = 3\cdot(5\,x^4-4\,x^3)\cdot 4 = 60\,x^4-48\,x^3$

h) $f'(x) = 11\cdot(-5\,x^4-3\,x^2+2\,x) = -55\,x^4-33\,x^2+22\,x$

**2.4**

a) $f'(x) = 12x-1$

b) $f'(x) = (x^2+1)(5x^2+1)$

c) $f'(x) = 4(x-1)^2(x+2)$

d) $f'(x) = 2x^3(2-3x)(4-9x)$

e) $f'(x) = 2(x-1)(2x+1)^2(5x-2)$

f) $f'(x) = (x-3)^2(x+2)(x-2)(7x^2-12x-12)$

**2.5**

a) $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$

c) $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

d) $f'(x) = \dfrac{3}{(x-1)^2}$

e) $f'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$

f) $f'(x) = \dfrac{(x+1)(3\,x+7)}{(x+2)^2(x+3)^2}$

g) $f'(x) = \dfrac{-6\,x}{(x^2+1)^2}$

h) $f'(x) = \dfrac{45\,x^2}{(x^3-1)^2}$

i) $f'(x) = \dfrac{22}{x^3}$

j) $f'(x) = \dfrac{-21\,x^2}{(x^3+1)^2}$

k) $f'(x) = \dfrac{15}{(5\,x+4)^2}$

l) $f'(x) = \dfrac{\pi}{\left(x+\sqrt{2}\right)^2}$

**2.6**

a) $f'(x) = -\dfrac{4}{x^3} - \dfrac{15}{x^4}$

b) $f'(x) = \dfrac{6}{(x-5)^2}$

c) $f'(x) = -\dfrac{23}{(2\,x-3)^2}$

d) $f'(x) = \dfrac{2\,x^2+14\,x-6}{(2\,x+7)^2}$

e) $f'(x) = \dfrac{(2\,x+3)x^2}{(x+1)^2}$

f) $f'(x) = 1 - \dfrac{7}{3\,(2\,x-1)^2}$

g) $f'(x) = \dfrac{-6\,x\,(x^3+6\,x+1)}{(2\,x^3-1)^2}$

h) $f'(x) = -\dfrac{5\,x^4+16\,x^3-33\,x^2}{(x^5+4\,x^4-11\,x^3+12)^2}$

**2.7**

a) $9x^2+4x+1$

b) $x^4-2x^3+2x^2-2x+1$

c) $\dfrac{x}{8}-\dfrac{5}{4}$

d) $\dfrac{15x^2+9}{2}$

e) $\dfrac{5}{x^6}$

f) $15(3x-4)^4$

g) $3(2x+4)(x^2+4x-5)^2$
$= 6(x+2)(x+5)^2(x-1)^2$

h) $\dfrac{-3}{(x-9)^4}$

i) $\dfrac{-1}{(2x-1)^2}$

j) $\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$

k) $\dfrac{x(x+4)}{(x+2)^2}$

l) $-5x^2(x-3)(x-5)$

m) $2(2x+3)^2(x-2)(5x-3)$

n) $\dfrac{2(x^2-9)^2(2x^2-6x+9)}{(x-2)^3}$
$= \dfrac{2(x+3)^2(x-3)^2(2x^2-6x+9)}{(x-2)^3}$

**2.8**

a) $0$

b) $x^2-\dfrac{5}{3}x+\dfrac{2}{3}$

c) $\dfrac{-9}{2x^4}$

d) $-6x(16-x^2)^2 = -6x(x+4)^2(4-x)^2$

e) $\dfrac{4(1-x)}{(x+1)^3}$

f) $(x+2)^2(8x-17)$

g) $\dfrac{-12(x-7)}{(3-x)^3}$

h) $\dfrac{-32x}{(2x+1)^5(2x-1)^5}$

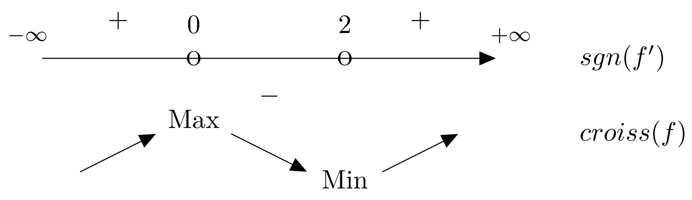
i) $\dfrac{4x^3(x+3)}{(2x+3)^3}$

j) $\dfrac{-9(2x-5)^2}{(1-x)^4}$

**2.9** La dérivée de $f$ s'écrit

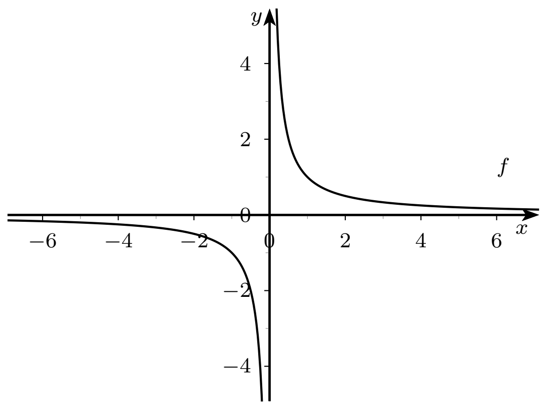
$$f'(x) = 3\,(x-2)\,x = 3\,x^2 - 6\,x$$

On a $ED_{f'} = \mathbb{R}$. Les zéros de $f'$ sont $x = 0$ et $x = 2$.




On a donc un maximum en $(0; f(0)) = (0; 1)$ et un minimum en $(2; f(2)) = (2; -3)$.

**2.10**



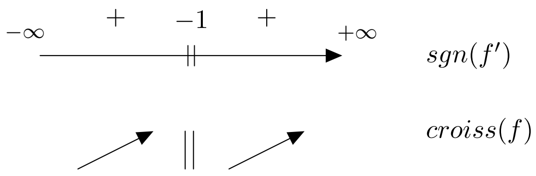

La fonction n'a pas d'extremum local car $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ n'a pas de zéro.

**2.11** La dérivée de $f$ s'écrit

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$

On a $ED_{f'} = \mathbb{R} - \{-1\}$.

La dérivée n'a pas de zéro : $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{2}{(x+1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 = 0$



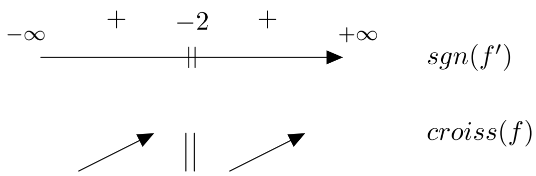

La dérivée ne change pas de signe. La fonction est toujours croissante, vu que ce signe est positif.

**2.12** La dérivée de $f$ s'écrit

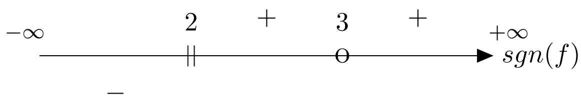
$$f'(x) = \frac{7}{(x+2)^2}$$

On a $ED_{f'} = \mathbb{R} - \{-2\}$.

La dérivée n'a pas de zéro : $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7}{(x+2)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 7 = 0$

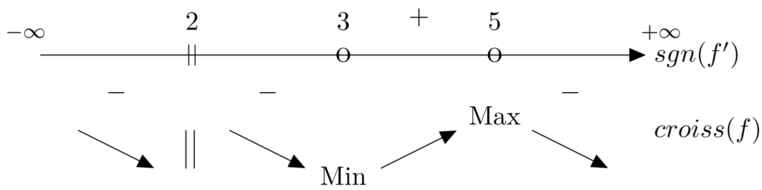



**2.13**



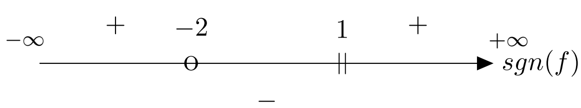

$$f'(x) = \frac{(x-3)(5-x)}{(x-2)^4}$$

$ED_{f'} = \mathbb{R} - \{2\}$ et $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 3 \quad , \quad x_2 = 5$




Minimum en $(3; 0)$ et maximum en $\left(5; \frac{4}{27}\right)$.

**2.14**



$$f'(x) = \frac{-9(x+2)^2}{(x-1)^4}$$

$ED_{f'} = \mathbb{R} - \{1\}$ et $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $sgn(f')$ | | $-$ | 0 | $-$ | $\|\|$ | $-$ | |
| $croiss(f)$ | | $\searrow$ | Palier | $\searrow$ | $\|\|$ | $\searrow$ | |

Palier en $(-2; 0)$.

## 2.15

$$f'(x) = \frac{x+3}{(x+1)^3}$$

$ED_{f'} = \mathbb{R} - \{-1\}$ et $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3$

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $sgn(f')$ | | $+$ | 0 | $-$ | $\|\|$ | $+$ | |
| $croiss(f)$ | | $\nearrow$ | Max | $\searrow$ | $\|\|$ | $\nearrow$ | |

Max en $(-3; 5/4)$.

## 2.16

$$f'(x) = \frac{x^2 - 6\,x + 1}{(x-3)^2}$$

On a $ED_{f'} = \mathbb{R} - \{3\}$. Les zéros de $f'$ sont $x_1 = -2\sqrt{2} + 3 \simeq 0.17$ et $x_2 = 2\sqrt{2} + 3 \simeq 5.83$.

| $x$ | $-\infty$ | | $\sim 0.17$ | | $3$ | | $\sim 5.83$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $sgn(f')$ | | $+$ | 0 | $-$ | $\|\|$ | $-$ | 0 | $+$ | |
| $croiss(f)$ | | $\nearrow$ | Max | $\searrow$ | $\|\|$ | $\searrow$ | Min | $\nearrow$ | |

Maximum en $\sim (0.17; 0.34)$ et minimum en $\sim (5.83; 11.66)$.

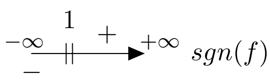
**2.17**

a) $ED_f = \mathbb{R} - \{1\}$

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$

On constate que $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, ce qui implique que $f$ n'a pas de zéros.

La fonction ne peut donc changer de signe qu'au voisinage de l'abscisse $x = 1$.




c)

$$f'(x) = \frac{(x^2 - x + 1)' \cdot (x-1) - (x^2 - x + 1) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(2\,x - 1) \cdot (x-1) - (x^2 - x + 1) \cdot 1}{(x-1)^2}$$

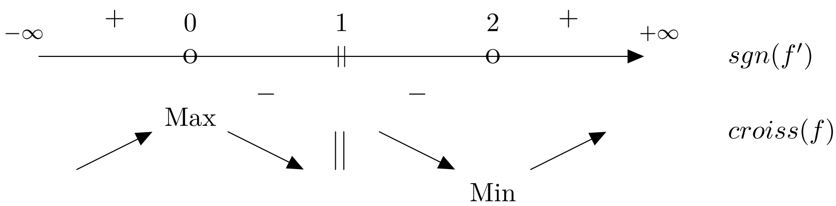
$$= \frac{2\,x^2 - 3\,x + 1 - x^2 + x - 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2\,x}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x\,(x-2)}{(x-1)^2}$$

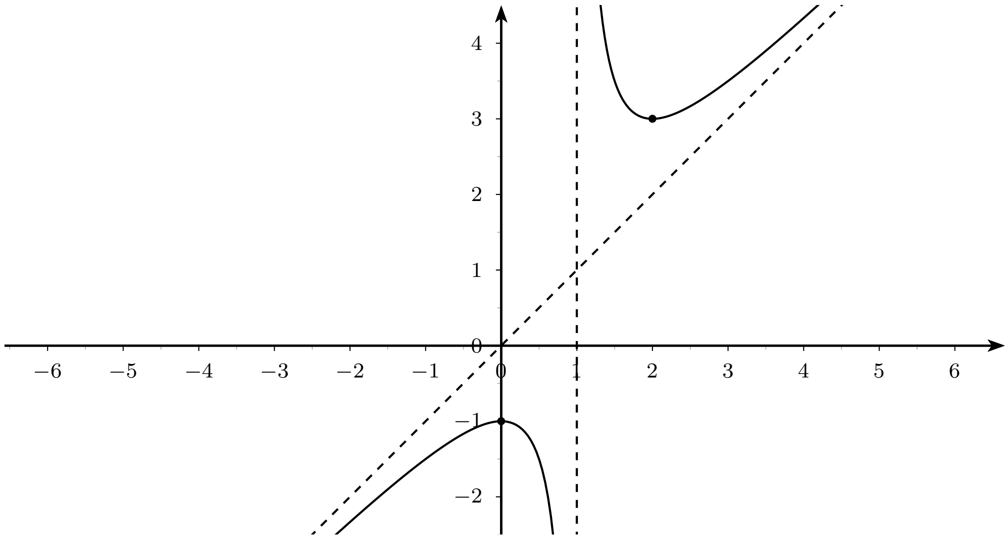
On voit que $ED_{f'} = \mathbb{R} - \{1\} = ED_f$ et que

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \quad \text{et} \quad x_2 = 2$$




Maximum local en $(0; -1)$ et minimum local en $(2; 3)$.

d) Le graphe de $f$ se présente comme suit :




**2.18**

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4\,x + 1}{(x+1)^2 (x-1)^2}$$

On a $ED_{f'} = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$.
Les zéros de $f'$ sont $x = -\sqrt{3} - 2 \simeq -3.732$ et $x = \sqrt{3} - 2 \simeq -0.268$.

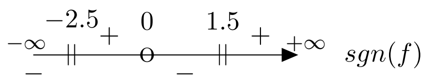
| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-\infty$ | | $\sim 3.73$ | | $-1$ | | $\sim -0.27$ | | $1$ | | $+\infty$ | |
| | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $+$ | | $sgn(f')$ |
| | $\nearrow$ | Max | $\searrow$ | $\Vert$ | $\searrow$ | Min | $\nearrow$ | $\Vert$ | $\nearrow$ | | $croiss(f)$ |

Maximum local en $\sim (-3.732, 0.134)$ et minimum local en $\sim (-0.268, 1.866)$.

**2.19**

a) $ED_f = \mathbb{R} - \{-5/2; 3/2\}$

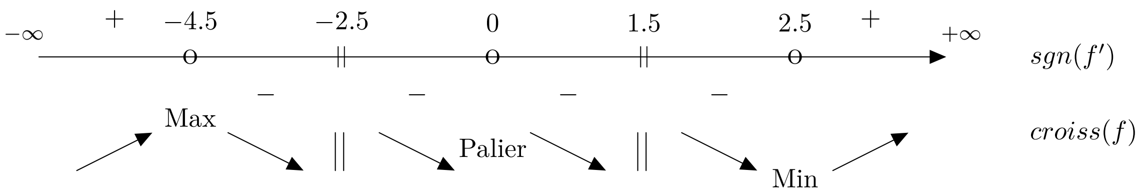
b)




c)

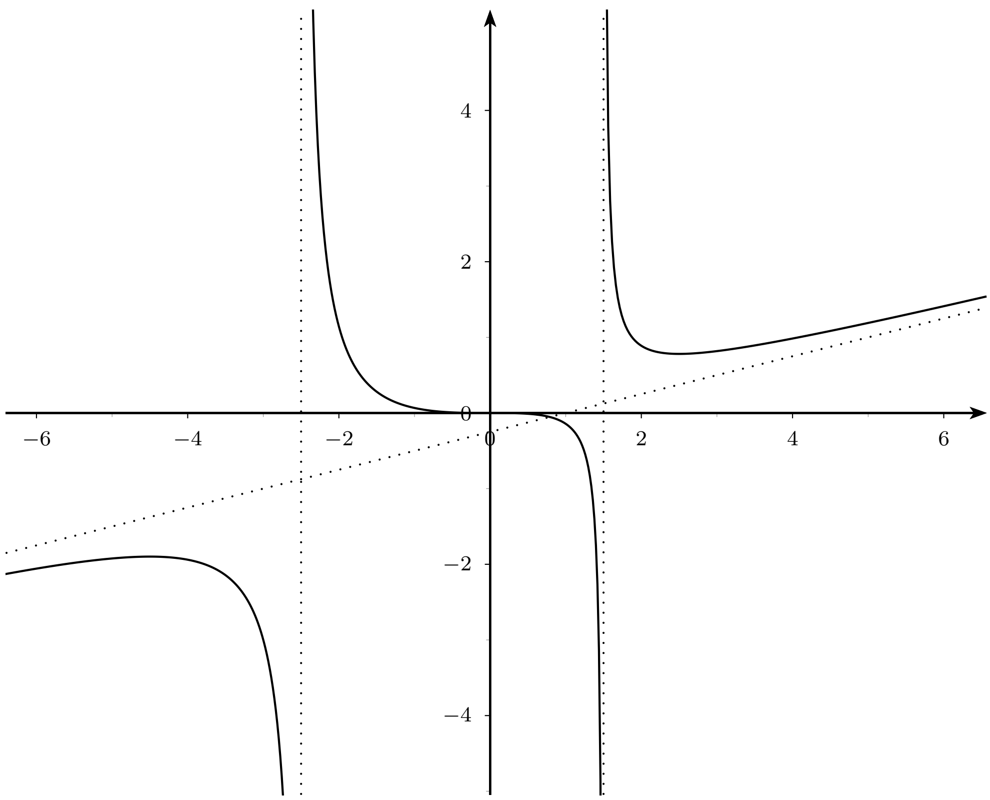
$$f'(x) = \frac{(2\,x+9)\,(2\,x-5)\,x^2}{(2\,x+5)^2\,(2\,x-3)^2}$$

On a $ED_{f'} = \mathbb{R} - \{-5/2; 3/2\}$. Les zéros de $f'$ sont $x_1 = -9/2$, $x_2 = 5/2$ et $x_3 = 0$.




Maximum local en $\sim(-4.5; -1.9)$ , palier en $(0; 0)$ et minimum local en $\sim(2.5; 0.78)$.

d)



# Chapitre 3

# Optimisation

**Exercice 3.1**

Dans les combles d'un galetas, on veut réaliser une fenêtre de toit rectangulaire dont la surface doit être de 8 $m^2$.

Le prix total de cette fenêtre de toit est composé des deux éléments suivants :

- Le prix de la fenêtre (vitre et cadre) qui est de 50 francs par mètre carré

- le prix d'installation et de finition de la fenêtre qui est proportionnel au périmètre de la fenêtre et qui revient à 100 francs par mètre de périmètre.

a) Prouver que si l'on note $x$ la largeur de la fenêtre de toit, le prix $P$ total est donné en fonction de $x$ par

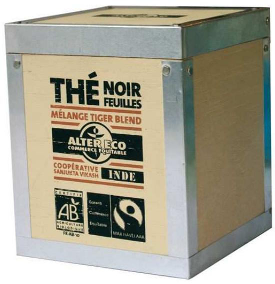
$$P(x) = \frac{200x^2 + 400x + 1600}{x}$$

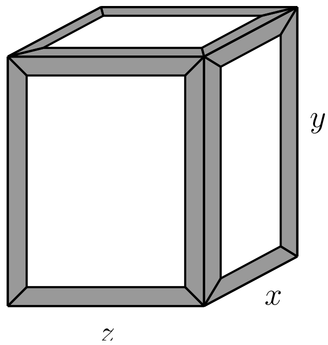
b) Déterminer, en les donnant au millimmètre près, les dimensions de la fenêtre de toit qui minimisent son prix total $P$. Justifier à l'aide d'un tableau de croissance.

c) Calculer le prix total minimal.

**Exercice 3.2**

Une entreprise est chargée de construire des boîtes rectangulaires avec couvercle, destinées à contenir du thé en vrac. L'ingénieur en charge du projet, s'inspirant de la photographie ci-dessous à gauche, opte pour le modèle dessiné à droite. Il doit tenir compte des trois contraintes de construction suivantes :




- la profondeur $x$ de la boîte vaut la moitié de sa hauteur $y$ ;
- tous les bords de la boîte sont renforcés avec un profil métallique ; il n'y a qu'un seul profil par arête ;
- on dispose de 108 cm de profil métallique par boîte.

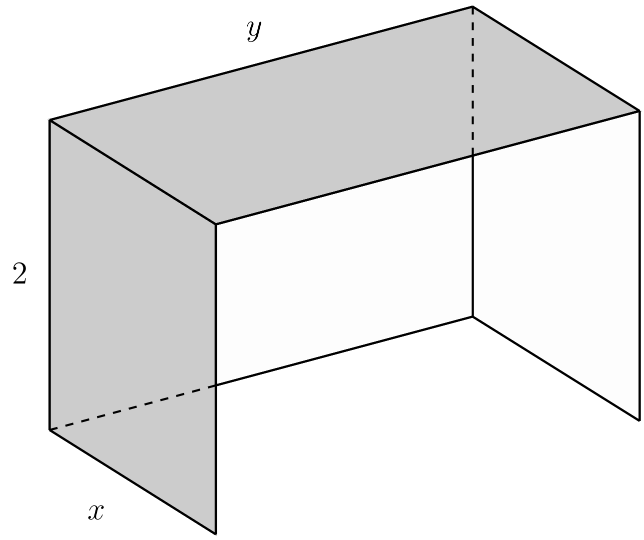
a) Montrer que le volume de la boîte est donné par la formule

$$V(x) = 54x^2 - 6x^3$$

b) Pour quelles dimensions la boîte a-t-elle un volume maximal ?

**Exercice 3.3**

On veut construire un abri de bus en plexiglas ayant la forme d'un parallélépipède rectangle (voir la figure ci-dessous). Cet abri doit avoir un volume de 16 $m^3$ et une hauteur de 2 m. Quelles dimensions lui donner pour utiliser la plus petite surface possible de plexiglas ?



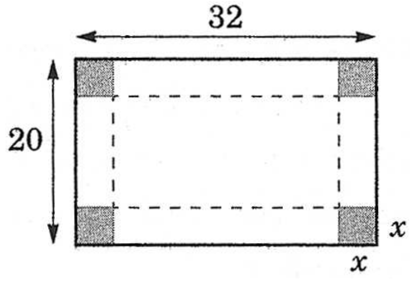

*On négligera l'épaisseur des plaques de plexiglas.*

**Exercice 3.4**

Parmi tous les rectangles dont le périmètre est égal à 4 m, quel est celui qui a la plus grande surface ?

**Exercice 3.5**

On construit une boîte rectangulaire sans couvercle en découpant quatre carrés aux coins d'une feuille de carton mesurant 32 cm sur 20 cm et en relevant ensuite les rectangles latéraux. Quelle doit être la dimension du carré enlevé pour obtenir la boîte de volume maximal ?

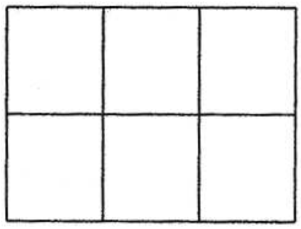


**Exercice 3.6**

On construit un conteneur de forme cylindrique sans couvercle de volume $324\pi$ cm$^3$. Le matériau utilisé pour le fond coûte 15 centimes par cm$^2$ et celui utilisé pour la paroi latérale 5 centimes par cm$^2$. Si la fabrication ne donne lieu à aucun déchet, quelles sont les dimensions du conteneur le plus économique ?

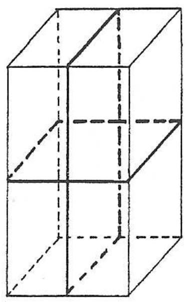
**Exercice 3.7**

On dispose de 288 m de clôture grillagée pour construire 6 enclos rectangulaires pour un zoo selon le plan ci-dessous. Quelles dimensions donner à chacun de ces enclos de manière à maximiser leur surface au sol.



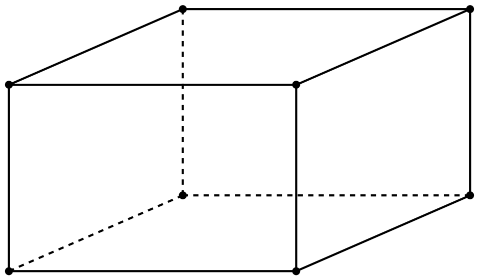
**Exercice 3.8**

On se propose d'envoyer un colis de volume égal à 12 dm$^3$ dont la forme est celle d'un parallélépipède rectangle de base carrée. Son emballage est maintenu à l'aide d'une ficelle comme le montre la figure. Trouver les dimensions du colis permettant d'utiliser le moins de ficelle possible.



**Exercice 3.9**

Un fabriquant doit construire une caisse de base carrée, sans couvercle, ayant un volume de 2 m$^3$. Le matériau employé pour les parois coûte 20 fr. le m$^2$, alors que celui utilisé pour la base ne coûte que 10 fr. le m$^2$.

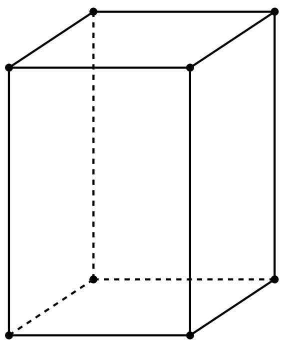


a) Etablir que le coût total des matériaux utilisés pour une caisse est donné par la fonction
$$C(x) = \frac{10\,x^3 + 160}{x}$$
où $x$ désigne la longueur d'un côté du carré de la base. On néglige l'épaisseur des parois et le coût des déchets de construction.

b) Quelles dimensions donner à la caisse pour que le coût total des matériaux soit minimum ?

**Exercice 3.10**

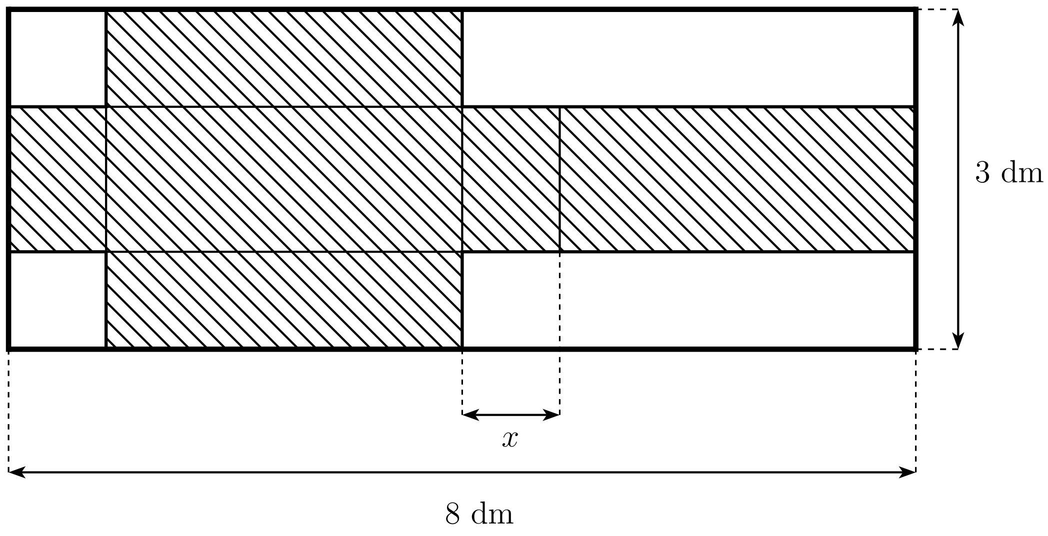
On coupe une baguette de 4 m de long en 12 parties pour former les arêtes d'un parallélépipède rectangle à base carrée.



Calculer la longueur des arêtes pour que le volume du parallélépipède soit maximum.

**Exercice 3.11**

On désire construire une boîte fermée en forme de parallélépipède rectangle. Pour ce faire, on découpe le patron du parallélépipède dans un carton rectangulaire mesurant 8 dm par 3 dm comme représenté sur la figure ci-dessous :



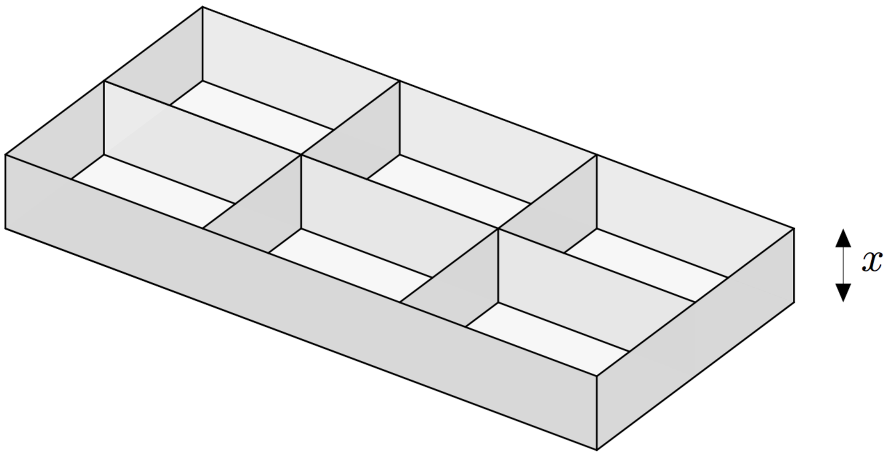

a) Montrer que l'expression en fonction de $x$ du volume de la boîte est donnée par

$$V(x) = 2x^3 - 11x^2 + 12x$$

b) Pour quelles valeurs de $x$ la boîte aura-t-elle un volume $V = 3\ \text{dm}^3$ ?

c) Déterminer les dimensions de la boîte dont le volume est maximal. Donner la valeur exacte de ce volume maximal.

**Exercice 3.12**




On veut construire une boîte de rangement en carton (sans couvercle) ayant la forme représentée ci-dessus et dont les 6 compartiments rectangulaires ont les mêmes dimensions. Cette boîte doit avoir un volume de 21 168 $\mathrm{cm}^3$ et sa longueur doit être le triple de sa hauteur.

a) Montrer que la surface de carton nécessaire à la construction vaut

$$S(x) = 9\,x^2 + \frac{49\,392}{x}$$

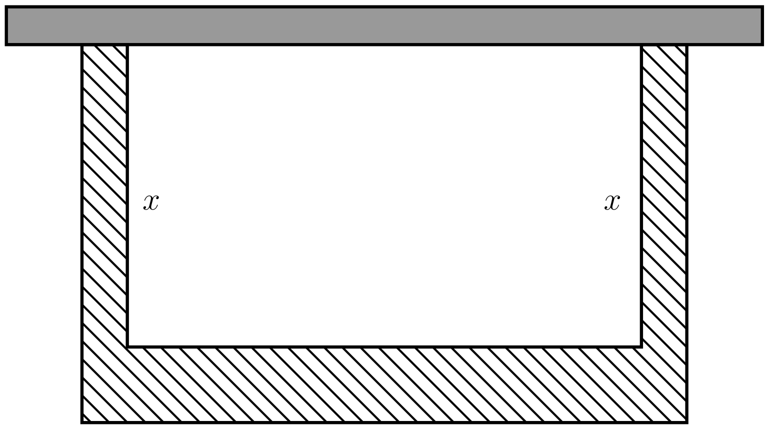
où $x$ désigne la hauteur de la boîte.

b) Quelles dimensions donner à cette boîte pour utiliser le moins de carton possible ?

**Exercice 3.13**

Dans un jardin botanique, on souhaite planter des fleurs rares sur un terrain rectangulaire de $2\,000$ m$^2$.

Ce terrain est situé contre un mur existant qui en protège l'accès par l'arrière. Pour empêcher l'accès sur les trois côtés restants, on veut creuser autour un fossé de 80 cm de profondeur, large de $2,5$ m sur le côté avant et de 1 m sur les côtés latéraux, comme indiqué sur le **croquis** ci-dessous :




a) Montrer que le volume d'eau (en m$^3$) nécessaire pour remplir le fossé est donné par :

$$V(x) = \frac{1,6\,x^2 + 4\,x + 4\,000}{x}$$

où $x$ désigne le côté latéral (en m) du terrain.

b) Déterminer les mesures des côtés du terrain qui minimisent le volume d'eau nécessaire pour remplir le fossé et déterminer ce volume d'eau.

**Exercice 3.14**

Une agence organise des voyages de groupes. Le prix normal d'un forfait comprenant le train et l'hôtel est de 120 fr. par personne. Pour les groupes de plus de 50 personnes, le rabais consenti est de 0.5 fr. par personne. Par exemple, 51 personnes paient 119.50 fr. chacune, 52 personnes 119 fr. chacune, etc.

Cela signifique que si un groupe comporte $50+x$ personnes, l'agence aura un revenu donné par la fonction

$$R(x) = (50 + x)\,(120 - 0.5\,x)$$

a) Trouver $x$ pour que ce revenu soit maximal.

On sait de plus que les frais de l'agence se décomposent ainsi : 500 fr. pour les 50 premières personnes, puis 20 fr. par personne supplémentaire.

b) Déterminer, en fonction de $x$, les frais $F(x)$ occasionnés par le groupe de $50 + x$ personnes.

c) Déterminer, en fonction de $x$, le profit $P(x)$ réalisé par l'agence sur le groupe de $50 + x$ personnes et calculer pour quelle valeur de $x$ ce profit sera maximal.

# Solutions des exercices

**3.1** a)

$$P(x) = \frac{200x^2 + 400x + 1600}{x}$$

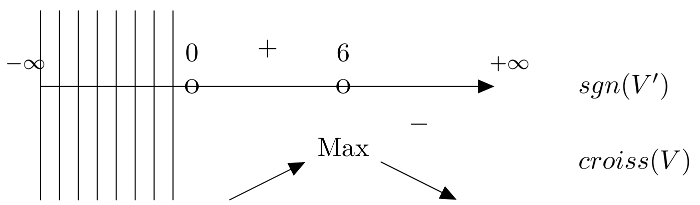
b) $x \simeq 2,828$ m et $y \simeq 2,828$ m.

c) 1531,35 francs.

**3.2**

$$V'(x) = 108\,x - 18\,x^2$$

Les zéros de $V'$ sont $x = 0$ et $x = 108/18 = 6$.

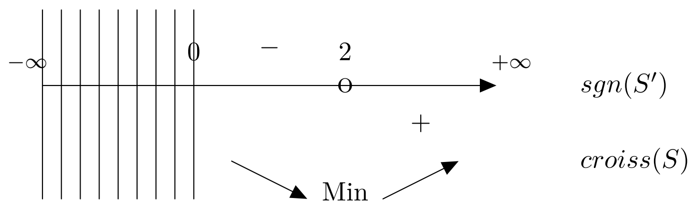



Les dimensions cherchées sont donc $x = 6$, $y = 12$, $z = 9$ et le volume maximum vaut 648 u$^3$.

**3.3** On doit optimiser la fonction $S(x) = 4\,x + 8 + \dfrac{16}{x}$ pour $x$ compris entre 0 et 8.

$$S'(x) = \frac{4\,x^2 - 16}{x^2}$$

Les zéros de $S'$ sont donc $-2$ et 2.




Les dimensions cherchées sont donc :

– hauteur donnée 2 m, profondeur $y = 4$ m, largeur $x = 2$ m.

**3.4** Carré de côté 1 m.

**3.5** Hauteur : 4 cm.

**3.6** Rayon : $\sim$ 4,8 cm ; hauteur : $\sim$ 14,3 cm.

**3.7** Longueur : 18 m, largeur : 16 m.

**3.8** Côté base : 2 dm, hauteur : 3 dm.

**3.9** a) La lettre $x$ désigne le côté de la base carrée et la lettre $y$ désigne la hauteur de la boîte.

On peut écrire $x^2 \cdot y = 2 \;\Leftrightarrow\; y = 2/x^2$.

L'aire de la base vaut $x^2$ et donc sont coût est de $10\,x^2$.

L'aire totale des quatre parois vaut $4\,xy$ et donc sont coût s'élève à $20 \cdot 4\,xy = 80\,xy$.

La fonction coût s'écrit donc

$$C(x) = 10\,x^2 + 80\,x \cdot \frac{2}{x^2} = 10\,x^2 + \frac{160}{x} = \frac{10\,x^3 + 160}{x}$$

b) Le côté de la base doit mesurer 2 m et la hauteur de la boîte doit être de 50 cm, soit 0.5 m.

**3.10** Le parallélépipède de volume maximal est le cube dont l'arête mesure 1/3 m ($\cong 0.33$).

**3.11** a) –

b) $x = 1$ et $x \simeq 0.363$

c) Les dimensions cherchées sont $x = 2/3$ dm, 5/3 dm et 10/3 dm. La valeur exacte du volume maximal est 100/27 dm$^3$.

**3.12** Les dimensions sont $x = 14$ cm, 36 cm et 42 cm.

**3.13** a) Notons $y$ l'autre dimension du rectangle intérieur. On a :

$$x \cdot y = 2000 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{2000}{x}$$

Ce qui fait que

$$A(x) = 2x + \frac{5}{2} \cdot (y + 2) = 2x + \frac{5}{2} \cdot y + 5 = 2x + \frac{5000}{x} + 5$$

Le volume d'eau en m$^3$ est donc donné par :

$$V(x) = A(x) \cdot 0.8 = 1.6\,x + \frac{4000}{x} + 4 = \frac{1.6\,x^2 + 4\,x + 4000}{x}$$

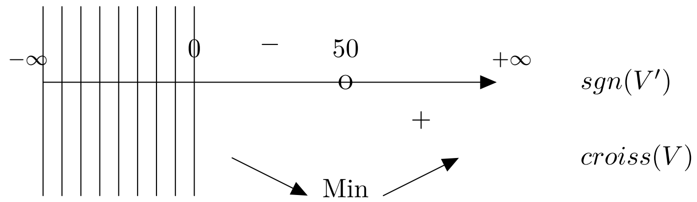
b) Pour déterminer les mesures cherchées, on doit étudier la croissance de $V(x)$ et donc calculer sa dérivée :

$$\begin{aligned} V'(x) &= \left(\frac{1.6\,x^2 + 4\,x + 4000}{x}\right)' \\ &= \frac{(3.2\,x + 4)\cdot x - (1.6\,x^2 + 4\,x + 4000)\cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{3.2\,x^2 + 4\,x - 1.6\,x^2 - 4\,x - 4000}{x^2} \\ &= \frac{1.6\,x^2 - 4000}{x^2} \end{aligned}$$

Cherchons les zéros positifs de $V'(x)$ :

$$V'(x) = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1.6\,x^2 - 4000}{x^2} = 0 \quad\Rightarrow\quad 1.6\,x^2 = 4000 \quad\Rightarrow\quad x^2 = 2500$$

$$\Rightarrow\quad x = \pm 50 \quad\Rightarrow\quad x = 50$$




On a bien un minimum en $x = 50$.

On calcule l'autre dimension et le volume d'eau :

$$y = \frac{2000}{x} = \frac{2000}{50} = 40$$

$$V(50) = \frac{1.6\cdot 50^2 + 4\cdot 50 + 4000}{50} = 164$$

Le terrain est donc un rectangle de 40 m par 50 m et le volume d'eau nécessaire au remplissage du fossé est de 164 $m^3$.

**3.14**

a) Le revenu est maximal pour 145 personnes.

b) $F(x) = 500 + 20\,x$

c) $P(x) = R(x) - F(x) = 5\,500 + 75\,x - 0.5\,x^2$

Le profit est maximal pour 125 personnes.