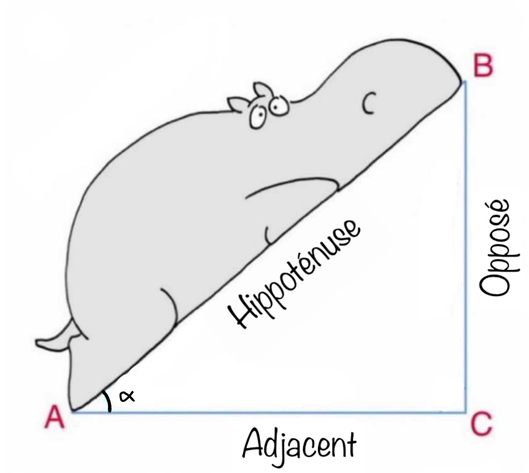
Gymnase de Burier

3C Exercices de mathématiques

Puissances
Exponentielles et logarithmes
Probabilités
Inférence statistique
Géométrie



Version 2023

Table des matières

Chapitre 1

Puissances

Puissances à exposants entiers

1.1 Simplifier les expressions suivantes :

a) $2^4 \cdot 3^4$ b) $2^3 \cdot (-3)^3 \cdot 4^3$ c) $3^6 \cdot 5^6$

d) $5^0 \cdot 5^1 \cdot 5^2 \cdot ... \cdot 5^{10}$ e) $3^2 \cdot 5^2 \cdot 15^3$ f) $\dfrac{5^8}{5^6}$

g) $\dfrac{5^6}{5^8}$ h) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^5$ i) $\dfrac{7 \cdot 7^5 \cdot 7^0 \cdot 7}{7^3 \cdot 7^4}$

1.2 Simplifier les expressions suivantes :

a) $(2^2)^3$ b) $2^{(2^3)}$ c) $((-4)^2)^4$

d) $\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\right)^6$ e) $\left(-\dfrac{2^4}{3^3}\right)^2$ f) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 \div \left(\dfrac{5}{3}\right)^3$

g) $4^2 \cdot 2^5 \cdot 8^2$ h) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^4 \div \left(\dfrac{9}{8}\right)^4$ i) $\dfrac{(3 \cdot 9 \cdot 27 \cdot 81)^5}{3^{50}}$

1.3 Calculer sans utiliser la machine :

a) 4^{-2} b) 2^{-1} c) 3^{-3} d) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1}$ e) $\left(\dfrac{-1}{2}\right)^{-2}$ f) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$

1.4 Le produit de tous les nombres de chaque ligne et de chaque colonne du tableau vaut 2^{14}. Remplir les cases manquantes :

2^{11}	2^{-2}		2^8
2^0			2^3
		2^2	2^7
2^{-1}		2^{10}	

1.5 Simplifier les expressions suivantes et les écrire sans fraction :

a) $2^4 \cdot 2^{-2} \cdot 2$ b) $(2^3)^{-5}$ c) $\dfrac{5^3}{5^{-2}}$

d) $((-1)^{-2})^{-3}$ e) $(2^{-1} \cdot 5^{-1})^{-1}$ f) $\left(\dfrac{11^{-2}}{11^8}\right)^{-5}$

g) $7^{-3} \cdot \dfrac{49}{7^8} \cdot 7$ h) $10'000 \cdot \dfrac{100}{100'000} \cdot 10^{-3}$ i) $\dfrac{1'280 \cdot 5^7 \cdot 125}{(0,2 \cdot 25)^3}$

1.6 Simplifier les expressions suivantes et les écrire sans exposant négatif :

a) $a^2 \cdot (a^2)^3$ b) $(2x^2)^4 \cdot (3x^5)^2$ c) $\left(\dfrac{2}{3}x^3\right)^2 \cdot \left(\dfrac{3}{2}x^2\right)^3$

d) $(x^2)^{-3} \cdot (x^{-4})^{-2} \cdot x^{-1}$ e) $(5x^2y^{-3}) \cdot (4x^{-5}y^{-1})$ f) $\dfrac{3x^2y^4}{2x^0y^3}$

g) $\dfrac{3x^3 \cdot 2y}{(2x^2y)^3}$ h) $\left(\dfrac{4a^2b}{a^3b^2}\right) \cdot \left(\dfrac{5a^2b}{2b^4}\right)$ i) $(-2xy^2)^5 \cdot \left(\dfrac{x^7}{8y^3}\right)$

1.7 Simplifier les expressions suivantes :

a) $x^2yz^3 \cdot 3xy \cdot 27x^3z^5$ b) $(2a^2b^3c)^4$ c) $\left(\dfrac{2r^3}{s}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{s}{r}\right)^3$

d) $\dfrac{(4x^2y^3)^5}{(2xy)^3} \div \dfrac{x^7}{(y^3)^4}$ e) $(u^{-2}v^3)^{-3}$ f) $\dfrac{8x^3y^{-5}}{4x^{-1}y^2}$

g) $\left(\dfrac{x}{3}\right)^{-2} \div \left(\dfrac{x}{9}\right)^{-3}$ h) $\left(\dfrac{9y^3(3y^2)^{-2}}{(y^{-4})^{-3}}\right)^5$ i) $\left(\dfrac{4a^{-3}b^2}{3a^4b^{-2}}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{4a^3b^{-2}}{2b^{-4}}\right)^{-2}$

Puissances à exposants rationnels

1.8 Calculer :

a) $\sqrt{25}$ b) $\sqrt[3]{1'000}$ c) $\sqrt[4]{625}$ d) $\sqrt[5]{-32}$ e) $\sqrt[6]{729}$

f) $\sqrt[3]{0,027}$ g) $\sqrt[3]{0,125}$ h) $\sqrt[3]{0,015625}$ i) $\sqrt{0}$ j) $\sqrt[3]{0,000008}$

1.9 Simplifier les expressions suivantes :

a) $\sqrt{24}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{243}$ d) $\sqrt{50}$ e) $\sqrt{300}$ f) $\sqrt{54}$

g) $\sqrt{125}$ h) $\sqrt{147}$ i) $\sqrt{80}$ j) $\sqrt{1'000}$ k) $\sqrt{250}$ l) $\sqrt{7'000}$

m) $3\sqrt{5}-4\sqrt{20}+5\sqrt{45}-3\sqrt{80}$ n) $2\sqrt{40}-2\sqrt{90}+\sqrt{4'000}-5\sqrt{10}$

1.10 Simplifier les expressions suivantes :

a) $\sqrt[3]{\sqrt{7}}$ b) $\sqrt[3]{2^{18}\cdot 5^{12}\cdot 3^{3}}$ c) $\sqrt[4]{64}\cdot\sqrt[4]{4}$ d) $\sqrt[5]{3^{15}}$ e) $\left(\sqrt[8]{\sqrt[4]{\sqrt{2}}}\right)^{128}$

f) $\sqrt{3\sqrt{3}}$ g) $\sqrt[3]{5\sqrt{5\sqrt{5}}}$ h) $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}$ i) $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3^4\sqrt[3]{3^6}}}$ j) $\sqrt[3]{2\sqrt[6]{\dfrac{2^{14}}{\sqrt[3]{2^6}}}}$

1.11 Simplifier les expressions suivantes :

a) $\sqrt[5]{a^3}\cdot(\sqrt[5]{a})^2$ b) $\sqrt[3]{a}\cdot(\sqrt[3]{a})^2$ c) $\sqrt[5]{a^3}\cdot(\sqrt[5]{a^2})^6$ d) $\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^4}$

e) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[5]{a^3}\cdot(\sqrt[10]{a})^4$ f) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a}$ g) $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$ h) $\left(\sqrt[10]{\sqrt[5]{a}}\right)^{15}$

i) $\dfrac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{a}}$ j) $\dfrac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[4]{a^3}}$ k) $\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a^3}}$ l) $\dfrac{a^3}{\sqrt[3]{a^5}\cdot\sqrt[6]{a}}$

1.12 Rendre rationnel les dénominateurs et simplifier les expressions :

a) $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{2}{\sqrt{8}}$ d) $\dfrac{12}{\sqrt{24}}$ e) $\dfrac{2}{\sqrt[4]{5}}$ f) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}$

1.13 Simplifier les expressions suivantes et rendre rationnel le dénominateur si nécessaire :

a) $\sqrt{9x^4y^6}$ b) $\sqrt{16x^8y}$ c) $\sqrt[3]{8x^6y^2}$ d) $\sqrt[4]{81x^8y^4}$

e) $\sqrt{\dfrac{16x^6}{3}}$ f) $\sqrt{\dfrac{3x}{2y^3}}$ g) $\sqrt{\dfrac{50x^3}{3}} \cdot \sqrt{\dfrac{12}{x^4}}$ h) $\sqrt{\dfrac{1}{3x^3y}}$

1.14 Écrire à l'aide d'exposants rationnels :

a) $\sqrt[3]{5^2}$ b) $\sqrt[10]{7}$ c) $-\sqrt[8]{7^2}$ d) $\sqrt{2}$ e) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ f) $\dfrac{8}{\sqrt[7]{4^3}}$

g) $\sqrt[7]{3^7}$ h) $\sqrt[5]{x^3}$ i) $\sqrt[3]{x^5}$ j) $\sqrt{x^2+y^2}$ k) $\sqrt{2x}$ l) $\sqrt[3]{x^3-y^3}$

1.15 Écrire à l'aide de racines et d'exposants entiers positifs :

a) $7^{\frac{3}{2}}$ b) $3^{\frac{2}{5}}$ c) $-11^{0,25}$ d) $8^{-\frac{7}{5}}$ e) $27^{-\frac{1}{3}}$ f) $(-3)^{0,5}$

g) $x^{\frac{3}{4}}$ h) $x^{\frac{1}{2}}$ i) $3x^{\frac{2}{3}}$ j) $(3x)^{\frac{2}{3}}$ k) $(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$ l) $4+x^{\frac{2}{3}}$

1.16 Calculer sans l'aide de la machine :

a) $\sqrt[4]{16^3}$ b) $1^{\frac{3}{5}}$ c) $0^{\frac{5}{7}}$ d) $9^{-\frac{1}{2}}$ e) $4 \cdot 25^{\frac{3}{2}}$

f) $(4 \cdot 25)^{\frac{3}{2}}$ g) $(-32)^{\frac{1}{5}}$ h) $(32)^{-\frac{1}{5}}$ i) $8^{\frac{2}{3}}$ j) $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{\frac{3}{2}}$

k) $\left(\dfrac{16}{625}\right)^{-\frac{1}{4}}$ l) $(5+16^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$ m) $19-27^{\frac{1}{3}}$ n) $(19-27)^{\frac{1}{3}}$

1.17 Calculer :

a) $8^{\frac{2}{3}}+16^{\frac{1}{2}}+27^{\frac{2}{3}}+81^{\frac{1}{4}}-125^{\frac{1}{3}}-1'000^{\frac{2}{3}}$ b) $(3 \cdot 32^{\frac{1}{3}}+3 \cdot 108^{\frac{1}{3}}-256 \cdot 2^{\frac{2}{3}}) \cdot 2^{\frac{1}{3}}$

c) $(3 \cdot 2^{0,25}+2 \cdot 32^{0,25}-8^{0,75}) \cdot 8^{0,25}$ d) $\dfrac{16^{\frac{1}{3}}-4 \cdot 128^{\frac{1}{3}}+3 \cdot 250^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}$

1.18 Remplacer les ... par $=$ ou $\neq$. Justifier votre réponse.

a) $(x^p)^2$ ... $x^{(p^2)}$ b) $a^p \cdot b^p$ ... $(ab)^p$ c) $\sqrt[n]{\dfrac{1}{x}}$ ... $\dfrac{1}{\sqrt[n]{x}}$ d) $(a+b)^{-1}$ ... $-a-b$

e) $(a^2+1)^{\frac{1}{2}}$ ... $a+1$ f) $x^{\frac{1}{k}}$ ... $\dfrac{1}{x^k}$ g) $\sqrt[x]{3}$ ... $x^{\frac{1}{3}}$ h) $3x^2 \cdot (2x)^2$ ... $(6x)^4$

i) $(a+b)^2$ ... a^2+b^2 j) $(25x^2)\cdot(20x)^2$ ... $(10x)^4$

1.19 Résoudre les équations suivantes :

a) $x^6 = 50$ b) $9x^5 = 72$ c) $8x^4 - 100 = 0$

d) $\dfrac{1}{x^3} = 20$ e) $x^8 - 7x^6 = 0$ f) $x^4 + 16 = 0$

1.20 Le volume d'une boule est de 696,9 dm^3 . Quel est son rayon ?

1.21 *Visibilité.*
Par un jour clair, la distance d (en km) de visibilité depuis le sommet d'un grand bâtiment de hauteur h (en m) peut être donnée approximativement par $d = 3,5\sqrt{h}$.

a) Donner la distance de visibilité approximative à partir du sommet de la Sears Tower de Chicago, haute de 436 m.
b) Quelle est la hauteur d'une tour au sommet de laquelle on a une visibilité de 50 km ?

1.22 *Longueur d'un flétan.*
Le rapport entre la longueur L (en mètres) et la masse W (en kilogrammes) d'un flétan du Pacifique peut être donné approximativement par la formule $L = 0,46\sqrt[3]{W}$.

a) Le plus grand spécimen connu pèse 230 kilos. Calculer sa longueur.
b) Quelle est la masse d'un flétan de 1,5 mètres de longueur.

1.23 *Masse d'une baleine.*
Le rapport entre la longueur L (en mètres) et la masse W (en tonnes) d'une baleine (rorqual boréal) peut être évalué par $W = 0,03 \cdot L^{2,43}$.

a) Calculer la masse d'une baleine de 7,5 m de long.
b) Calculer la longueur d'une baleine de 3 tonnes.

Solutions des exercices

Puissances à exposants entiers

1.1 a) 6^4 ; b) -24^3 ; c) 15^6 ; d) 5^{55} ; e) 15^5 ; f) 5^2 ; g) $\dfrac{1}{5^2}$; h) $-\dfrac{2^5}{3^5}$; i) 1.

1.2 a) 2^6 ; b) 2^8 ; c) 2^{16} ; d) $\dfrac{1}{3^{18}}$; e) $\dfrac{2^8}{3^6}$; f) $\dfrac{2^3}{5^3}$; g) 2^{15} ; h) $\dfrac{2^4}{3^4}$; i) 1.

1.3 a) $\dfrac{1}{16}$; b) $\dfrac{1}{2}$; c) $\dfrac{1}{27}$; d) 4 ; e) 4 ; f) $\dfrac{27}{8}$.

1.4

2^{11}	2^{-2}	2^{-3}	2^8
2^0	2^6	2^5	2^3
2^4	2	2^2	2^7
2^{-1}	2^9	2^{10}	2^{-4}

1.5 a) 2^3 ; b) 2^{-15} ; c) 5^5 ; d) 1 ; e) 10 ; f) 11^{50} ; g) 7^{-8} ; h) 10^{-2} ; i) 10^8.

1.6 a) a^8 ; b) $144x^{18}$; c) $\dfrac{3}{2}x^{12}$; d) x ; e) $\dfrac{20}{x^3y^4}$; f) $\dfrac{3}{2}x^2y$; g) $\dfrac{3}{4x^3y^2}$; h) $\dfrac{10a}{b^4}$; i) $-4x^{12}y^7$.

1.7 a) $3^4x^6y^2z^8$; b) $2^4a^8b^{12}c^4$; c) 2^2r^3s ; d) 2^7y^{24} ; e) $u^6v^{-9} = \dfrac{u^6}{v^9}$; f) $2x^4y^{-7} = \dfrac{2x^4}{y^7}$; g) $3^{-4}x = \dfrac{x}{3^4}$; h) $y^{-65} = \dfrac{1}{y^{65}}$; i) $\dfrac{4}{9}a^{-20}b^4 = \dfrac{4b^4}{9a^{20}}$.

Puissances à exposants rationnels

1.8 a) 5 ; b) 10 ; c) 5 ; d) -2 ; e) 3 ; f) $0,3$; g) $0,5$; h) $0,25$; i) 0 ; j) 0,02.

1.9 a) $2\sqrt{6}$; b) $3\sqrt{2}$; c) $9\sqrt{3}$; d) $5\sqrt{2}$; e) $10\sqrt{3}$; f) $3\sqrt{6}$; g) $5\sqrt{5}$; h) $7\sqrt{3}$; i) $4\sqrt{5}$; j) $10\sqrt{10}$; k) $5\sqrt{10}$; l) $10\sqrt{70}$; m) $-2\sqrt{5}$; n) $13\sqrt{10}$.

1.10 a) $\sqrt[6]{7}$; b) $120'000$; c) 4 ; d) 27 ; e) 4 ; f) $\sqrt[4]{27}$; g) $\sqrt[12]{78'125}$; h) $\sqrt[3]{4}$; i) 3 ; j) 2 .

1.11 a) a ; b) a ; c) a^3 ; d) $\sqrt[12]{a^{25}}$; e) $\sqrt{a^3}$; f) $\sqrt[4]{a^5}$; g) $\sqrt[6]{a}$; h) $\sqrt[10]{a^3}$; i) $\sqrt[6]{a^5}$; j) $\sqrt[12]{a}$; k) $\sqrt[12]{a}$; l) $\sqrt[6]{a^7}$.

1.12 a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\sqrt{6}$; e) $\dfrac{2\sqrt[4]{125}}{5}$; f) $\sqrt[3]{4}$.

1.13 a) $3x^2y^3$; b) $4x^4\sqrt{y}$; c) $2x^2\sqrt[3]{y^2}$; d) $3x^2y$; e) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}x^3$; f) $\dfrac{\sqrt{6xy}}{2y^2}$; g) $\dfrac{10\sqrt{2x}}{x}$; h) $\dfrac{\sqrt{3xy}}{3x^2y}$.

1.14 a) $5^{\frac{2}{3}}$; b) $7^{\frac{1}{10}}$; c) $-7^{\frac{1}{4}}$; d) $2^{\frac{1}{2}}$; e) $3^{-\frac{1}{2}}$; f) $2^{\frac{15}{7}}$; g) 3 ; h) $x^{\frac{3}{5}}$; i)$x^{\frac{5}{3}}$; j) $(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$; k) $(2x)^{\frac{1}{2}}$; l) $(x^3-y^3)^{\frac{1}{3}}$.

1.15 a) $\sqrt{7^3}$; b) $\sqrt[5]{3^2}$; c) $-\sqrt[4]{11}$; d) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{8^7}}$; e) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{27}}$; f) - ; g) $\sqrt[4]{x^3}$; h) $\sqrt{x}$; i) $3\sqrt[3]{x^2}$; j) $\sqrt[3]{9x^2}$; k) $\sqrt{x^2-y^2}$; l) $4+\sqrt[3]{x^2}$.

1.16 a) 8 ; b) 1 ; c) 0 ; d) $\dfrac{1}{3}$; e) 500 ; f) 1000 ; g) -2 ; h) $\dfrac{1}{2}$; i) 4 ; j) $\dfrac{1}{125}$; k) $\dfrac{5}{2}$; l) 3 ; m) 16 ; n) -2.

1.17 a) -85 ; b) -482 ; c) 6 ; d) 1.

1.18 a) $(x^p)^2 \neq x^{(p^2)}$ car $(x^p)^2 = x^{2p}$ et $x^{(p^2)} = x^{p^2}$; b) $a^p \cdot b^p = (ab)^p$; c) $\sqrt[n]{\dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{x}}$; d) $(a+b)^{-1} \neq -a-b$ car $(a+b)^{-1} = \dfrac{1}{a+b} \neq -a-b$; e) $(a^2+1)^{\frac{1}{2}} \neq a+1$ car $(a^2+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^2+1} \neq a+1$; f) $x^{\frac{1}{k}} \neq \dfrac{1}{x^k}$ car $x^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{x}$ et $\dfrac{1}{x^k} = x^{-k}$; g) $\sqrt[x]{3} \neq x^{\frac{1}{3}}$ car $\sqrt[x]{3} = 3^{\frac{1}{x}}$ et $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$; h) $3x^2\cdot(2x)^2 \neq (6x)^4$ car $3x^2\cdot(2x)^2 = 12x^4$ et $(6x)^4 = 1296x^4$; i) $(a+b)^2 \neq a^2+b^2$ car $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$; j) $(25x^2)\cdot(20x)^2 = (10x)^4$.

1.19 a) $S = \{-\sqrt[6]{50}\ ;\ \sqrt[6]{50}\} = \{\sim -1,92\ ;\ \sim 1,92\}$;
b) $S = \{\sqrt[5]{8}\} = \{\sim 1,52\}$;
c) $S = \{-\sqrt[4]{\frac{25}{2}}\ ;\ \sqrt[4]{\frac{25}{2}}\} = \{-\sqrt[4]{12,5}\ ;\ \sqrt[4]{12,5}\} = \{\sim -1,88\ ;\ \sim 1,88\}$;
d) $S = \{\dfrac{1}{\sqrt[3]{20}}\} = \{\sim 0,37\}$;
e) $S = \{-\sqrt{7}\ ;\ 0\ ;\ \sqrt{7}\} = \{\sim -2,65\ ;\ 0\ ;\ \sim 2,65\}$;
f) $S = \varnothing$.

1.20 Le rayon de la boule est égal à $5,5$ dm.

1.21 a) 73 km ; b) 204 m.

1.22 a) 2,82 m ; b) 34,7 kg.

1.23 a) 4 tonnes ; b) 6,65 m.

Chapitre 2

Exponentielles et logarithmes

Equations

2.1 Résoudre les équations ci-dessous :

a) $5^x = 25$

b) $3^x = \frac{1}{9}$

c) $x^4 = 16$

d) $4^x = 64$

e) $4^x = 8$

f) $9^{2x+1} = 1$

g) $16 \cdot 2^x = 4^{3x+5}$

h) $8^{7x-2} = 8^{-3x+8}$

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+7} = 2$

2.2 Déterminer la valeur approchée de x en utilisant la calculatrice.

a) $x = \log(50)$; $x = \log(-2)$; $x = \log(e^3)$

b) $x = \ln(10)$; $x = \ln(0)$; $x = \ln(\pi)$

c) $\log(x) = 4.32$; $\log(x) = -4.5$; $\log(x) = 1.05$

d) $\ln(x) = 1$; $\ln(x) = -4.5$; $\ln(x) = 3$

2.3 Résoudre les équations ci-dessous :

a) $145^x = 3451$

b) $5^{2x} = 456.35$

c) $1000 \cdot 1.12^x = 10'000$

d) $20 \cdot 5^{3x} = 800$

e) $\frac{e^{x+1}}{100} = 20$

f) $20 + 100 \cdot e^{-0.5x} = 60$

Intérêts

2.4 *Intérêts simples*
Lorsque la durée d'un placement est courte, moins d'une année, on calcule les intérêts simples I. La formule est $I = \frac{C \cdot t \cdot n}{100 \cdot 360}$, où C est le capital, t le taux en % et n la durée du placement en nombre de jours.

a) On donne $C = 1'800$ francs, $t = 5\%$ et $n = 240$ jours. Calculer I.
b) On donne $C = 257'500$ francs, $t = 1.25\%$ et $I = 1'432.30$ francs. Calculer n.
c) On donne $C = 282.50$ francs, $n = 240$ jours et $I = 0.55$ francs. Calculer t.
d) On donne $t = 0.5\%$, $n = 200$ jours et $I = 19$ francs. Calculer C.

2.5 *Intérêts composés*

a) Calculer la valeur acquise d'un capital de $10'000$ francs placé pendant 11 ans à 0.75%.
b) Calculer le capital dont la valeur dans 8 ans sera de $1'665.85$ francs au taux de 8%.
c) A quel taux annuel doit-on placer $2'350$ francs pour retirer $20'000$ francs dans 40 ans ?
d) Combien de temps faut-il placer, à 1.75%, $4'720$ francs pour retirer en tout $5'812.40$ francs ?

2.6 *Intérêts composés*

Quelle somme retire-t-on au bout de 20 ans si l'on place $20'000$ francs à 1.25% pendant 5 ans, puis à 1.5% pendant 12 ans, et à 1.75% pendant le reste du temps ?

2.7 *Intérêts composés*

a) Calculer la valeur acquise par $40'000$ francs à 3.75% pendant 10 ans à intérêts composés.
b) Calculer la valeur actuelle d'un capital qui vaudra $10'730.40$ francs dans 7 ans à 5.25%.
c) Il y a six ans, on a placé $12'000$ francs à un certain taux. On retire aujourd'hui $14'751.05$ francs. Quel était ce taux ?
d) On dispose de $100'000$ francs. On place cette somme à 9%. Après combien d'années aura-t-on $364'248.25$ francs ?

2.8 *Intérêts composés*

Partager $10'000$ francs entre deux frères âgés de 14 et 16 ans de telle manière que les parts placées à 3% leur donnent un même montant quand ils atteindront leur majorité.

2.9 *Intérêts composés*

Une banque propose de tripler le capital placé sur une période de 12 ans.
Le taux dépend-il du capital placé ? Si non, quel est ce taux ?

2.10 *Intérêts composés*

Pierre désire s'acheter une voiture de sport. Il décide de verser chaque premier janvier de chaque année 3′500 francs, ceci pendant 10 ans. Le taux de placement du capital constitué, année après année, est de 3%. Quel montant touche-t-il à la fin des dix ans ?

2.11 *Intérêts composés*

a) En capitalisation semestrielle, quelle est la valeur acquise d'un capital de 10′000 francs au bout de 7 ans au taux de 6% ?

b) Même question pour 15′000 francs au bout de 5.5 ans au taux de 7%.

2.12 *Intérêts composés*
On place 2′900 francs à 4% pendant un certain temps. Pour un an de plus, on retirerait 185.72 francs de plus. Calculer la durée du placement.

2.13 *Intérêts composés*

a) Calculer l'intérêt gagné durant la 12ème année grâce à un capital initial de 15′000.- placés à un taux de 3%.

b) Un capital de 80′000.- placé à 4.5% a rapporté 15′401.50 francs d'intérêts. Quelle est la durée du placement ?

c) Un capital de 20′000 francs a rapporté 9282 francs en 4 ans. Quel est le taux ?

d) Une personne a gagné 5000.- en 10 ans à un taux de 3%. Quel était le capital initial ?

2.14 *Intérêts composés*
On place un capital C à un taux d'intérêt annuel i pendant une durée de n années et on obtient le montant C_n. Remplir le tableau ci-dessous :

C	i	n	C_n
4′720.–	3.5%	12 ans	
	3.5%	24 ans	5′388.65
9′440.–	3.5%		11′604.17
790.–		72 ans	9′404.43

2.15 *Intérêts composés*
En 1867, les USA ont acheté l'Alaska à la Russie pour la somme de \$ 7′200′000. En supposant que la valeur du terrain augmente régulièrement de 3% par an, quelle aurait été sa valeur en l'an 2'000 ?

2.16 *Intérêts composés*
CHF 10'000.- sont déposés sur un compte d'épargne à un taux d'intérêts composés de 11% par an. Combien faudra-t-il de temps pour que la somme double ?

Applications aux sciences sociales, expérimentales ou économiques

2.17 Le nombre de bactéries triple toutes les 5 heures. Au départ, il y en a 2000.

a) Trouver la fonction exprimant le nombre de bactéries en fonction du temps.

b) Trouver le nombre de bactéries après 1 jour.

c) Après combien de temps le nombre de bactéries aura-t-il centuplé ?

2.18

a) Un objet vaut actuellement 2000 francs. Sa valeur double tous les 3 ans. Quelle sera sa valeur dans 12 ans ? Dans n ans ?

b) Il y a 5 ans, un objet valait 1000 francs. Actuellement, il vaut 3000 francs. Sachant que son prix évolue de manière exponentielle, quel sera son prix dans 12 ans ? Après combien de temps vaudra-t-il $21'000$ francs (au mois près) ?

2.19 La valeur en francs d'un équipement informatique est donnée par la formule suivante : $P(t) = 6000 \cdot 0.82^t$, où t représente le nombre d'années écoulées depuis l'achat.

a) Quelle est la valeur d'achat ?

b) Quelle est la valeur après 5 ans ?

c) Après combien de temps cet équipement ne vaut plus que 1000 francs ?

2.20 Le modèle de Jenss est généralement considéré comme la formule la plus précise pour prévoir la taille d'un enfant en âge préscolaire. Si y est sa taille en cm et x son âge en années, on a $y = 79.041 + 6.39x - e^{3.261-0.993x}$. Quelle est, d'après ce modèle, la taille d'un enfant d'une année ?

2.21 La relation d'Ehrenberg $\ln(m) = \ln(2.4) + 1.84h$ est une formule empirique liant la taille h (en mètres) à la masse moyenne m (en kilogrammes) d'enfants âgés de 5 à 13 ans.

a) Évaluer, à l'aide de cette formule, la taille moyenne d'un enfant de 7 ans qui pèse 21.8 kg.

b) Évaluer, à l'aide de cette formule, la masse moyenne d'un enfant de 8 ans qui mesure 1.5 m.

2.22 Un biologiste sait que la population canine d'une ville croît selon une fonction exponentielle. Une enquête faite il y a six ans montre qu'il y avait alors 3500 chiens. Aujourd'hui, on sait qu'il y a 5500 chiens. Combien y aura-t-il de chiens dans cette ville dans quatre ans ?

2.23 La masse m (en kilogrammes) d'une éléphante d'Afrique à l'âge de t (années) peut être donnée approximativement par $m = 2'600(1 - 0.51e^{-0.057t})^3$.

a) Donner approximativement sa masse à la naissance.

b) Évaluer l'âge d'une éléphante d'Afrique ayant une masse de 1.8 tonnes.

2.24 Selon le test effectué en usine, la fonction $f(h) = 101 - e^{0.064 \cdot h}$ représente le pourcentage de téléphones mobiles de la marque Konia 4440, encore en fonction après h heures de veille.

a) Calculer le pourcentage de téléphones fonctionnant après 17 heures de veille.

b) Calculer le pourcentage de téléphones fonctionnant après 2 jours de veille.

c) Après combien d'heures le dernier Konia s'éteint-il ?

2.25

a) Quel est le plus grand nombre entre $a = 10^{1500}$ et $b = e^{3454}$?

b) Déterminer la plus grande puissance de 5 qui est inférieure à 6^{1000}.

c) Déterminer le nombre de chiffres du nombre $a = 1234^{456}$.

2.26 Un objet a une température de $80\,^\circ$ C ; on suppose que la température T de l'objet décroît exponentiellement et que sa température est de $50\,^\circ$ C après 20 minutes.

a) Déterminer la température de l'objet après 50 minutes.

b) Après combien de minutes et de secondes (à la seconde près) la température de l'objet est-elle de $15\,^\circ$ C ?

2.27 Un pêcheur esquimau tombe dans l'eau dont la température est de $0\,^\circ$ C . La relation $T = 37e^{-0.02t}$ donne la température T de son corps après t minutes.

a) Quelle sera la température de son corps après 45 minutes.

b) Calculer le temps dont disposent ses amis pour le secourir si l'on sait qu'il s'évanouira lorsque son corps sera à une température de $25\,^\circ$ C.

2.28 La population d'une culture bactérienne double toutes les 12 heures. Supposons que la population initiale est de 10'000 bactéries.

a) Déterminer la relation qui représente la taille de la population N après t heures.

b) Combien y aura-t-il de bactéries après une semaine ?

c) Au bout de combien de temps le nombre de bactéries aura-t-il triplé ?

2.29 Un étang contient 1'000 truites. Trois mois plus tard, il n'en reste que 600.

a) A l'aide d'un modèle exponentiel, trouver une formule permettant d'estimer le nombre N de truites restantes après t mois.

b) Combien y aura-t-il de truites dans l'étang après une année ?

c) Après combien de temps y en aura-t-il plus que 80 ?

2.30 Un médicament est éliminé du corps par l'urine. Un patient en avale une dose de 10 mg. Une heure plus tard, des mesures montrent qu'il ne reste plus que 8 mg de ce médicament dans son corps.

a) A l'aide d'un modèle exponentiel, trouver une formule permettant d'estimer la quantité Q de médicament encore présente dans le corps du patient après t heures.

b) Donner approximativement la quantité du médicament dans le corps du patient 8 h après l'absorption.

c) Après combien de temps, le patient n'aura plus que 1 mg de ce médicament dans son corps ?

2.31 Le taux de dépréciation annuel d'une voiture de valeur initiale CHF 18'000.- est de 25%.

a) Trouver la valeur v de cette voiture après t années.

b) Calculer la valeur de la voiture après 8 ans.

c) Calculer la valeur de la voiture lorsque t devient très grand.

2.32 Les grottes de Lascaux ont été découvertes en 1940. Des analyses ont montré que le charbon trouvé dans ces grottes avait perdu le 83% de la quantité de C^{14} présent dans les plantes vivantes. Déterminer l'âge des peintures de Lascaux. (La demi-vie du carbone14 est de 5730 ans.)

2.33 La population d'un pays A était de 80 millions au début de l'année 1985. De 1985 à 1995, la population a augmenté chaque année de 4% de la valeur qu'elle avait au début de chaque année.

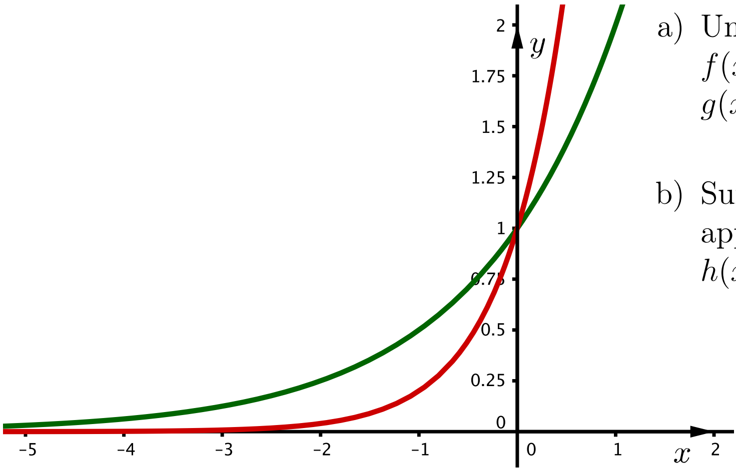
a) Déterminer la grandeur (à 0.1 million près) de la population au début de l'année 1995.

b) Avec ce même taux de croissance, au cours de quelle année la population dépassera-t-elle 200 millions ?

2.34 La population d'un pays B a passé de 100 millions au début 1985 à 186 millions au début 1995. En le supposant constant, déterminer le taux de croissance annuel de la population (au dixième de % près).

Graphes

2.35

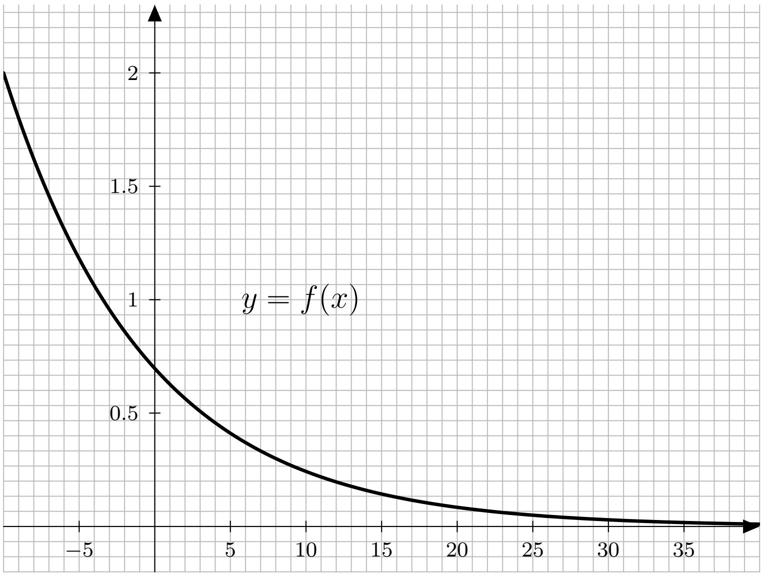


a) Une courbe de ce graphique représente $f(x) = 2^x$, l'autre courbe représente $g(x) = 5^x$. Déterminer qui est qui.

b) Sur ce même graphique, représenter approximativement la fonction $h(x) = 4^x$.

2.36 On a tracé ci-dessous une partie du graphe d'une fonction f représentant la quantité de glace (en décilitres) dans un verre de granita en fonction du temps x (en minutes).

On suppose que le verre a été acheté il y a 10 minutes et qu'en ce moment précis, $x = 0$.



a) Quelle quantité de glace y a-t-il en ce moment dans le verre ?

b) Quelle quantité de glace y avait-il dans le verre au moment de son achat ?

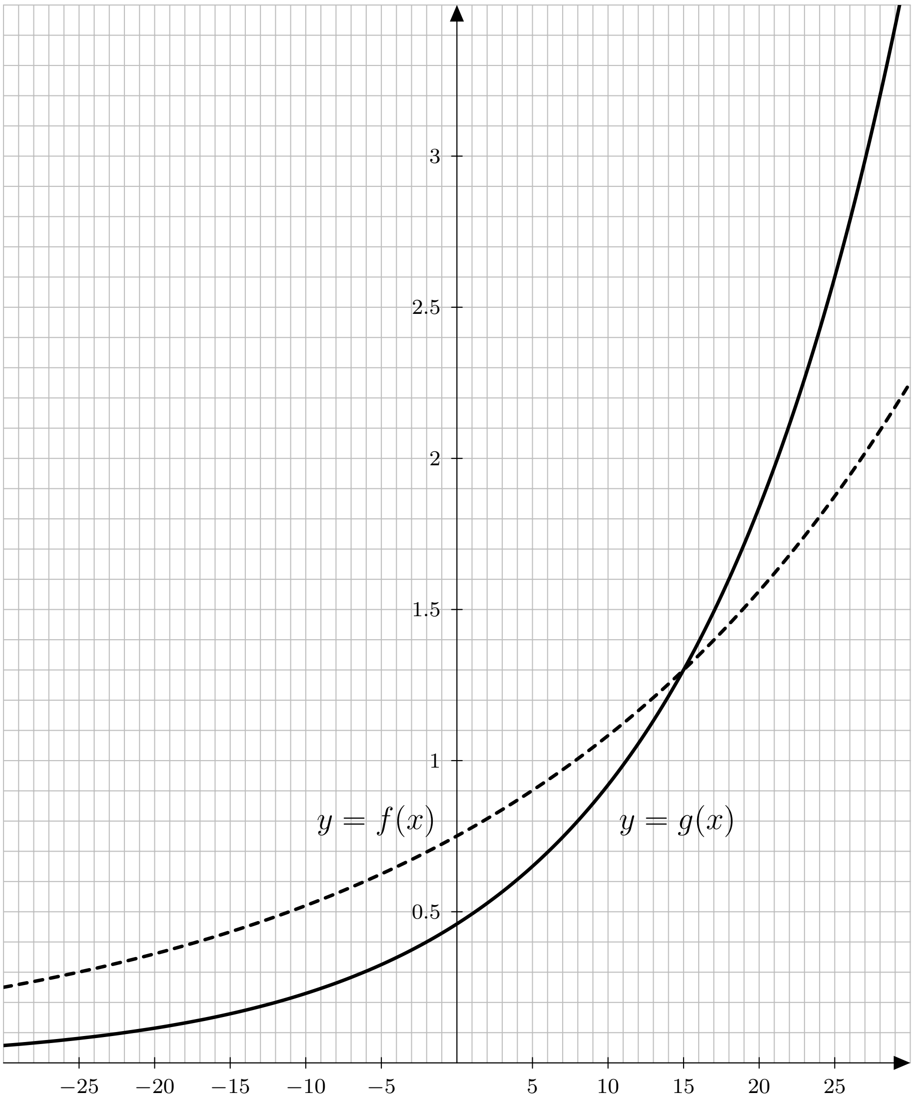
c) La fonction f est-elle croissante ou décroissante ? Interpréter cette réponse dans le contexte du verre de granita.

d) De quelle valeur se rapproche $f(x)$ lorsque x devient de plus en plus grand ? Interpréter cette réponse dans le contexte du verre de granita.

2.37 On a tracé ci-dessous une partie du graphe de deux fonctions.

La fonction f, tracée en traitillés, représente la population (en millions) d'un pays A en fonction du temps x (en années).
La fonction g, en trait plein, représente la population (en millions) d'un autre pays B, également en fonction du temps x.

La valeur $x = 0$ correspond à la situation au premier janvier 2000.



a) Déterminer graphiquement l'ordonnée à l'origine de chacune de ces fonctions. Interpréter le résultat obtenu dans ce contexte.

b) Quel pays avait la plus grande population en 2010 ? Quelles valeurs permettent de l'affirmer ?

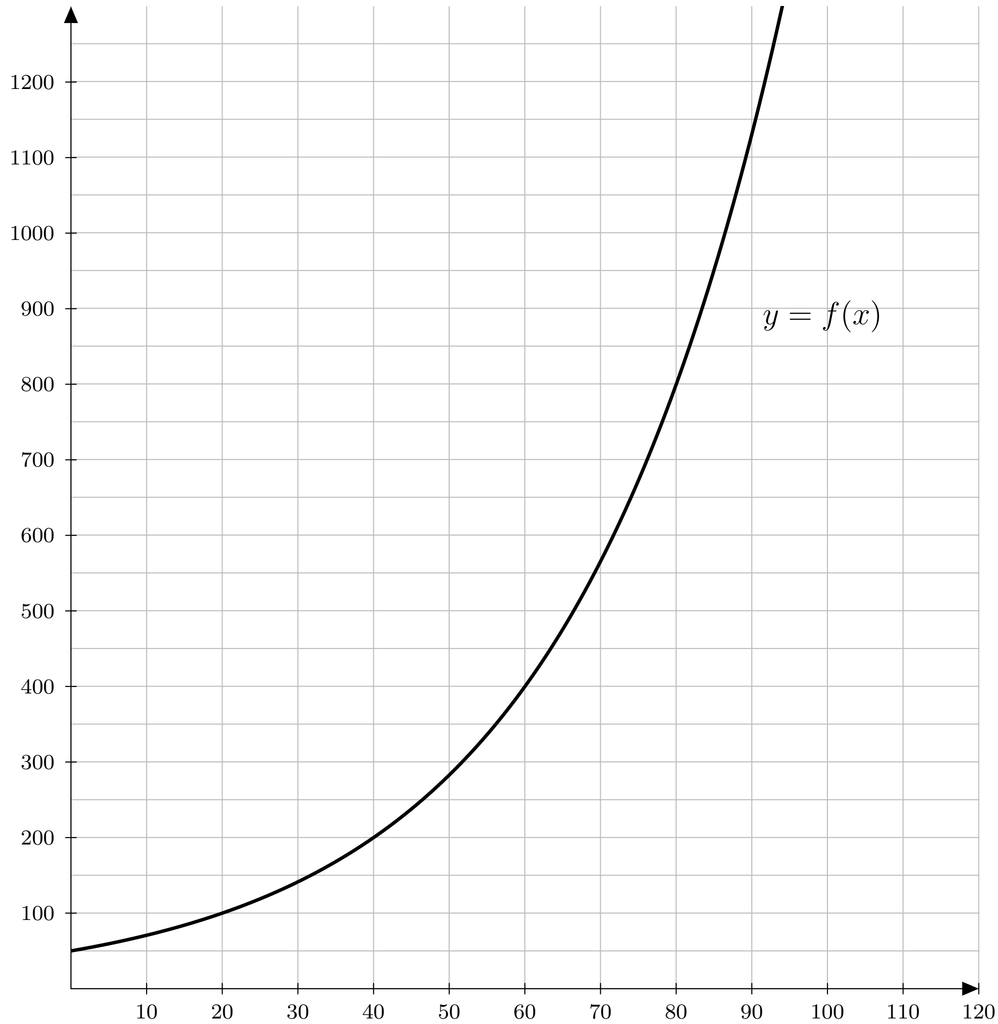
c) Quelle fonction croît le plus rapidement ? Qu'est-ce que cela signifie dans ce contexte ?

d) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$. Interpréter le résultat.

e) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$. Interpréter le résultat.

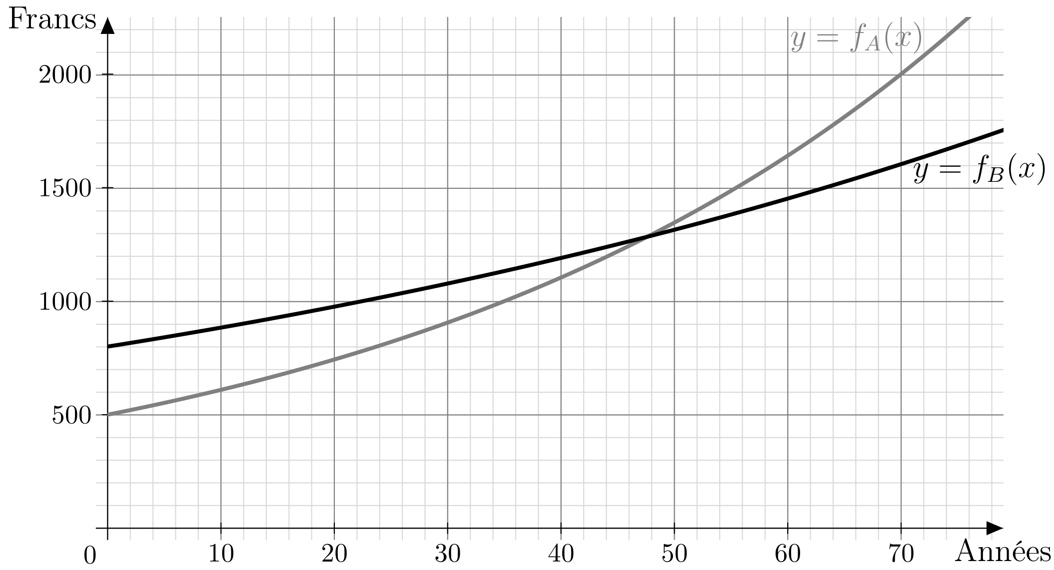
2.38 Un biologiste étudie l'évolution d'une population de bactéries placées dans une culture.
Ces bactéries vont se reproduire par division cellulaire, c'est-à-dire que chaque bactérie va se diviser pour former deux bactéries identiques, et ceci à intervalle régulier.

La fonction f, tracée ci-dessous, représente le nombre de bactéries présentes dans la culture du biologiste en fonction du temps (en minutes) écoulé depuis le début de l'expérience, à 8h du matin.



a) Combien y avait-il de bactéries dans sa culture au début de l'expérience ?
b) Sachant qu'il y a actuellement 700 bactéries dans la culture, déterminer approximativement l'heure qu'il est.
c) Après combien de temps le nombre de bactéries a-t-il doublé ? Quadruplé ?
d) D'après ce graphique, a quel intervalle de temps intervient la division cellulaire ?

2.39 Les deux graphes ci-dessous représentent l'évolution du capital de deux comptes A et B en fonction des années depuis l'ouverture de ces comptes.



a) Déterminer graphiquement l'ordonnée à l'origine de chacune de ces fonctions.
Interpréter ces réponses.

b) Résoudre graphiquement l'équation $f_A(x) = f_B(x)$.
Interpréter la réponse.

c) Combien d'années faut-il pour que le capital placé sur le compte A dépasse celui du compte B ?

d) Combien y a-t-il d'argent sur chaque compte après 20 ans ?
A quoi correspondent ces valeurs par rapport aux fonctions f_A et f_B ?

e) Combien faut-il d'années à chaque placement pour que le capital double ?

Solutions des exercices

Equations

2.1 a) $S = \{2\}$; b) $S = \{-2\}$; c) $S = \{-2; 2\}$; d) $S = \{3\}$; e) $S = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$; f) $S = \left\{\dfrac{-1}{2}\right\}$;
g) $S = \left\{\dfrac{-6}{5}\right\}$; h) $S = \{1\}$; i) $S = \{-8\}$

2.2

a) $x \cong 1.698970004$;	$x = \log(-2)$ n'existe pas ;	$x \cong 1.302883446$
b) $x \cong 2.302585093$;	$x = \ln(0)$ n'existe pas ;	$x \cong 1.144729886$
c) $x \cong 20892.96$;	$x \cong 0.000031$;	$x \cong 11.22018454$
d) $x = e$;	$x \cong 0.0111089965$;	$x \cong 20.08553692$

2.3 a) $x = \dfrac{\ln(3451)}{\ln(145)} \cong 1.63690$; b) $x = \dfrac{\ln(456,35)}{2 \cdot \ln(5)} \cong 1.90230$;
c) $x = \dfrac{\ln(10)}{\ln(1,12)} \cong 20.31776$; d) $x = \dfrac{\ln(40)}{3 \cdot \ln(5)} \cong 0.76401$;
e) $x = \ln(2000) - 1 \cong 6.60090$; f) $x = \dfrac{\ln(0,4)}{-0,5} \cong 1.832581$

Intérêts

2.4 a) 60 francs ; b) 160 jours ; c) 0,3% ; d) 6840 francs

2.5 a) 10′856.65 francs ; b) 900 francs ; c) 5.5% ; d) 12 ans

2.6 26′804.10 francs

2.7 a) 57′801.75 francs ; b) 7500 francs ; c) 3.5% ; d) 15 ans

2.8 Le cadet reçoit 4′852.25 francs et l'aîné reçoit 5′147.75 francs.

2.9 Cela ne dépend pas du capital placé. Le taux est de 9.59%

2.10 41′327.28 francs

2.11 a) 15′125.90 francs ; b) 21′899.55 francs

2.12 12 ans

2.13 a) 622.90 francs ; b) $n \cong 4$; c) Le taux est de 10% ; d) $C_0 \cong 14'538.40$ francs

2.14

C	i	n	C_n
4′720.–	3.5%	12 ans	7′132.25
2′360.–	3.5%	24 ans	5′388.65
9′440.–	3.5%	6 ans	11′604.17
790.–	3.5%	72 ans	9′404.43

2.15 Le capital aurait valu environ 367′014′635\$.

2.16 7 ans.

Applications aux sciences sociales, expérimentales ou économiques

2.17 a) $N(t) = 2000 \cdot 3^{0.2t}$; b) $N(24) = 2000 \cdot 3^{4.8} \cong 390'132$ bactéries ; c) $t \cong 21$ heures

2.18 a) $P(n) = 2000 \cdot 2^{\frac{n}{3}}$; $P(12) = 32'000$; b) $P(12) = 41899.85$; 8 ans 10 mois

2.19 a) $P(0) = 6000$; b) $P(5) \cong 2224$; c) $t \cong 9$ ans

2.20 Selon ce modèle, la taille d'un enfant d'une année est d'environ 76 cm.

2.21 a) Il mesure environ 1.2 m ; b) il pèse environ 37.9 kg.

2.22 $C(t) = 3500 \cdot e^{0.075331 \cdot t} = 3500 \cdot \left(\frac{11}{7}\right)^{\frac{t}{6}}$. Selon ce modèle, il y aura 7434 chiens.

2.23 a) A la naissance, elle pèse environ 306 kg ; b) 26 ans.

2.24 a) 98.0% ; b) 79.4% ; c) 72.1 heures

2.25 a) $b > a$; b) $5^{1113} < 6^{1000} < 5^{1114}$; c) 1′410 chiffres

2.26 a) 24.7 $^\circ$ C ; b) 71 min 14 s

2.27 a) Elle sera de 15.04 $^\circ$ C ; b) il faut le secourir avant environ 19.6 min.

2.28 a) $N(t) = 10'000 \cdot 2^{t/12}$; b) après une semaine, il y aura $1.6384 \cdot 10^8$ bactéries ; c) le nombre de bactéries aura triplé après environ 19 h.

2.29 a) $Q(t) = 1'000 \cdot 0.6^{t/3}$; b) après une année, il y aura environ 129 truites ;
c) il n'y aura plus que 80 truites après environ 14.8 mois.

2.30 a) $N(t) = 10 \cdot 0.8^t$;

b) après 8h, il reste environ 1.68 mg de médicament dans le corps ;

c) il faut attendre 10h, 19min et 8s pour qu'il ne reste plus que 1 mg de médicament dans le corps du patient.

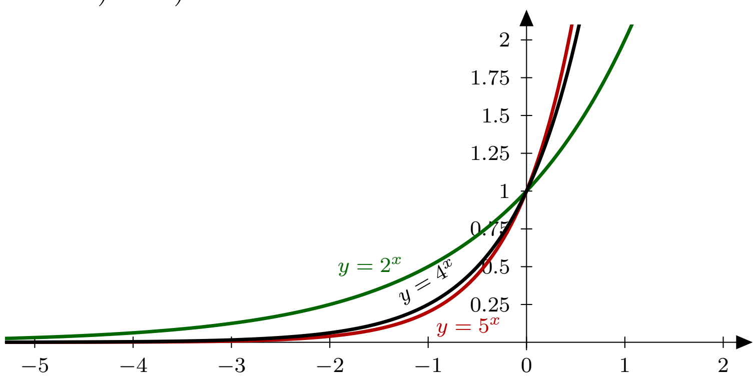
2.31 a) $V(t) = 18'000 \cdot 0,75^t$; b) après 8 ans, la voiture ne vaut plus que CHF $1'802.-$; c) lorsque t est grand, la voiture ne vaut plus rien.

2.32 La modélisation est donnée par $Q(t) = Q_0 \cdot 0,5^{t/5730}$. Ainsi, les grottes de Lascaux datent d'environ 12'708 av. J.C.

2.33 a) 118.4 millions ; b) 2008.

2.34 6.4%

2.35 a) et b)



2.36

a) ~ 0.7 dl $= 70$ ml

b) 2 dl

c) Décroissante. La quantité de glace diminue au fil du temps.

d) $f(x)$ se rapproche de 0. Plus on attend et plus la quantité de glace se rapproche de zéro. Si on attend suffisamment longtemps, il ne devrait plus y avoir de glace du tout.

2.37

a) $f(0) \cong 0.75$ et $g(0) \cong 0.47$.

Au début de l'année 2000, le pays A comptait environ 750'000 habitants et le pays B en comptait environ 470'000.

b) C'est le pays A, car $f(10) \cong 1.1$ et $g(10) \cong 0.9$. $f(10)$ est donc plus grand que $g(10)$.

c) C'est la fonction g. La population du pays B augmente plus rapidement que celle du pays A.

d) $S = \{15\}$. En début 2015, les populations des deux pays étaient égales.

e) $S =]15; 30[$. La population du pays A est inférieure à celle du pays B à partir de 2015.

2.38

a) $f(0) = 50$ donc il y avait 50 bactéries au début de l'expérience.

b) La solution de l'équation $f(x) = 700$ vaut un peu plus de 75. Il est donc un peu plus de 9 heures et quart.

c) Le nombre de bactéries a doublé après 20 minutes, et quadruplé après 40 minutes.

d) Toutes les 20 minutes puisque c'est le temps qu'il faut pour que leur nombre ait doublé.

2.39

a) $f_A(0) = 500$ et $f_B(0) = 800$.

Au début du placement, on dépose 500 francs sur le compte A et 800 francs sur le compte B.

b) $S = \{\sim 47\}$

c) 47 ans

Après 47 ans, il y a autant sur le compte A que sur le compte B.

d) Après 20 ans, il y a environ 750 francs sur le compte A, car $f_A(20) \cong 750$,
et environ 980 francs sur le compte B, car $f_B(20) \cong 980$.

e) Il faut environ 35 ans pour le compte A, car $f_A(35) \cong 2 * f_A(0)$,
et environ 70 ans pour le compte B, car $f_B(70) \cong 2 * f_B(0)$.

Chapitre 3

Probabilités

Définition de la notion de probabilité

3.1 On jette un dé. Quelle est la probabilité d'avoir :

a) le numéro 2 ?

b) un numéro pair ?

c) un numéro supérieur à 4 ?

3.2 On tire une carte d'un jeu de 36 cartes. Quelles sont les probabilités des événements :

a) tirer un as ?

b) tirer un carreau ?

c) tirer le valet de coeur ?

3.3 On tire 3 cartes d'un jeu de 36 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) 3 as ?

b) 2 rois et une dame ?

c) au moins un valet ?

3.4 On jette une pièce de monnaie 4 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) deux fois pile, puis deux fois face ?

b) deux fois pile et deux fois face (ordre quelconque) ?

c) au plus une fois pile ?

3.5 On jette simultanément un dé rouge et un dé blanc. Quelle est la probabilité d'amener :

a) deux numéros égaux ?
b) un 2 et un 5 ?
c) un 2 rouge et un 5 blanc ?
d) une somme égale à 7 ?
e) une somme au plus égale à 3 ?
f) une somme au plus égale à 11 ?

3.6 On tire 13 cartes d'un jeu de 52. Déterminer la probabilité que trois exactement de ces cartes soient des rois.

3.7 D'un jeu de 36 cartes, on extrait simultanément au hasard 3 cartes. Calculer la probabilité de tirer :

a) 3 cartes de même "couleur" [1],
b) 3 rois,
c) 1 as et 2 rois,
d) exactement deux cartes de même "couleur",
e) 2 cartes rouges et 1 noire,
f) 1 as, 1 roi et 1 dame,
g) 1 pique, 1 carreau et 1 trèfle.

3.8 Dans une assemblée de 500 personnes, 300 comprennent le français, 200 l'italien, 90 l'anglais, 160 à la fois le français et l'italien, 60 à la fois le français et l'anglais, 40 à la fois l'italien et l'anglais et 20 comprennent les trois langues.

Si l'on choisit une personne au hasard dans cette assemblée, quelle est la probabilité que cette personne comprenne :

a) exactement 2 de ces 3 langues ?
b) l'une au moins de ces 3 langues ?

1. Contrairement à la couleur d'une carte à jouer (rouge ou noire), la « couleur » est à interpréter comme étant la nature de la carte (pique, coeur, carreau ou trèfle).

3.9 Dans une enquête portant sur les pannes de voitures qui se sont produites au cours d'une année, on a pris en considération, pour un type de voitures déterminés, les possibilités suivantes :

$$P_i = \text{« il y a eu exactement } i \text{ panne(s) »} \quad (\ i = 0, 1, 2, 3\ )$$

Lors du dépouillement de l'enquête, on a constaté que P_0, P_1, P_2 et P_3 se sont produites 543, 310, 156 et 81 fois respectivement. Quelle probabilité y a-t-il, pour un possesseur d'une voiture de ce type, de tomber en panne dans l'année qui vient,

a) exactement une fois ?

b) moins de deux fois ?

3.10 Un appareil fabriqué en très grande série peut être défectueux à cause de 2 défauts différents désignés par A et B. 10% des appareils ont le défaut A, 8% le défaut B et 4% les deux défauts simultanément. Un client achète l'un des appareils produits. Calculer la probabilité qu'il :

a) possède au moins un défaut,

b) possède le défaut A uniquement,

c) possède un seul défaut,

d) ne possède aucun défaut.

3.11 On sait que 60% des élèves d'une école ne portent ni bague, ni collier. De plus, 20% des élèves portent une bague et 30% ont un collier. Si un des élèves est choisi au hasard, quelle est la probabilité qu'il porte :

a) une bague ou un collier ?

b) une bague et un collier ?

3.12 Une agence de voyages fait un sondage statistique sur la connaissance de trois pays désignés par A, B et C. On constate que parmi les personnes interrogées, 42% connaissent A, 55% connaissent B, 34% connaissent C, 18% connaissent A et B, 10% connaissent A et C, 15% connaissent B et C, 8% connaissent A, B et C. Un voyage est prévu pour l'une des personnes qui a répondu aux questions posées à l'occasion de ce sondage. On tire au sort le nom du gagnant. Quelle est la probabilité pour que le gagnant soit une personne :

a) connaissant au moins l'un de ces trois pays ?

b) ne connaissant aucun de ces trois pays ?

c) connaissant deux pays exactement ?

d) connaissant A, mais ne connaissant ni B, ni C ?

3.13 Un connaisseur estime, lors d'un concours de beauté qui voit s'affronter en finale les candidates A, B et C, que A a autant de chances de gagner que B, mais deux fois plus de chances de gagner que C. Le jury ne peut désigner qu'une seule reine de beauté. Quelles sont, du point de vue de notre connaisseur, les probabilités de victoire des trois candidates ?

3.14 Un dé à six faces est pipé. On a $P(1) = 0,1$ et $P(6) = 0,4$. Les autres faces ont la même probabilité d'apparition. On jette une fois ce dé. Quelle est la probabilité :

a) d'obtenir 4,

b) d'obtenir un nombre impair,

c) d'obtenir 4 ou un nombre impair.

Probabilité conditionnelle

3.15 On jette deux dés l'un après l'autre et on considère les événements :

A = "le total des dés est 8",

B = "les deux nombres sont différents",

C = "le premier dé donne un chiffre impair".

Calculer : $P(A)$, $P(A|B)$, $P(A|C)$, $P(A|\overline{B})$, $P(A|\overline{C})$.

3.16 On tire une carte d'un jeu constitué de 36 cartes. Considérons les événements suivants :

A = "la carte tirée est un coeur",

B = "la carte tirée est le valet de coeur",

C = "la carte tirée est une figure de pique (roi, dame ou valet) ou un coeur".

Calculer : $P(B|A)$, $P(A|C)$, $P(B|C)$, $P(C|B)$.

3.17 On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 3/8$, $P(B) = 5/8$ et $P(A \cup B) = 3/4$. Calculer $P(A|B)$ et $P(B|A)$.

3.18 On tire successivement 4 cartes d'un jeu de 36 cartes. Le jeu ayant été brassé convenablement, quelle probabilité a-t-on de tirer :

a) dans l'ordre : l'as de pique, de coeur, de trêfle, de carreau ?

b) les 4 as ?

c) les 4 as, sachant que les deux premières cartes tirées étaient des as ?

d) un as seulement ?

e) un as au moins ?

f) un as au moins, sachant que la première carte tirée n'était pas un as ?

3.19 On sort d'un jeu de carte les 4 as et les 4 rois. On tire successivement au hasard 4 cartes de ces 8 cartes. Quelle probabilité a-t-on de tirer :

a) les 4 as ?

b) un as au moins ?

c) 4 cartes rouges ?

d) 4 cartes de familles différentes ?

e) les 4 as, sachant que la première carte tirée était un as ?

f) les 4 as, sachant que la première carte tirée était un as rouge ?

g) les 4 as, sachant que la première carte tirée était l'as de coeur ?

3.20 On sort d'un jeu de cartes les 4 as et les 4 rois. On tire ensuite au hasard 2 de ces 8 cartes. Quelle probabilité a-t-on de tirer :

a) deux as ?

b) deux as rouges ?

c) au moins un as ?

d) deux as, si l'on sait que l'une des cartes au moins est :

   i) un as ?

   ii) un as rouge ?

   iii) l'as de coeur ?

3.21 La probabilité que la batterie d'une voiture neuve fonctionne plus de 10'000 km est de 80%, la probabilité qu'elle fonctionne plus de 20'000 km est de 40% et la probabilité qu'elle fonctionne plus de 30'000 km est de 10%. Si la batterie d'une voiture neuve fonctionne toujours après 10'000 km, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 20'000 km ?

3.22 On jette une paire de dés équilibrés.

a) Calculer la probabilité que la somme obtenue soit supérieure à 9, sachant que :
   i) le premier dé a donné un 5
   ii) au moins un dé a donné un 5.

b) Sachant que les deux chiffres obtenus sont différents, calculer la probabilité que :
   i) la somme des points soit égale à 6
   ii) la somme des points soit inférieure à 5

3.23 Dans une certaine ville, 40% de la population a les cheveux bruns, 25% a les yeux marron, 15% a à la fois les cheveux bruns et les yeux marron.

On choisit au hasard une personne résidant dans la ville.

a) Si elle a les cheveux bruns, quelle est la probabilité qu'elle ait les yeux marron ?
b) Si elle a les yeux marron, quelle est la probabilité qu'elle n'ait pas les cheveux bruns ?
c) Quelle est la probabilité qu'elle n'ait ni les cheveux bruns, ni les yeux marron ?

3.24 Un hôpital comporte deux salles d'opération qui ont la même probabilité d'être occupées. La probabilité que l'une des salles au moins soit occupée est de 90% et celle que toutes les deux soient occupées 50%.

Quelle est la probabilité :

a) que la première salle soit libre ?
b) que les deux salles soient libres ?
c) que l'une des deux salles au moins soit libre ?
d) qu'une seule salle soit libre ?
e) que la seconde salle soit libre, si l'on sait que la première est occupée ?

3.25 Trois boîtes A,B et C contiennent respectivement :

A : 3 bonbons rouges et 5 noirs,

B : 2 bonbons rouges et 1 noir,

C : 2 bonbons rouges et 3 noirs.

a) On prend une boîte au hasard et on tire un bonbon. Quelle est la probabilité qu'il soit rouge ?
b) Si le bonbon est rouge, quelle est la probabilité qu'il provienne de A ?

3.26 Deux urnes U_1 et U_2 contiennent respectivement :

U_1 : 3 boules rouges et 2 boules vertes $\qquad$ U_2 : 1 boule rouge et 1 boule verte

On tire une boule de U_1 puis on met les boules restantes dans U_2. On tire alors une boule de U_2.

Calculer la probabilité :

a) que cette boule soit rouge
b) que cette boule soit rouge, si l'on sait que la première boule tirée était rouge
c) que la première boule tirée ait été rouge, si au second tirage on a une boule rouge

3.27 Pour sa confrontation annuelle sur les courts de tennis avec Gaston Lagaffe, Achille Talon dispose de deux cartons remplis de balles de tennis :

— le carton I contient 9 balles neuves et 6 balles usagées, mais jouables ;
— le carton II contient 10 balles neuves et 5 usagées, mais jouables.

$\boxed{\text{A}}$ Achille Talon tire du carton I successivement 3 balles au hasard.

(a) Quelle est la probabilité qu'il ait choisi 3 balles neuves ?
(b) Quelle est la probabilité qu'il ait choisi au moins une balle usagée ?
(c) Sachant que les deux premières balles tirées sont usagées, calculer la probabilité que la troisième le soit aussi.

$\boxed{\text{B}}$ Achille Talon choisit un carton au hasard et en sort une balle, prise au hasard également.

(a) Dessiner l'arbre décrivant cette situation.
(b) Quelle est la probabilité que cette balle soit neuve ?
(c) Sachant qu'elle est usagée, calculer la probabilité qu'elle ait été tirée du carton II.

3.28 On fait expérimentalement les constatations suivantes :

- le temps qu'il fait dépend du temps qu'il a fait la veille,
- s'il fait beau un jour, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est 0,8,
- s'il fait mauvais un jour, la probabilité qu'il fasse mauvais le lendemain est 0,6.

Lors d'une journée ensoleillée de printemps, on vous demande de calculer la probabilité :

a) qu'il fasse beau les trois jours suivants,
b) qu'il fasse beau dans trois jours.

3.29 On lance une pièce de monnaie bien équilibrée. Si l'on obtient face, on tire une bille d'une boîte B_1 contenant 3 billes rouges et 2 bleues. Sinon, on tire une bille d'une boîte B_2 contenant 2 billes rouges et 8 bleues.

Sachant qu'on a tiré une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte B_1 ?

3.30 On dispose de deux urnes. La première, A, contient 2 billets verts, 3 rouges et 5 jaunes. La seconde, B, contient 5 billets verts et 3 rouges.

On procède à l'expérience suivante :

Un dé ayant été jeté, on tire un billet de l'urne A si le nombre de points du dé est inférieur à 3, un billet de l'urne B sinon.

Calculer la probabilité :

a) de tirer un billet vert,
b) de tirer un billet vert, sachant que le nombre de points obtenu est supérieur à deux,
c) d'avoir obtenu un nombre de points inférieur à 3, sachant que le billet tiré est rouge,
d) d'avoir obtenu un nombre de points supérieur à 2, sachant que le billet tiré est jaune.

3.31 Le 29 juin prochain, s'il ne pleut pas, un chanteur de rock donnera un concert en plein air au bord du lac à Vevey. Pour se rendre à ce concert, la plupart des spectateurs emprunteront l'autoroute.

Selon les statistiques de la gendarmerie cantonale, la probabilité d'un embouteillage est égale à 70% en cas de manifestation et 25% en l'absence de toute manifestation.

D'après le service de météorologie, la probabilité qu'il ne pleuve pas le 29 juin est de 80%.

Par ailleurs, la commune de Vevey nous assure qu'il n'y a aucune autre manifestation prévue le 29 juin.

a) Au moyen d'un diagramme en arbre, calculer la probabilité qu'il y ait un embouteillage le 29 juin.
b) En revenant de vacances, vous tombez sur une coupure de journal relatant un gigantesque embouteillage survenu le 29 juin sur l'autoroute à la sortie « Vevey ». Calculer la probabilité que le chanteur ait donné son concert à cette date.

3.32 Dans un établissement scolaire, chaque année, la course d'école est fixée un jour de mai. Elle n'a lieu que par temps sec : s'il pleut le jour fixé, elle est reportée au lendemain. S'il pleut les deux jours suivant la date fixée, elle est annulée.

On sait que la probabilité qu'il pleuve un jour de mai est égale à 40%. On sait aussi que s'il pleut un jour du mois de mai, la probabilité qu'il pleuve le lendemain est égale à 70%.

a) Montrer que la probabilité que la course soit annulée est 0.196.
b) Quelle est la probabilité que la course soit reportée au plus une fois ?
c) Sachant que la course a eu lieu, quelle est la probabilité qu'elle se soit déroulée le jour fixé ?
d) Quelle est la probabilité que, sur 5 ans, elle ait lieu exactement 3 fois le jour fixé ?
e) Quelle est la probabilité que, sur 5 ans, elle soit annulée au moins une fois ?

3.33 Pour rien au monde Monsieur C ne raterait une course. Et pourtant sa calvitie précoce l'expose cruellement aux rayons du soleil (lorsqu'il y en a). C'est sans doute la raison pour laquelle il est arrivé 9 fois sur 10 parmi les 10 premiers dans les courses non ensoleillées et seulement 2 fois sur 10 parmi les 10 premiers dans les courses où le soleil se manifeste. Or, trois courses sur dix en moyenne sont ensoleillées.

Quelle probabilité y a-t-il que le temps ait été maussade lors de la dernière course Morat-Fribourg si l'on sait que Monsieur C figure au palmarès en septième place ?

3.34 Étant donné deux urnes contenant respectivement 3 boules rouges, 1 verte, 2 jaunes et 2 boules rouges, 2 vertes, 2 jaunes, considérons l'expérience suivante :

a) Dans un premier temps, on choisit au hasard une urne, d'où l'on en extrait une boule, qu'on met ensuite dans l'autre urne.
b) On tire alors une boule de cette dernière urne.

Calculer la probabilité :

a) que cette boule soit rouge,
b) que cette boule soit rouge, si la première boule tirée était rouge,
c) que cette boule soit rouge, si l'urne tirée était U_1,
d) que l'on ait tiré l'urne U_1, si la dernière boule tirée était rouge.

3.35 Dans un gymnase, 4% des garçons et 1% des filles mesurent plus de 1,8 m. Or, 60% des élèves sont des filles.

On choisit un élève au hasard et on constate qu'il mesure plus de 1,8 m. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

3.36 Une boîte A contient 9 cartes numérotées de 1 à 9 et une boîte B contient 5 cartes numérotées de 1 à 5. On choisit l'une des boîtes au hasard et on en extrait une carte.

Si le numéro est pair, quelle est la probabilité que la carte provienne de A ?

3.37 La probabilité que trois tireurs atteignent une cible est 1/6 pour le premier, 1/4 pour le deuxième et 1/3 pour le troisième. Quelle est la probabilité, lors d'un tir d'ensemble, qu'au moins deux des tireurs atteignent la cible ?

3.38 On répartit sur les faces d'un dé vert et d'un dé rouge les numéros de 1 à 12 de la manière suivante :

- 1, 3, 7, 8, 10 et 11 sur les 6 faces du dé vert ;
- 2, 4, 5, 6, 9 et 12 sur les 6 faces du dé rouge.

Les deux dés sont parfaitement équilibrés.

1) On lance les deux dés simultanément. Calculer la probabilité :
   (a) d'obtenir deux nombres pairs ;
   (b) d'obtenir au moins un nombre pair ;
   (c) d'obtenir un nombre pair et un nombre impair.
2) Jean décide de jouer avec le dé vert et Pierre avec le dé rouge. Jean et Pierre lancent chacun leur dé ; le joueur qui a obtenu le plus grand numéro a gagné la partie :
   (a) Calculer la probabilité que Jean gagne la partie.
   (b) Sachant que Jean a gagné la partie, calculer la probabilité qu'il ait obtenu un 10.

Espérance

3.39 On dispose d'une urne opaque contenant 3 boules vertes, 1 boule rouge et 1 boule bleue. Les boules sont parfaitement identiques au toucher.

On tire successivement des boules de l'urne jusqu'à ce qu'on obtienne une boule verte, et on dénote par X le nombre de boules tirées.

a) Compléter le tableau en calculant les probabilités pour les différentes valeurs de X.

x	1	2	3	4	5	Total
$\mathbb{P}(X = x)$						

b) Calculer l'espérance de X, puis compléter l'interprétation suivante :

Si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois, il faudra en moyenne __________ *tirages pour obtenir une boule verte (soit* _____ *ou* _____ *tirages).*

3.40 On tire au hasard 9 cartes d'un jeu de 36 cartes. Soit X : nombre d'as obtenus.

a) Etablir le tableau contenant les probabilités pour chaque valeur de X.

b) Calculer l'espérance de X et l'interpréter par une phrase.

c) Vrai ou faux ?
Si on tire au hasard 9 cartes dans un jeu de 36 cartes, on aura exactement 1 as.

3.41 On lance deux dés équilibrés. Soit X le plus grand résultat obtenu.

a) Etablir le tableau contenant les probabilités pour chaque valeur de X.

b) Calculer et interpréter l'espérance de X.

c) Vrai ou faux ?
Si on lance deux dés, on a de grandes chances que le plus grand résultat soit 4 ou 5.

3.42 On vous propose le jeu suivant :
Vous lancez deux fois une pièce de monnaie équilibrée. Si vous obtenez deux fois *pile*, vous gagnez 10 francs. Si vous obtenez deux fois *face*, vous gagnez 5 francs. Si vous obtenez une fois *pile* et une fois *face*, vous perdez 15 francs.
Soit X votre gain à ce jeu.

a) Etablir le tableau contenant les probabilités pour chaque valeur de X.

b) Calculer l'espérance de gain de ce jeu.

c) D'après ce résultat, le jeu est-il équitable ?

3.43 Une urne contient 3 boules rouges et 6 boules noires.
Vous tirez au maximum trois boules. A chaque tentative, soit la boule tirée est rouge,

vous gagnez 100 francs et le jeu s'arrête, soit elle n'est pas rouge, vous payez 50 francs et vous continuez le jeu sans remettre la boule tirée dans l'urne.
Accepteriez-vous de jouer à ce jeu ? Justifier par un calcul d'espérance.

3.44 Un jeu de hasard coûte 3 francs la partie. Il consiste à tirer une carte au hasard dans un jeu de 36 cartes. Si l'on tire un coeur, on gagne 5 francs, et si l'on tire un carreau, on gagne 4 francs. Le tirage d'une carte noire (trèfle ou pique) ne rapporte rien.

Soit X le gain **net** d'un joueur. Calculer et interpréter l'espérance de X.

3.45 Un jeu consiste à lancer deux pièces de monnaie équilibrées. On gagne 3 francs si l'on obtient deux fois *face* et 1 franc si l'on obtient une seule fois *face*. Par contre, il faut débourser k francs si l'on n'obtient aucune *face*.
Quelle doit être la valeur de k si l'on veut que le jeu soit équitable ?

3.46 On vous propose le jeu suivant :
Vous payez 6 francs pour participer, puis vous lancez un dé blanc et un dé noir, tous deux équilibrés. Si le dé blanc montre un résultat supérieur au dé noir, vous recevez 12 francs. Sinon, vous perdez votre mise de départ.

a) Ce jeu est-il équitable ? Justifier par un calcul d'espérance.
b) A combien devrait s'élever le prix de départ du jeu pour qu'il soit équitable ?

3.47 Vous avez droit à 3 essais pour obtenir *face* en lançant une pièce de monnaie équilibrée.

— Si vous obtenez *face* du premier coup, vous gagnez 8 francs.
— S'il vous faut deux lancers pour obtenir *face*, vous gagnez 5 francs.
— Si vous n'obtenez *face* qu'au troisième lancer, vous gagnez 2 francs.
— Enfin, si vous ne parvenez pas à obtenir *face* après 3 lancers, vous perdez 40 francs.

Calculer et interpréter l'espérance de gain de ce jeu.

3.48 Dans une exposition consacrée aux jeux de hasard, on propose deux tarifs :

— Le tarif classique : l'entrée coûte 12 francs
— Le tarif "joueur" : le visiteur lance un dé à 6 faces (équilibré), et paie selon son résultat :

résultat	6	5	4	3	2	1
coût d'une entrée	0	5	10	15	20	25

Avez-vous intérêt à choisir le tarif classique ou le tarif joueur ? Justifier par un calcul d'espérance.

Solutions des exercices

3.1 a) $\frac{1}{6} \cong 16.67\%$; b) $\frac{1}{2} = 50\%$; c) $\frac{1}{3} \cong 33.33\%$.

3.2 a) $\frac{1}{9} \cong 11.11\%$; b) $\frac{1}{4} = 25\%$; c) $\frac{1}{36} \cong 2.78\%$.

3.3 a) 0.06% ; b) 0.34% ; c) 30.53%.

3.4 a) 6.25% ; b) 37.5% ; c) 31.25%.

3.5 a) 16.67% ; b) 5.56% ; c) 2.78% ; d) 16.67% ; e) 8.33% ; f) 97.22%.

3.6 4.12%.

3.7 a) 4.71% ; b) 0.06% ; c) 0.34% ; d) 54.45% ; e) 38.57% ; f) 0.90% ; g) 10.21%.

3.8 a) 40% ; b) 70%.

3.9 a) 28.44% ; b) 78.26%.

3.10 a) 14% ; b) 6% ; c) 10% ; d) 86%.

3.11 a) 40% ; b) 10%.

3.12 a) 96% ; b) 4% ; c) 19% ; d) 22%.

3.13 $P(A) = 40\%$; $P(B) = 40\%$; $P(C) = 20\%$.

3.14 a) 12.5% ; b) 35% ; c) 47.5%.

3.15 $P(A) \cong 13.89\%$; $P(A|B) \cong 13.33\%$; $P(A|C) \cong 11.11\%$; $P(A|\overline{B}) \cong 16.67\%$; $P(A|\overline{C}) \cong 16.67\%$.

3.16 $P(B|A) \cong 11.11\%$; $P(A|C) = 75\%$; $P(B|C) \cong 8.33\%$; $P(C|B) = 100\%$.

3.17 $P(A|B) = \frac{2}{5}$; $P(B|A) = \frac{2}{3}$.

3.18 a) 0.000071% ; b) 0.0017% ; c) 0.20% ; d) 33.68% ; e) 38.95% ; f) 31.28%.

3.19 a) 1.43% ; b) 98.57% ; c) 1.43% ; d) 22.86% ; e) 2.86% ; f) 2.86% ; g) 2.86%.

3.20 a) 21.43% ; b) 3.57% ; c) 78.57% ; d) i) 27.27% ; ii) 38.46% ; iii) 42.86%.

3.21 50%.

3.22 a) i) 33.33% a) ii) 27.27% b) i) 13.33% b) ii) 13.33%.

3.23 a) 37.5% ; b) 40% ; c) 50%.

3.24 a) 30% ; b) 10% ; c) 50% ; d) 40% ; e) 28.57%.

3.25 a) 48.06% ; b) 26.01%.

3.26 a) 56.67% ; b) 50% ; c) 52.94%.

3.27

$\boxed{\text{A}}$ a) 18.46% ; b) 81.54% ; c) 30.77%.

$\boxed{\text{B}}$ b) 63.33% ; c) 45.45%.

3.28 a) 51.2% ; b) 68.8%.

3.29 75%.

3.30 a) 48.33% ; b) 62.5% ; c) 28.57% ; d) 0%.

3.31 a) 61% ; b) 91.80%.

3.32 b) 72% ; c) 74.63% ; d) 34.56% ; e) 66.40%.

3.33 91.30%.

3.34 a) 41.67% ; b) 48.57% ; c) 35.71% ; d) 42.86%.

3.35 27.27%.

3.36 52.63%.

3.37 15.28%.

3.38

1) a) 22.22% ; b) 77.78% ; c) 55.56%.

2) a) 52.78% ; b) 26.32%.

3.39

a)

x	1	2	3	4	5	Total
$\mathbb{P}(X = x)$	60%	30%	10%	0%	0%	100%

b) $\mathbb{E}(X) = 1.5$ tirages

*Si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois, il faudra en moyenne **1.5** tirages pour obtenir une boule verte (soit **1** ou **2** tirages).*

3.40

a)

x	0	1	2	3	4	Total
$\mathbb{P}(X = x)$	29.79%	44.69%	21.45%	3.85%	0.21%	100%

b) $\mathbb{E}(X) = 1$

Si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois, on aura en moyenne 1 as.

c) Faux

3.41

a)

x	1	2	3	4	5	6	Total
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$	1

b) $\mathbb{E}(X) \cong 4.47$

Si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois, on aura en moyenne un résultat de 4.47.

c) Faux

3.42

a)

x	-15	5	10	Total
$\mathbb{P}(X = x)$	50%	25%	25%	100%

b) $\mathbb{E}(X) = -3.75$

c) Non, car si l'on y joue un grand nombre de fois, on perdra en moyenne 3.75 francs.

3.43 Soit X le gain du joueur.

x	-150	0	50	100	Total
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{5}{21}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	1

$\mathbb{E}(X) \cong 10.12$

$\Longrightarrow$ oui, on accepte car on gagne en moyenne un peu plus de 10 francs par partie.

3.44 $\mathbb{E}(X) = -0.75$. A ce jeu, on perd en moyenne 75 centimes par partie.

3.45 5 francs

3.46

a) Soit X le gain net d'un joueur. $\mathbb{E}(X) = -1 \Rightarrow$ le jeu n'est pas équitable (on perd en moyenne 1 franc par partie).

b) Il faudrait payer 5 francs la partie pour que le jeu devienne équitable.

3.47 $\mathbb{E}(X) = 0.5 \Rightarrow$ en moyenne, on gagne 50 centimes par partie.

3.48 Soit X le coût d'une entrée avec le tarif joueur.

$\mathbb{E}(X) = 12.5 \Rightarrow$ en moyenne, le tarif joueur revient à 12.50 francs, il vaut donc mieux choisir le tarif classique.

Chapitre 4

Inférence statistique

Loi normale

4.1 On considère une variable aléatoire $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$.
Associer chaque écriture symbolique à la bonne représentation graphique.

a) $Z = 1.5$

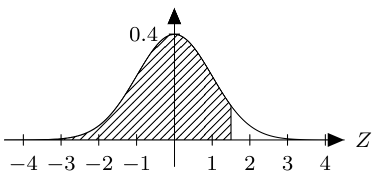
b) $Z \leq 1.5$

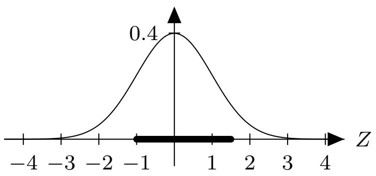
c) $-1 \leq Z \leq 1.5$

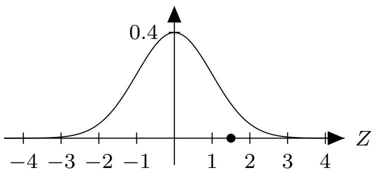
d) $P(Z \geq 1.5)$

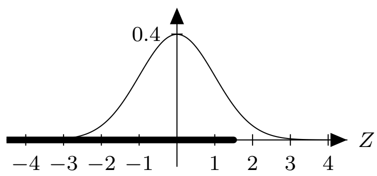
e) $P(Z < 1.5)$

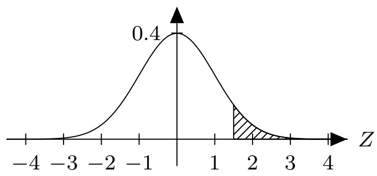
f) $P(-1 \leq Z \leq 1.5)$

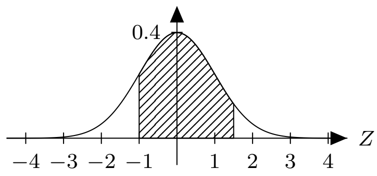
1)


2)


3)


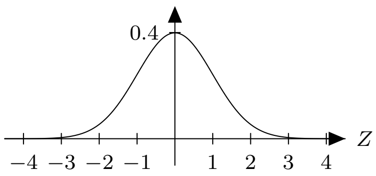
4)


5)


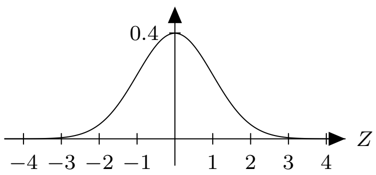
6)


4.2 On considère une variable aléatoire $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$.
Traduire chaque écriture symbolique par une représentation graphique sur la courbe de Gauss.

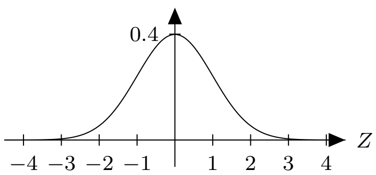
a) $Z = -1$



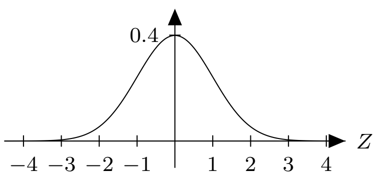
b) $Z > 2$



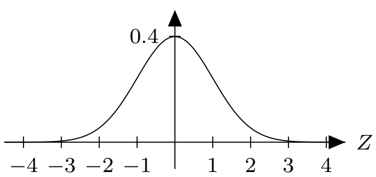
c) $Z < 0$



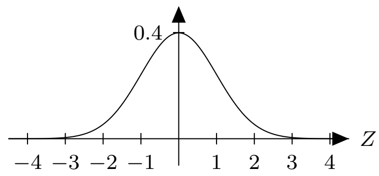
d) $-1 \leq Z \leq 1$



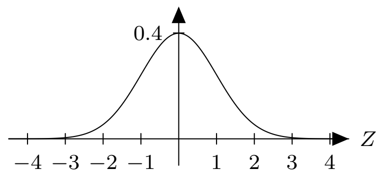
e) $Z \in]-\infty; -1.5[\cup]1; +\infty[$



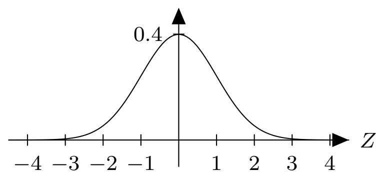
f) $P(Z = -1)$



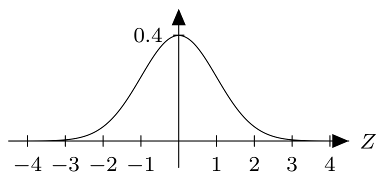
g) $P(Z > 2)$



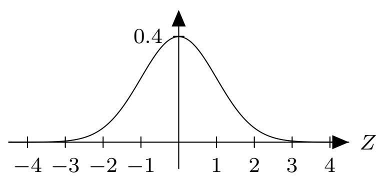
h) $P(Z < 0)$



i) $P(-1 \leq Z \leq 1)$

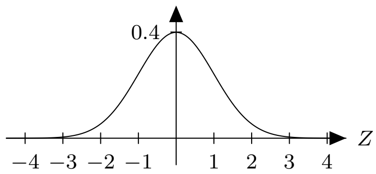


j) $P\left(Z \in]-\infty; -1.5[\cup]1; +\infty[\right)$



4.3 On considère une variable aléatoire $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$. On sait que $P(Z>1) \cong 15.87\%$.

a) Représenter cette probabilité sur la courbe de Gauss.



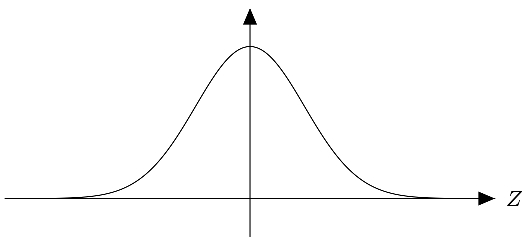
b) En déduire les probabilités suivantes, en s'aidant si nécessaire d'un schéma :

1) La probabilité que Z prenne une valeur inférieure à -1 :
$P(Z<-1) \cong$
2) La probabilité que Z prenne une valeur supérieure à -1 :
$P(Z>-1) \cong$
3) La probabilité que Z prenne une valeur située entre -1 et 1 :
$P(-1<Z<1) \cong$
4) La probabilité que Z prenne une valeur située entre 0 et 1 :
$P(0<Z<1) \cong$
5) La probabilité que la valeur de Z soit située à plus de 1 de la valeur 0 :
$P(|Z|>1) = P\left(Z \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\right) \cong$

4.4 On considère une variable aléatoire $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$.
Utiliser la table de la loi normale pour estimer les probabilités suivantes.

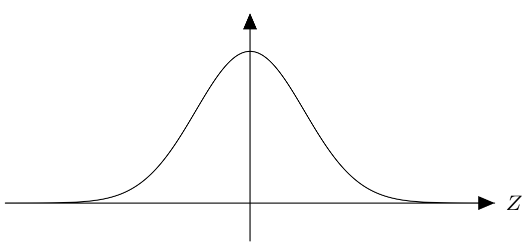
a) $P(Z=0.5)$
b) $P(Z>1.25)$
c) $P(Z>2.5)$
d) $P(Z<2.5)$
e) $P(Z<-2.33)$
f) $P(Z>-1.25)$
g) $P(-2.33<Z<1.25)$
h) $P(1.25<Z<2.5)$
i) $P(-0.5<Z<0)$
j) $P(|Z|<2.5)$
k) $P(|Z|>0.5)$
l) $P\left(Z \in]-\infty;0[\cup]0.5;+\infty[\right)$

4.5 On considère une variable aléatoire $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$.
Représenter graphiquement chaque situation, puis en utilisant la table de la loi normale, déterminer la valeur de a, b, c, d, e et f.



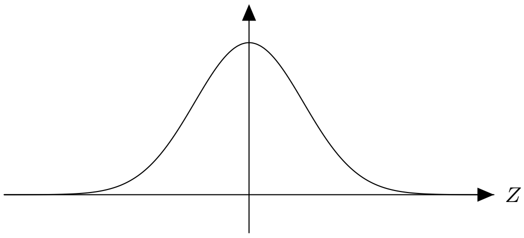
$P(Z>a) = 10\%$

$\Rightarrow a =$



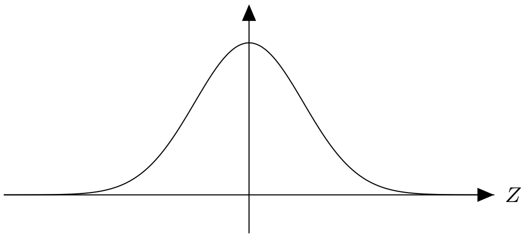
$P(Z>b) = 1\%$

$\Rightarrow b =$



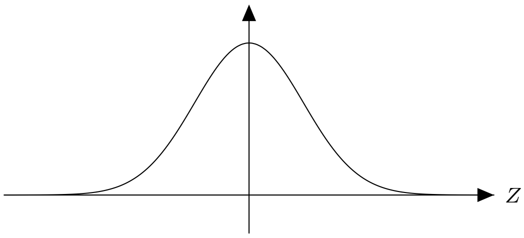
$P(|Z| > c) = 10\%$

$\Rightarrow c =$



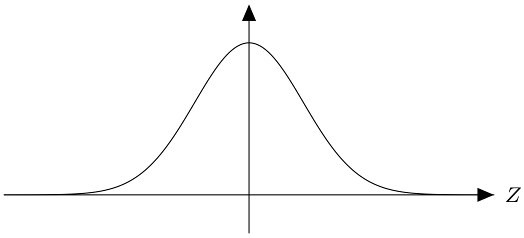
$P(|Z| > d) = 1\%$

$\Rightarrow d =$



$P(-e < Z < e) = 95\%$

$\Rightarrow e =$



$P(-f < Z < f) = 99.9\%$

$\Rightarrow f =$

4.6 Calculer les probabilités en utilisant la table.

a) $P(X > 60)$ avec $X \sim \mathcal{N}(50; 16)$

b) $P(X \geq 3.9)$ avec $X \sim \mathcal{N}(4; 0.09)$

c) $P(X < 325)$ avec $X \sim \mathcal{N}(500; 10'000)$

d) $P(-1 < X < 2)$ avec $X \sim \mathcal{N}(1.5; 4)$

e) $P(20 < X < 28)$ avec $X \sim \mathcal{N}(24; 25)$

f) $P(|X| > 1)$ avec $X \sim \mathcal{N}(0; 10)$

4.7 Déterminer, dans chaque cas, la valeur de c.

a) $X \sim \mathcal{N}(0; 9)$ et $P(X \geq c) = 10\%$

b) $X \sim \mathcal{N}(5; 1)$ et $P(X \leq c) = 30\%$

c) $X \sim \mathcal{N}(100; 100)$ et $P(X > c) = 80\%$

d) $X \sim \mathcal{N}(-6; 4)$ et $P(X < c) = 95\%$

e) $X \sim \mathcal{N}(0; 16)$ et $P(|X| \geq c) = 1\%$

f) $X \sim \mathcal{N}(0; 20)$ et $P(-c < X < c) = 97\%$

4.8 Dans un hôpital, on suppose que l'âge du personnel infirmier suit un modèle normal, de moyenne 42 ans et d'écart-type 7 ans.

a) Quel pourcentage du personnel infirmier a moins de 30 ans ?

b) Quel pourcentage du personnel infirmier a entre 39 et 56 ans ?

c) Quel âge a Nicole, infirmière dans cet hôpital, si l'on sait que seulement 20% du personnel infirmier est plus âgé qu'elle ?

4.9 La durée de vie, en heures, des piles produites par un fabriquant se distribue selon un modèle normal : $X \sim \mathcal{N}(110; 100)$.

a) Quelle est la probabilité qu'une pile dure plus de 125 heures ?

b) Quelle est la probabilité qu'une pile dure entre 95 et 125 heures ?

c) La garantie stipule que si la pile ne dure pas assez longtemps, le fabriquant s'engage à la remplacer gratuitement. A combien d'heures doit-il fixer le seuil de durée garantie pour ne remplacer que 5% des piles vendues ?

4.10 Louis prend tous les jours le train pour venir au Gymnase. En moyenne, il met 16 minutes pour faire le trajet entre chez lui et la gare, avec un écart-type de 3 minutes. On suppose que la distribution du temps de trajet suit un modèle normal.

a) Si Louis part de chez lui à 7h15 alors que le train part à 7h35, quelle est la probabilité qu'il manque son train ?

b) A quelle heure Louis doit-il partir de chez lui pour que la probabilité qu'il manque son train soit réduite à 1% ?

4.11 On suppose que la distribution du quotient intellectuel (QI) suit un modèle normal : $X \sim \mathcal{N}(100; 225)$.

a) Quel pourcentage de la population a un QI compris entre 92 et 108 ?

b) On dit qu'une personne souffre de déficience mentale si son QI est inférieur à 70. Quelle proportion de la population devrait donc souffrir de déficience mentale ?

c) Julien prétend que 80% de la population a un QI inférieur au sien. Quelle devrait être la valeur de son QI ?

4.12 Dans une université, les examens d'admission en médecine sont notés au dixième sur une échelle de 1 à 6. On suppose que la distribution des résultats suit un modèle normal de moyenne 4.12 et d'écart-type 2.7.

a) Quelle est la probabilité qu'un étudiant choisi au hasard ait une note supérieure à 5 ?

b) Si l'université n'admet que 33% des candidats, à quelle note doit-elle fixer le seuil pour choisir les candidats admis ?

4.13 Le tableau suivant donne la répartition de 500 garçons de 3 ans en fonction de leur taille.

Taille en cm	**Nombre de garçons**	**Fréquence (%)**
< 90	22	
$[90\,;\,92[$	47	
$[92\,;\,94[$	84	
$[94\,;\,96[$	113	
$[96\,;\,98[$	109	
$[98\,;\,100[$	75	
$[100\,;\,102[$	35	
≥ 102	15	
Total	**500**	

a) Compléter la dernière colonne du tableau.

b) Représenter les données par un histogramme en pourcentage.

c) Calculer la moyenne, la médiane, la variance et l'écart-type de cet échantillon.

d) D'après la forme de l'histogramme et les valeurs calculées, quel modèle peut-on utiliser pour décrire la taille d'un enfant de 3 ans ?

e) Utiliser ce modèle pour calculer la probabilité qu'un enfant mesure plus de 97 cm.

f) D'après ce modèle, combien mesure au maximum un enfant de 3 ans faisant partie des 10% les plus petits ?

Théorème central limite

4.14 Le revenu annuel moyen des 3'000 médecins d'une région est de 200'000 francs, avec un écart-type de 20'000 francs.
On prélève un échantillon aléatoire de 100 médecins parmi ces 3'000 médecins.

a) Pourquoi peut-on considérer que la moyenne des revenus de ces 100 médecins suit une loi normale ?

b) Calculer les paramètres de cette loi normale.

c) Quelle est la probabilité que le revenu moyen de ces 100 médecins vaille exactement 200'000 francs ?

d) Quelle est la probabilité que le revenu moyen de ces 100 médecins soit compris entre 195'000 francs et 205'000 francs ?

e) Quelle est la probabilité qu'il y ait un écart d'au moins 2'000 francs entre le revenu moyen de ces 100 médecins et celui des 3'000 médecins de cette région ?

4.15 Une entreprise fabrique des câbles d'acier.
On désire vérifier si le diamètre X des câbles est conforme aux normes, à savoir une distribution normale de moyenne 0.90 cm et un écart-type de 0.06 cm. Pour ce faire, on prélève au hasard dans la production 36 câbles dont on mesure le diamètre.

a) Pourquoi peut-on considérer que le diamètre moyen de ces 36 câbles suit une loi normale ?

b) Calculer les paramètres de cette loi normale.

c) On obtient un diamètre moyen de 0.88 cm pour ces 36 câbles. Calculer la probabilité d'obtenir un résultat au moins aussi éloigné des 0.90 cm théoriques.

d) D'après le résultat précédent, diriez-vous que les câbles de cette entreprises sont conformes aux normes ?

4.16 La moyenne d'âge des 200 travailleurs d'une usine est de 38.2 ans, avec un écart-type de 5.4 ans. On suppose que la distribution de l'âge des travailleurs de cette usine suit un modèle normal.
On prélève dans cette population un échantillon aléatoire de 25 travailleurs.

a) Pourquoi peut-on considérer que la moyenne d'âge de ces 25 travailleurs suit une loi normale ?

b) Calculer les paramètres de cette loi normale.

c) Quelle est la probabilité que la moyenne d'âge des 25 travailleurs se situe entre 35 et 40 ans ?

d) Si l'on néglige les valeurs extrêmes ayant moins de 1% de chances d'être obtenues, entre quelles valeurs doit se trouver la moyenne d'âge de ces 25 travailleurs ?

4.17 La moyenne d'âge des femmes ayant donné naissance à un enfant en Suisse en 2015 était de 32 ans avec un écart-type de 5 ans.
On prélève un échantillon aléatoire de 100 femmes ayant donné naissance à un enfant en Suisse en 2015, et on leur pose la question suivante : *Quel âge aviez-vous à la naissance de votre enfant ?*

a) Pourquoi peut-on considérer que la moyenne des réponses des 100 femmes suit une loi normale ?

b) Calculer les paramètres de cette loi normale.

c) Si l'on néglige les valeurs extrêmes ayant moins de 5% de chances d'être obtenues, entre quelles valeurs doit se trouver la moyenne des réponses des 100 femmes ?

d) L'âge moyen de ces 100 femmes à la naissance de leur enfant est de 33.7 ans. Doit-on s'étonner d'obtenir un résultat aussi éloigné de la moyenne en Suisse ? Justifier par un calcul de probabilités.

4.18 Dans un gymnase, 115 élèves de l'école de culture générale ont passé leur examen de mathématiques. On a pu observer que la note de chaque élève suit une loi normale : $X \sim \mathcal{N}(4.1\,;\,1.8225)$.
Un enseignant souhaite déterminer si les élèves de sa classe ont mieux réussi que l'ensemble des élèves du gymnase.

a) Pourquoi peut-on considérer que la moyenne des notes obtenues par les 22 élèves de cette classe suit une loi normale ?

b) Calculer les paramètres de cette loi normale.

c) Quelle est la probabilité que la moyenne des notes des élèves de cette classe soit comprise entre 3.5 et 4.5 ?

d) L'enseignant calcule que la moyenne des notes des élèves de sa classe est de 4.6. Peut-il en déduire que sa classe a particulièrement bien réussi l'examen ? Justifier par un calcul de probabilités.

4.19 En 2015, 67'606 personnes sont décédées en Suisse. L'âge moyen au moment du décès est de 79.6 ans avec un écart-type de 15.02 ans.
On prélève au hasard 500 personnes décédées en Suisse en 2015.

a) Pourquoi peut-on considérer que la moyenne des âges de ces 500 personnes au moment du décès suit une loi normale ?

b) Calculer les paramètres de cette loi normale.

c) Quelle est la probabilité que la moyenne d'âge de ces 500 personnes au moment du décès soit inférieure à 80 ans ?

d) Quelle est la probabilité que l'écart entre la moyenne d'âge de ces 500 personnes et celle de toutes les personnes décédées en 2015 soit inférieur à 1 ans ?

e) Si l'on considère uniquement les 99.5% des valeurs les plus proches de la moyenne suisse, entre quelles valeurs doit se trouver la moyenne d'âge de ces 500 personnes ?

4.20 Vous décidez de tenter votre chance au casino en jouant à la roulette américaine. Cette roulette comporte 38 cases : les cases 1 à 36, le zéro et le double zéro.

Vous décidez de miser à chaque fois 1 franc sur "impair". Si la bille tombe sur une case impaire, le casino vous reverse 2 francs. Si la bille tombe sur une case paire, ou sur le zéro ou le double zéro, vous perdez votre mise.

On peut calculer qu'en moyenne, votre gain à chaque partie sera de -5.3 centimes (il s'agit donc d'une perte !) avec un écart-type de 99.86 centimes.

a) Si vous jouez 50 parties, pourquoi peut-on considérer que votre gain moyen par partie (sur l'ensemble des parties de la soirée) suit une loi normale ?
b) Calculer les paramètres de cette loi normale.
c) Quelle est la probabilité qu'à la fin de la soirée, vous repartiez en ayant gagné quelque chose ?
d) Quelle est la probabilité qu'à la fin de la soirée, vous ayez gagné au total plus de 10 francs ?
e) Si vous ne faites pas partie du 1% des joueurs les plus malchanceux, combien d'argent aurez-vous perdu au maximum durant cette soirée ?

4.21 Un gymnase compte 1500 élèves. On a pu mesurer que la moyenne des dépenses hebdomadaires à la cafétéria était de 17.30 avec un écart-type de 8.90.
Durant la semaine spéciale, 450 élèves partent en voyage d'études, et ne consomment donc rien à la cafétéria. Le gérant de la cafétéria souhaite estimer la perte que cela représente pour lui.

a) Pourquoi peut-on considérer que le montant moyen qu'auraient dépensés les 450 élèves absents suit une loi normale ?
b) Calculer les paramètres de cette loi normale.
c) Quelle est la probabilité que ce montant moyen soit supérieur à 18 francs par élève ?
d) Si l'on néglige le 1% des valeurs les plus hautes, à combien au maximum doit s'élever le montant moyen qu'auraient dépensés ces élèves ?

   A combien s'élève donc, dans le pire cas, la perte totale pour le gérant ?

Intervalles de confiance

4.22 On sait que le poids des contenants remplis par une machine obéit à une loi normale dont l'écart-type σ est 0.7 gramme.
Pour un échantillon aléatoire de 100 contenants prélevés dans la production de cette machine, on obtient un poids moyen de 49.7 grammes.

a) Construire un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95%, permettant d'estimer le poids moyen de tous les contenants remplis par la machine.
Interpréter l'intervalle.

b) Donner et interpréter le risque d'erreur.

c) Donner et interpréter la marge d'erreur.

4.23 On construit un intervalle de confiance pour estimer μ à l'aide d'un échantillon de taille 50.

a) Donner la cote Z à utiliser pour obtenir les niveaux de confiance suivants :
i) 80 % ii) 93 % iii) 97 %

b) Lequel de ces trois niveaux de confiance donnera :
i) la plus petite marge d'erreur ? ii) le plus grand risque d'erreur ?

4.24 Afin de pallier un problème de surcharge de réseau dû aux appels interurbains le jour de la fête des Mères, on désire estimer la durée moyenne de ces appels.
Un échantillon aléatoire de 36 appels a donné une moyenne de 5.3 minutes et un écart-type corrigé de 3.5 minutes.

a) Construire un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95% pour estimer la durée moyenne des appels interurbains ce jour-là.

b) Présenter les résultats obtenus sous a) en complétant le graphique suivant :

Population

$X=$ ________
____ % de chance que :
____ $\leq \mu \leq$ ____
$\sigma =$ ____
$N =$ ____

$\leftarrow$

Echantillon

$\bar{x} =$ ____
$\hat{\sigma} =$ ____
$n =$ ____

c) L'article suivant présente le sondage. Le compléter.

Selon une étude effectuée par sondage, la durée moyenne des appels interurbains le jour de la fête des Mères est de ____ minutes.

Méthodologie
Ce sondage a été mené à partir d'un échantillon de ____ appels interurbains effectuées le jour de la fête des Mères. Avec un échantillon de cette taille, la marge d'erreur est de ____ minutes, ____ fois sur 20.

4.25

a) Utiliser l'information contenue dans le graphique suivant pour estimer μ par intervalle de confiance.

Population		Echantillon
X= volume 90 % de chance que : ____ $\leq \mu \leq$ ____ $\sigma =$ inconnu $N = 1000$	$\leftarrow$	$\bar{x} = 455$ ml $\hat{\sigma} = 8.5$ ml $n = 200$

b) Compléter l'énoncé : Il y a ____ de chances que l'écart entre la moyenne de l'échantillon et la moyenne de la population soit inférieur à ____.

c) Quel type d'estimation utilise-t-on si on pose :
i) $\mu = 455$ ml ? ii) $454.1 \text{ ml} \leq \mu \leq 455.9$ ml ?

d) En négligeant les moyennes $\bar{x}$ ayant moins de 0.3% de chances d'être obtenues, quelle est la plus grande marge d'erreur possible entre μ et $\bar{x}$?
Pourquoi n'utilise-t-on pas cette marge d'erreur pour estimer μ ?

4.26 Une équipe de chercheurs suit le développement de jeunes enfants depuis leur naissance afin d'établir une courbe de croissance indiquant la distribution de leur taille et de leur poids selon l'âge. Voici le tableau de distribution du poids des 500 filles de l'échantillon, à l'âge de trois ans.

Répartition de 500 filles de 3 ans selon le poids

Poids en kg	Nombre de filles
$[11; 12[$	45
$[12; 13[$	80
$[13; 14[$	140
$[14; 15[$	125
$[15; 16[$	70
$[16; 17[$	40
Total	**500**

a) Estimer par intervalle de confiance au niveau de confiance de 95% le poids moyen des filles de 3 ans

b) Dans ce cas-ci, l'estimation ponctuelle serait-elle acceptable ? Jusitifier la réponse.

4.27

a) Si on augmente le niveau de confiance de 90% à 99%, la marge d'erreur dans l'estimation de μ sera-t-elle plus grande ou plus petite ?

b) Si on augmente la taille de l'échantillon tout en gardant le même niveau de confiance, la marge d'erreur dans l'estimation de μ sera-t-elle plus grande ou plus petite ?

4.28 Calculer la taille minimale de l'échantillon à prélever pour estimer le poids moyen de sacs de sucre remplis par une machine, avec une marge d'erreur d'au plus 0.03 kg, en utilisant un intervalle de confiance au niveau de 99%.

On considère que la distribution du poids des sacs obéit à une loi normale dont l'écart type est de 0.1 kg.

4.29 Calculer la taille minimale de l'échantillon à prélever pour estimer à 500 francs près le revenu familial moyen des familles d'un quartier, avec un niveau de confiance de 95%, si on estime l'écart-type des revenus à 3500 francs.

Tests d'hypothèse

4.30 En 2005, les adolescents québécois âgés de 12 à 17 ans consacrent en moyenne 9.5 heures par semaine à l'écoute de la radio. En 2012, un chercheur émet l'hypothèse que l'arrivée des baladeurs numériques et des services de musique en ligne a entraîné une diminution du temps d'écoute de la radio chez les adolescents.

Pour vérifier son hypothèse, il prélève un échantillon aléatoire de 64 adolescents et il établit que ces derniers consacrent en moyenne 8.3 heures par semaine à l'écoute de la radio, avec un écart-type corrigé de 4.2 heures.

a) La moyenne échantillonnale confirme-t-elle l'hypothèse du chercheur ?
Effectuer une test d'hypothèse au seuil de signification de 0.05.

b) À combien peut-on estimer les risques que la conclusion du test soit fausse ?

c) C'est l'hypothèse ____ qui indique le type de test (unilaéral à droite ou à gauche, ou bilatéral) qu'il faut effectuer.

d) C'est l'hypothèse ____ qui donne la moyenne de la courbe normale utilisée pour représenter la distribution d'échantillonnage de $\bar{X}$.

4.31 On veut tester l'hypothèse nulle $H_0 : \mu = 100$.
Pour ce faire, on prélève un échantillon aléatoire de taille 36 dans la population. Supposons que l'on obtienne l'une des trois valeurs ci-dessous comme moyenne échantillonale.

En sachant que $\sigma = 12$ et considérant la position de chacune des valeurs sur la distribution d'échantillonnage de $\bar{X}$, indiquer la valeur qui nécessiterait la construction d'un test d'hypothèse pour décider du rejet ou du non-rejet de l'hypothèse nulle.
Jusitfier votre choix.

$\bar{x} = 93.3$ $\quad\quad$ $\bar{x} = 101.3$ $\quad\quad$ $\bar{x} = 104.6$

4.32

a) Quelle est l'hypothèse testée par un test d'hypothèse : H_0 ou H_1 ?

b) Lequel des quatre énoncés suivants définit le seuil de signification ?
   - Le point à partir duquel on décide de rejeter H_0.
   - La zone de rejet de H_0 : si $\bar{x}$ est dans cette région, on doit rejeter H_0.
   - La probabilité de rejeter l'hypothèse H_0 alors que cette hypothèse est vraie.
   - La probabilité d'accepter l'hypothèse H_0 alors que cette hypothèse est fausse.

c) Commenter l'affirmation suivante :
Lorsqu'on prend la décision de ne pas rejeter l'hypothèse H_0, cela constitue une preuve que cette hypothèse est vraie.

4.33 Formuler les hypothèses H_0 et H_1 pour les situations suivantes, en précisant à chaque fois si l'on effectuera un test unilatéral ou bilatéral.

a) Un fabriquant examine un échantillon de 30 bouteilles remplies par une machine afin de vérifier si celle-ci verse bien, en moyenne, 500 ml de jus par bouteille.

b) Un chercheur émet l'hypothèse que la durée de séjour des touristes dans les hôtels a augmenté à Québec en 2013 par rapport à 2012, où l'on avait observé une moyenne de 2.7 nuitées par personne.

c) La longueur moyenne d'une tige fabriquée par une machine doit être de 35 mm ; on veut vérifier le réglage de la machine.

d) Une machine produit des articles dont le diamètre doit être de 6.25 cm. Si le diamètre moyen d'un lot est inférieur à 6.25 cm, le lot doit être détruit. Par contre, si le diamètre moyen est supérieur à 6.25 cm, les articles pourront tout de même être vendus au même prix (mais pour un usage différent).
On veut vérifier le diamètre moyen des articles.

e) Un chercheur émet l'hypothèse que l'absentéisme des femmes au travail est moindre quand il y a une garderie sur les lieux du travail.
En moyenne, le nombre de jours d'absence des travailleuses du Québec est de 4.4 journées par année.

4.34 Une machine remplit des sacs de sucre de façon telle que le poids de ceux-ci est, en moyenne, de 5 kg avec un écart type de 0.18 kg.

a) On prélève régulièrement un échantillon aléatoire de 50 sacs de sucre dans la production afin de surveiller le réglage de la machine.
Construire une règle de décision, précise au centième près, permettant de s'assurer que les sacs contiennent bien, en moyenne, 5 kg de sucre. Utiliser un seuil de signification de 0.05.

b) Les tableaux suivants donnent, pour les 6 derniers échantillons prélevés, le poids moyen des 50 sacs de sucre de chaque échantillon.
Y a-t-il un échantillon qui indique que la machine était mal ajustée au moment du prélèvement ?

Lundi			**Mardi**		
10h	13h	16h	10h	13h	16h
$\bar{x} = 5.06$ kg	$\bar{x} = 4.98$ kg	$\bar{x} = 4.97$ kg	$\bar{x} = 5.02$ kg	$\bar{x} = 4.96$ kg	$\bar{x} = 4.94$ kg

c) Expliquer ce que signifie un seuil de signification de 0.05 dans le contexte du problème

4.35 Afin d'améliorer le service à la clientèle, une entreprise a informatisé la gestion des stocks.
Avant l'informatisation, le temps nécessaire pour répondre à la demande d'un client suivait une loi normale dont la moyenne était de 8.3 minutes et l'écart type de 3.2 minutes.
À la suite de l'informatisation, un échantillon aléatoire de 25 clients a donné les temps de service suivants, en minutes :

7 9 6 6 3 6 5 7 7 8 10 9 4 3 6 5 7 8 8 3 4 4 6 5 4

Peut-on en conclure, au seuil de signification de 1% que l'informatisation a permis d'accélérer le service à la clientèle ?

4.36 La durée de vie moyenne des tubes fluorescents fabriqués par une entreprise est estimée à 1000 heures. Les techniciens tentent d'améliorer la durée de vie en modifiant la composition du gaz. Un test préliminaire montre que, pour un échantillon de 100 tubes, fluorescents modifiés, la durée de vie moyenne est de 1050 heures.

a) Si l'écart-type corrigé de l'échantillon est de 168 heures, au seuil de signification de 0.01, peut-on en conclure que les néons modifiés durent plus longtemps ?

b) Estimer les risques que la durée de vie moyenne des tubes fluorescents soit toujours de 1000 heures, et donc que la modification du gaz n'a eu aucun effet.

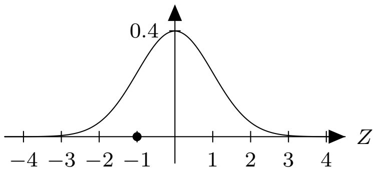
c) La conclusion serait-elle la même si la moyenne de l'échantillon était de 1025 heures ? Peut-on conclure que cela prouve que la durée de vie moyenne réelle des tubes fluorescents produits est bien de 1000 heures ?

Solutions des exercices

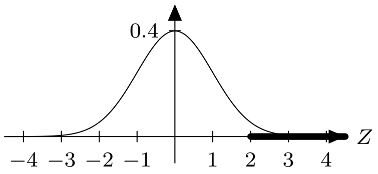
4.1 a) $\to$ 3) b) $\to$ 4) c) $\to$ 2) d) $\to$ 5) e) $\to$ 1) f) $\to$ 6)

4.2

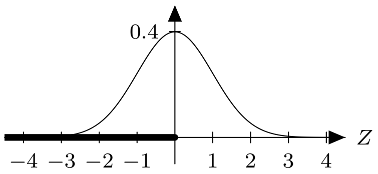
a)



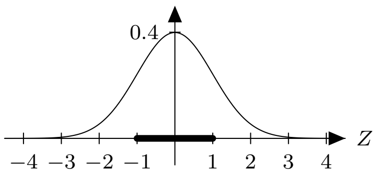
b)



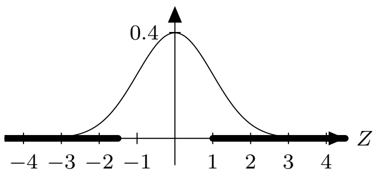
c)



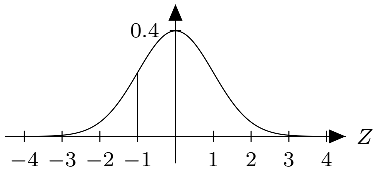
d)



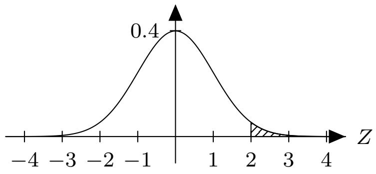
e)



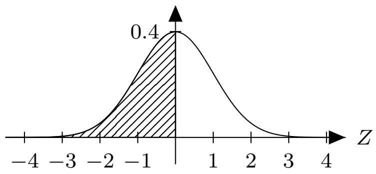
f)



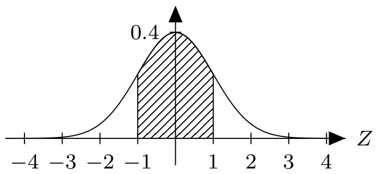
g)



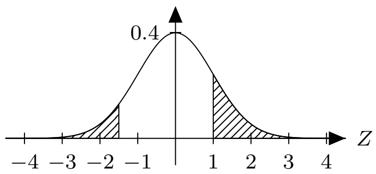
h)



i)

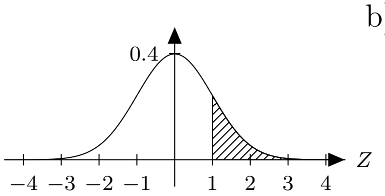


j)



4.3

a)



b) 1) 15.87%

2) 84.13%

3) 68.26%

4) 34.13%

5) 31.74%

4.4

a) 0%

b) 10.56%

c) 0.62%

d) 99.38%

e) 0.99%

f) 89.44%

g) 88.45%

h) 9.94%

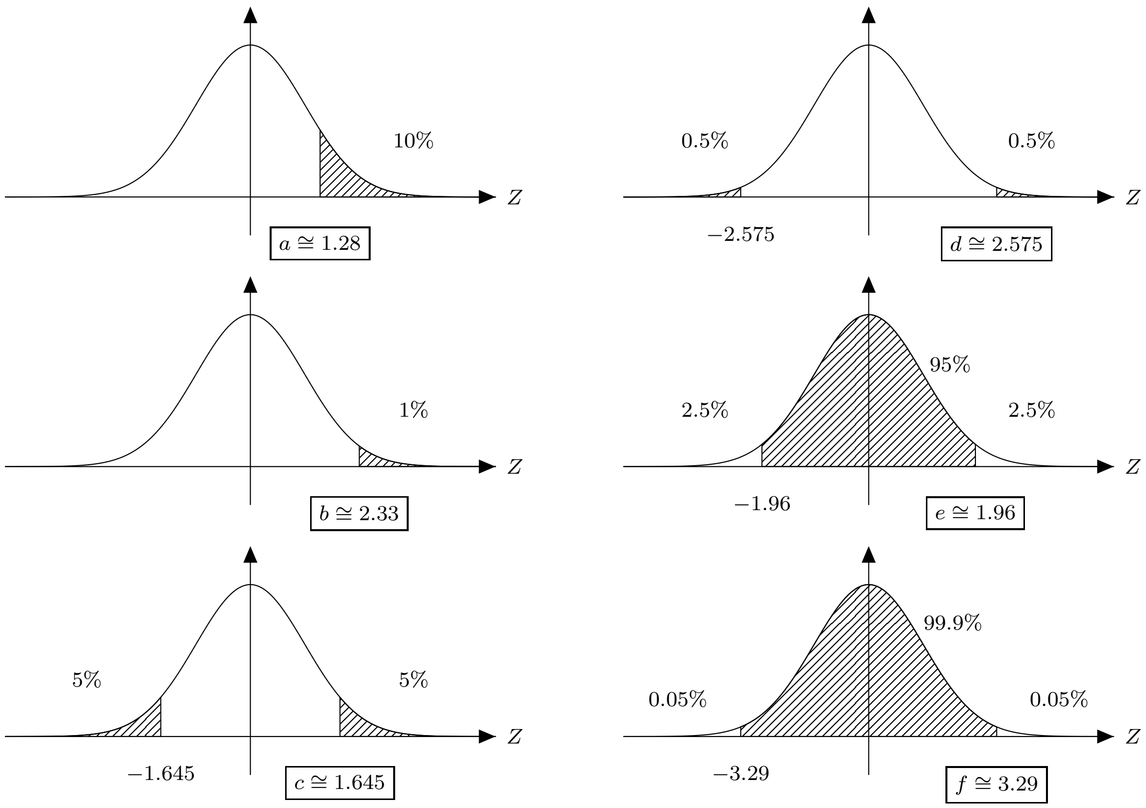
i) 19.15%

j) 98.76%

k) 61.70%

l) 80.85%

4.5



4.6

a) 0.62%

b) 62.93%

c) 4.01%

d) 49.31%

e) 57.62%

f) 74.90%

4.7

a) 3.84

b) 4.48

c) 91.60

d) -2.71

e) 10.30

f) 9.70

4.8 a) 4.36% b) 64.36% c) Nicole a environ 48 ans (47.88 ans).

4.9 a) 6.68% b) 86.64% c) Environ 94 heures (93.55 heures).

4.10 a) 9.18% b) Il doit partir à 7h12.

4.11 a) 40.38% b) 2.28% c) Environ 113 (112.6).

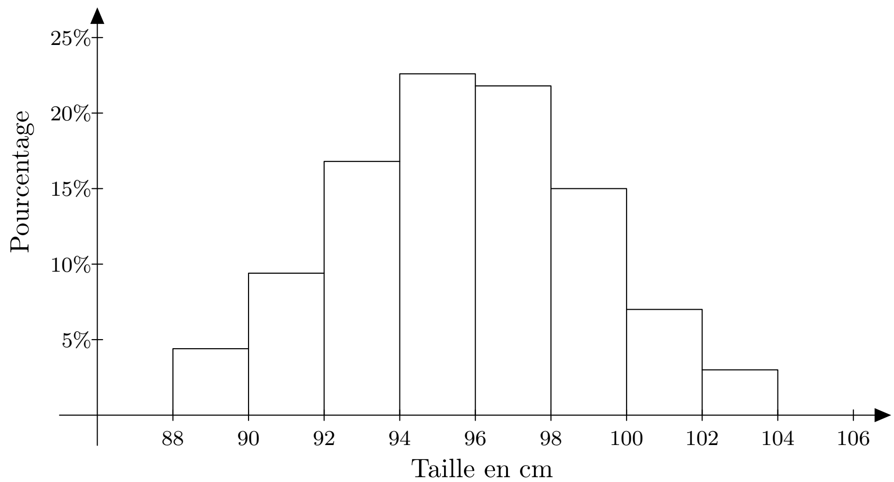
4.12 a) 37.07% b) Le seuil doit être fixé à 5.3.

4.13

a)

Taille en cm	**Nombre de garçons**	**Fréquence (%)**
< 90	22	4.4%
[90 ; 92[	47	9.4%
[92 ; 94[	84	16.8%
[94 ; 96[	113	22.6%
[96 ; 98[	109	21.8%
[98 ; 100[	75	15%
[100 ; 102[	35	7%
≥ 102	15	3%
Total	**500**	**100%**

b)



c) $\bar{x} \cong 95.72$ cm $\tilde{x} \cong 95.72$ cm $s^2 \cong 10.9536$ cm^2 $s \cong 3.31$ cm.

d) L'histogramme a une forme de cloche $\Rightarrow X \sim \mathcal{N}(95.72; 10.9536)$.

e) $\sim$34.83%

f) Environ 91.5 cm (91.48 cm).

4.14

a) Par le TCL, $\bar{X}$ suit **approximativement** une loi normale car $n = 100 \Rightarrow n \geq 30$.

b) $\bar{X} \sim \mathcal{N}(200'000\,;\,4'000'000)$

c) 0%

d) $\sim 98.76\%$

e) $\sim 31.74\%$

4.15

a) Par le TCL, $\bar{X}$ suit **approximativement** une loi normale car $n = 36 \Rightarrow n \geq 30$

b) $\bar{X} \sim \mathcal{N}(0.90\,;\,0.0001)$

c) $\sim 4.56\%$

d) Plutôt oui (à discuter)

4.16

a) $\bar{X}$ suit **exactement** une loi normale car les données de base suivent déjà une loi normale

b) $\bar{X} \sim \mathcal{N}(38.2\,;\,1.0257)$

c) $\sim 96.17\%$

d) Entre 35.6 ans et 40.8 ans

4.17

a) Par le TCL, $\bar{X}$ suit **approximativement** une loi normale car $n = 100 \Rightarrow n \geq 30$

b) $\bar{X} \sim \mathcal{N}(32\,;\,0.25)$

c) Entre 31 et 33 ans environ (31.02 et 32.98)

d) Oui, c'est étonnant, cette situation a 0.06% de chances de se produire !

4.18

a) $\bar{X}$ suit **exactement** une loi normale car les données de base suivent déjà une loi normale

b) $\bar{X} \sim \mathcal{N}(4.1\,;\,0.0676)$

c) $\sim 92.78\%$

d) Oui, il y a 2.74% de chances d'obtenir une moyenne de classe aussi haute, donc la classe est probablement meilleure que l'ensemble des élèves.

4.19

a) Par le TCL, $\bar{X}$ suit **approximativement** une loi normale car $n = 500 \to n \geq 30$

b) $\bar{X} \sim \mathcal{N}(79.6\,;\,0.4512)$

c) $\sim 72.57\%$

d) $\sim 86.38\%$

e) Entre 77.7 ans et 81.5 ans

4.20

a) Par le TCL, $\bar{X}$ suit **approximativement** une loi normale car $n = 50 \Rightarrow n \geq 30$

b) $\bar{X} \sim \mathcal{N}(-5.3\,;\,199.44)$ (en centimes)

c) $\sim 35.20\%$

d) $\sim 3.67\%$

e) 19.10 francs. Il y a donc 99 % de chances que vous ne perdiez pas plus de 19.10 francs.

4.21

a) Par le TCL, $\bar{X}$ suit **approximativement** une loi normale car $n = 450 \Rightarrow n \geq 30$

b) $\bar{X} \sim \mathcal{N}(17.30\,;\,0.1233)$

c) $\sim 2.28\%$

d) Le montant moyen des dépenses hebdomadaires des élèves en voyage d'étude sera au maximum de 18.12 frs.

Il y a donc 99% de chances que la perte totale du gérant ne dépasse pas 8154 francs.

4.22

a) $\bar{x} = 49.7$ g. et $E = z\sigma_{\bar{x}} = 1.96 \cdot \frac{0.7}{\sqrt{100}} = 0.1$ g. $\quad I = [49.6; 49.8]$

Interprétation : Il y a 95% de chances que le poids moyen de l'ensemble des contenants remplis par la machine se situe entre 49.6 et 49.8 grammes.

b) Le risque d'erreur est de 5%. Il y a un risque de 5% que le poids moyen de l'ensemble des contenants remplis par la machine soit inférieur à 49.6 g ou supérieur à 49.8 g.

c) La marge d'erreur $E = 0.1$ g. Il y a 95% de chances d'avoir un écart d'au plus 0.1 g entre le poids moyen des 100 contenants de l'échantillon et le poids moyen de tous les contenants produits.

4.23 a) i) $z = 1.28$ ii) $z = 1.81$ iii) $z = 2.17$

b) i) et ii) Le niveau de confiance de 80%

4.24

a) $I = [4.2; 6.4]$

b)

Population		Echantillon
$X=$ durée des appels 95 % de chance que : 4.2 minutes $\leq \mu \leq$ 6.4 minutes $\sigma =$ inconnu $N =$ grande	$\leftarrow$	$\bar{x} = 5.3$ minutes $\hat{\sigma} = 3.5$ minutes $n = 36$

c) 5.3 Méthodologie : 36 ; 1.1 ; 19.

4.25

a) Attention ! Il faut utiliser le facteur de correction car $1000 = N \leq 20n = 4000$

454.1 ml $\leq \mu \leq$ 455.9 ml

b) 90% ; 0.9 ml

c) i) Une estimation ponctuelle. ii) Une estimation par intervalle de confiance.

d) $E = 3 \cdot 0.54 = 1.6$ ml. (Le calcul exact serait $E = 2.965 \cdot 0.54 \cong 1.6$ ml)

L'emploi de cette marge d'erreur pour estimer μ augmenterait les chances que l'intervalle de confiance comtienne μ à presque 100% (en fait 99.7%), mais il diminuerait la précision de l'estimation en accroissant la marge d'erreur de 0.9 à 1.6 ml. On fait donc le choix de courir un certain risque que l'intervalle construit ne contienne pas μ pour augmenter la précision de l'estimation.

4.26

a) Pour $n = 500$, $\bar{x} = 13.9$ kg et $\hat{\sigma} = 1.4$ kg, on a l'intervalle [13.8 kg ; 14.0 kg].

b) Oui car la marge d'erreur n'est pas très grande par rapport à 13.9 kg. Elle est inférieure à 0.1 kg.

4.27 a) Plus grande. b) Plus petite.

4.28 Au moins 74 sacs.

4.29 Au moins 189 familles.

4.30 a)

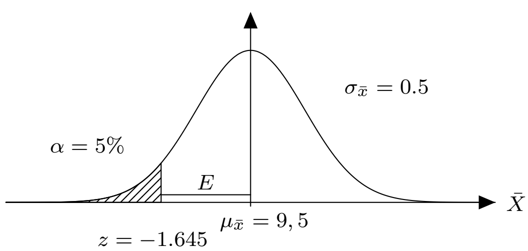
1. Hypothèses et seuil de signification :

   $H_0 : \mu = 9.5$ heures, $H_1 : \mu < 9.5$ heures, $\alpha = 0.05$

   On a $n = 64$, $\bar{x} = 8.3$ heures, $\hat{\sigma} = 4.2$ heures

2. Condition d'application et représentation graphique :

   On a $n \geq 30$, donc $\bar{X}$ suit approximativement une loi normale de moyenne $\mu_{\bar{x}} = 9.5$ et d'écart type $\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \dfrac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \dfrac{4.2}{\sqrt{64}} = 0.525$ heure.



3. Point critique : $E = z\sigma_{\bar{x}} = 1.645 \cdot 0.5 = 0.8$ d'où $c = 9.5 - 0.8 = 8.7$ heures.

4. Règle de décision : rejeter H_0 si la moyenne $\bar{x}$ de l'échantillon est inférieure à 8.7 h.

5. Comme $\bar{x} = 8.3 < 8.7$ heures, on rejette H_0.

   Les adolescents de 2012 consacrent en moyenne moins d'heures par semaine à l'écoute de la radio que ceux de 2005.

   Autre méthode

   $T = \dfrac{8.3 - 9.5}{0.525} \cong -2.29.$

   T suit une loi de Student à 63 degrés de liberté. Comme $n \geq 30$, elle peut être approchée par une loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$.

   Le quantile à 5% de la loi normale vaut $q = -1.645$. On rejette donc H_0 car $T \leq q$.

   Les adolescents de 2012 consacrent en moyenne moins d'heures par semaine à l'écoute de la radio que ceux de 2005.

b) À au plus 5%. c) H_1 d) H_0

4.31

— 93,3 est situé à plus de 3 écarts-type de μ. C'est donc une valeur qui a très peu de chance d'être obtenue comme moyenne d'un échantillon. Il faut rejeter H_0.

— 101,3 est situé à moins de 1 écart-type de μ. C'est une valeur tout à fait probable. On ne rejette pas H_0.

— 104,6 est située dans une zone de la courbe d'échantillonnage de $\bar{X}$ où il n'est pas facile de décider si l'écart entre $\bar{x}$ et μ est trop grand pour être imputable au hasard. Un test d'hypothèse s'avère nécessaire.

4.32

a) L'hypothèse H_0.

b) La probabilité de rejeter l'hypothèse H_0 alors qu'elle est vraie.

c) L'affirmation est fausse. Un test d'hypothèse ne prouve jamais que l'hypothèse H_0 est vraie ; Si on ne la rejette pas lors du test, cela signifie qu'il n'y a aucune évidence statistique justifiant son rejet.

4.33

a) H_0 : la machine verse en moyenne 500 ml ($\mu = 500$ ml)

H_1 : le volume moyen versé par la machine n'est pas de 500 ml ($\mu \neq 500$ ml)

test bilatéral

b) H_0 : les touristes dorment en moyenne 2.7 nuitées à Québec ($\mu = 2.7$ nuitées)

H_1 : les touristes dorment en moyenne plus de 2.7 nuitées à Québec ($\mu > 2.7$ nuitées)

test unilatéral à droite

c) H_0 : la longueur moyenne des tiges est de 35 mm ($\mu = 35$ mm)

H_1 : la longueur moyenne des tiges n'est pas de 35 mm ($\mu \neq 35$ mm)

test bilatéral

d) H_0 : le diamètre moyen des articles est de 6.25 cm ($\mu = 6.25$ cm)

H_1 : le diamètre moyen des articles est inférieur à 6.25 cm ($\mu < 6.25$ cm)

test unilatéral à gauche

e) H_0 : les travailleuses du Québec ayant une garderie sur leur lieu de travail manquent en moyenne 4.4 jours par année ($\mu = 4.4$ jours)

H_1 : les travailleuses du Québec ayant une garderie sur leur lieu de travail manquent en moyenne moins de 4.4 jours par année ($\mu < 4.4$ jours)

test unilatéral à gauche

4.34

a) $H_0 : \mu = 5$ kg $\qquad H_1 : \mu \neq 5$ kg

Sous H_0, $\bar{X} \sim \mathcal{N}(5\,;\,0.025^2) \Rightarrow$ les valeurs critiques pour un seuil de 5% sont $c_1 = 4.95$ kg et $c_2 = 5.05$ kg

Règle de décision : Rejeter H_0 si la moyenne $\bar{x}$ de l'échantillon prélevé est inférieure à 4.95 kg ou supérieure à 5.05 kg.

ou alors

Sous H_0, $\dfrac{\bar{X}-5}{0.025} \sim \mathcal{N}(0\,;\,1)$

Règle de décision : Rejeter H_0 si $\dfrac{\bar{x}-5}{0.025} > 1.96$ ou $\dfrac{\bar{x}-5}{0.025} < -1.96$.

b) Il y en a deux : le lundi à 10h et le mardi à 16h.

c) Il y a 5% de risque de conclure que la machine est déréglée alors qu'en fait, elle est bien réglée.

4.35 La moyenne de l'échantillon est de $\bar{x} = 6.0$ minutes et l'écart-type de la population $\sigma = 3.2$ minutes.

Note : On a $n < 30$ mais comme la distribution du temps de service suit un modèle normal, la distribution d'échantillonnage de $\bar{X}$ suit aussi un modèle normal.

$H_0 : \mu = 8.3$ min $\qquad H_1 : \mu < 8.3$ min $\qquad \sigma_{\bar{X}} = 0.64$ min.

Règle de décision : Rejeter H_0 si la moyenne $\bar{x}$ de l'échantillon prélevé est inférieure à 6.8 min.

Décision et conclusion : Comme $\bar{x} = 6$ minutes < 6.8 minutes, on rejette H_0.

L'informatisation a permis d'accélérer le service à la clientèle.

4.36

a) $H_0 : \mu = 1000$ h $\qquad H_1 : \mu > 1000$ h $\qquad c = 1039,1$ h

On rejette H_0. La durée de vie moyenne des néons modifiés est supérieure à 1000 h.

b) Il y a moins de 1% de chance d'obtenir une moyenne échantillonnale de 1050 heures si la moyenne de la population est de 1000 heures.

La probabilité est tellement faible (en fait, $P(\bar{X} \geq 1050) = P(Z \geq 2.98) = 0.14\%$) qu'on décide de rejeter H_0 en espérant qu'une telle situation ne se soit pas produite.

Le risque de se tromper en décidant de rejeter H_0 est d'au plus 1% (en fait 0.14%)

c) Non, on ne rejetterait pas H_0.

Non, cela signifie simplement que l'écart entre $\bar{x}$ et μ n'est pas statistiquement significatif pour permettre de rejeter H_0. Il faudrait étudier la totalité de la population pour prouver que la moyenne vaut exactement 1000 heures, ce qui n'est évidemment pas faisable !

Chapitre 5

Géométrie dans l'espace

Tracés de solides et calculs de longueurs, d'aires et de volumes

5.1 A l'aide de polydrons, construire un prisme droit dont la base est un triangle équilatéral et dont les faces perpendiculaires à la base sont des carrés.
Si vous ne disposez pas de polydrons, considérez qu'une arête mesure 7 cm et ignorez la question b).

a) Esquisser ce solide.

b) Mesurer la longueur d'une arête de ce solide.

c) Calculer l'aire d'une face triangulaire et celle d'une face carrée. En déduire la surface totale de ce polyèdre.

d) Calculer son volume.

5.2 A l'aide de polydrons, construire un prisme droit dont la base est un hexagone régulier et dont les faces perpendiculaires à la base sont des carrés.
Si vous ne disposez pas de polydrons, considérez qu'une arête mesure 7 cm et ignorez la question b).

a) Esquisser ce solide.

b) Mesurer la longueur d'une arête de ce solide.

c) Calculer l'aire d'une face hexagonale et celle d'une face carrée. En déduire la surface totale de ce polyèdre.

d) Calculer son volume.

e) Quel est la relation entre l'aire de l'hexagone régulier et celle du triangle équilatéral de même côté ?

5.3 A l'aide de polydrons, construire un prisme droit dont la base est un pentagone régulier et dont les faces perpendiculaires à la base sont des carrés.
Si vous ne disposez pas de polydrons, considérez qu'une arête mesure 7 cm et ignorez la question b).

a) Esquisser ce solide.
b) Mesurer la longueur d'une arête de ce solide.
c) Calculer l'aire d'une face pentagonale et celle d'une face carrée. En déduire la surface totale de ce polyèdre.
d) Calculer son volume.

5.4 A l'aide de polydrons, construire une pyramide dont la base est un carré et dont les faces sont des triangles équilatéraux.
Si vous ne disposez pas de polydrons, considérez qu'une arête mesure 7 cm et ignorez la question b).

a) Esquisser ce solide.
b) Mesurer la longueur d'une arête de ce solide.
c) Calculer la surface totale de ce polyèdre.
d) Calculer son volume.

5.5 A l'aide de 6 polydrons carrés et de 8 polydrons triangulaires, construire le polyèdre fermé convexe dont la forme est la plus régulière possible. Ce solide s'appelle le cuboctaèdre.
Si vous ne disposez pas de polydrons, considérez qu'une arête mesure 7 cm et ignorez la question d).

a) Observer que le cuboctaèdre peut s'inscrire dans un cube.
b) Dessiner un cube en perspective. Inscrire un cuboctaèdre dans ce cube.
c) Exprimer l'arête de ce cube en fonction de celle du solide
d) Mesurer la longueur d'une arête de ce solide.
e) Calculer l'aire d'une face triangulaire et celle d'une face carrée. En déduire la surface totale de ce polyèdre.
f) Calculer son volume.

5.6 Construire un tétraèdre avec des polydrons.
Si vous ne disposez pas de polydrons, considérez qu'une arête mesure 7 cm et ignorez la question b).

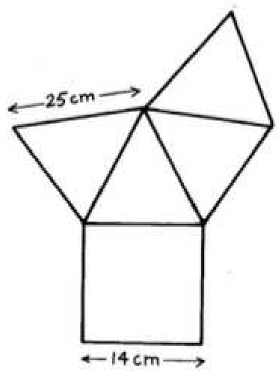
a) Esquisser ce solide.
b) Mesurer la longueur de l'arête du tétraèdre.
c) Calculer l'aire d'une face. En déduire la surface totale de ce polyèdre.
d) Calculer la hauteur de ce tétraèdre et en déduire son volume.

5.7 Voici le croquis du développement d'une pyramide régulière à base carrée.

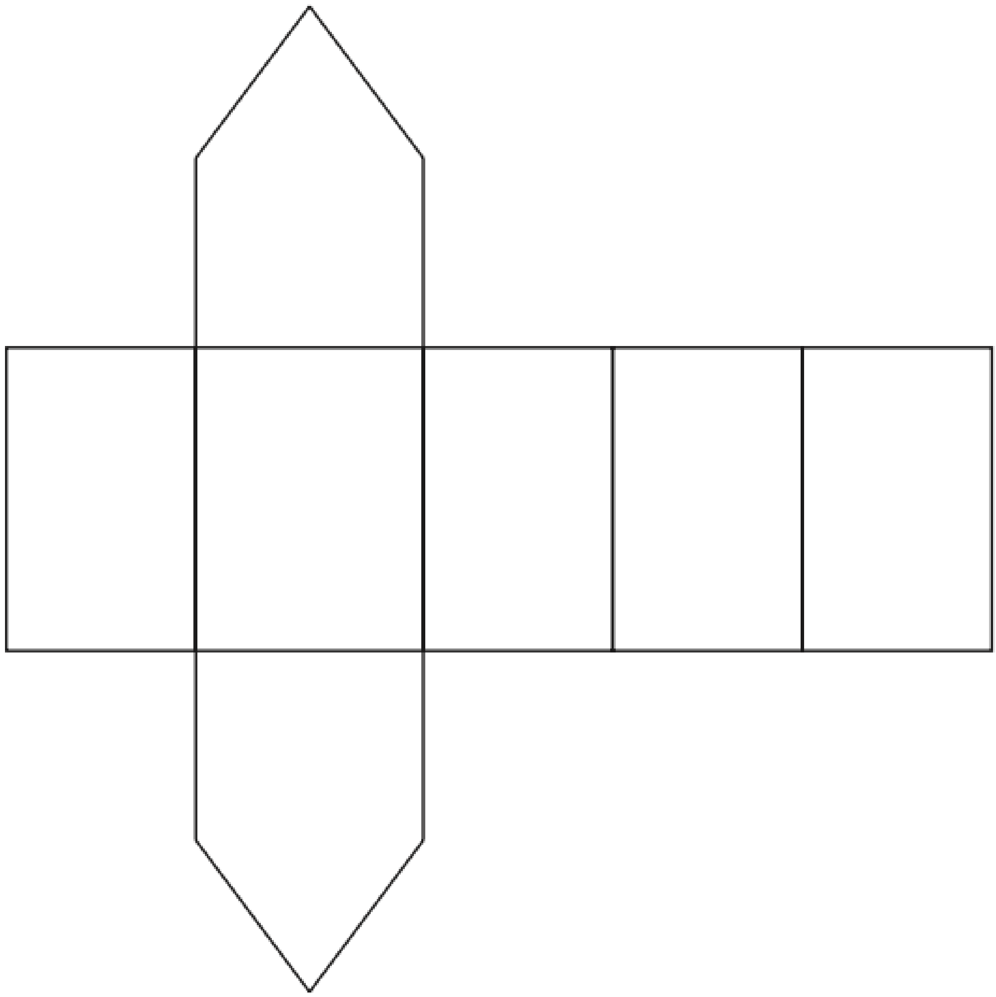
a) Esquisser cette pyramide.

b) Déterminer le nombre d'arêtes, de sommets et de faces de cette pyramide.

c) Calculer l'aire totale A et le volume V de cette pyramide.



5.8 Voici en vraie grandeur le développement d'un prisme :



a) Esquisser ce prisme.

b) Déterminer le nombre d'arêtes, de sommets et de faces de ce prisme.

c) Calculer l'aire totale A et le volume V de ce prisme.

5.9 On considère la pyramide régulière dont la base est un hexagone régulier de côté 3 *cm* et dont la hauteur mesure 4 *cm*.

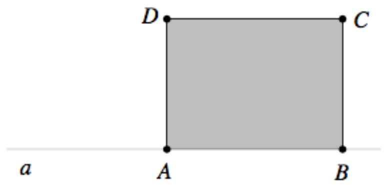
a) Déterminer le nombre d'arêtes, de sommets et de faces de cette pyramide.

b) Représenter le dévoloppement de cette pyramide en vraie grandeur.

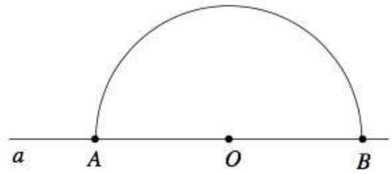
c) Calculer l'aire totale A et le volume V de cette pyramide.

5.10

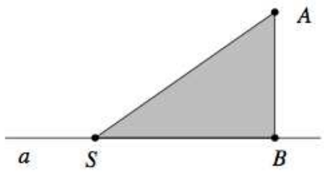
a) Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation du rectangle $ABCD$ autour de l'axe a, où $AB = 5$ cm et $AD = 4$ cm.



b) Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation du demi-disque de centre O et de diamètre AB autour de l'axe a, où $AB = 10$ cm.



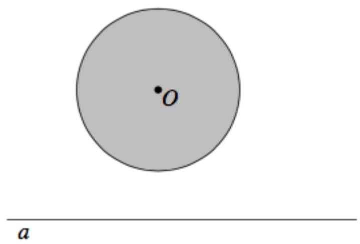
c) Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation du triangle SAB autour de l'axe a, où $AB \perp SB$, $SB = 15$ cm et $AB = 10$ cm.



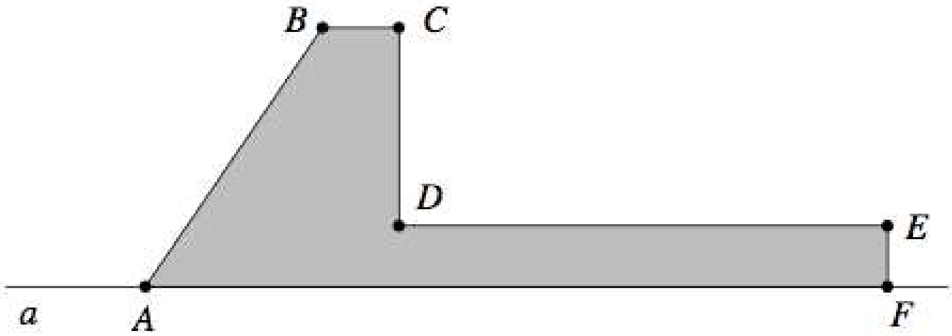
5.11

a) Représenter par un dessin en 3D le solide de révolution engendré par la rotation du disque de centre O autour de l'axe a.

b) Ce volume s'appelle un tore. Si le rayon du cercle est égal à $r = 5$ cm et si la distance du point O à la droite a est égale à $R = 8$ cm, calculer le volume du tore avec la formule $V = 2\pi^2 r^2 R$.

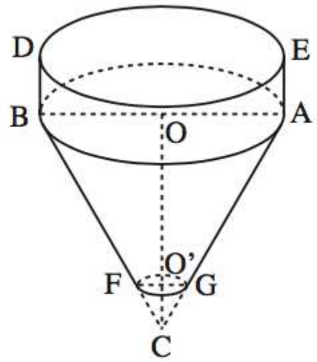


5.12 Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation du polygone $ABCDEF$ autour de l'axe a, où $BC \perp CD$, $CD \perp DE$, $DE \perp EF$, $AF = 100$ cm, $BC = 15$ cm, $DE = 65$ cm, $CD = 35$ cm et $EF = 10$ cm.



5.13

Un pluviomètre a la forme d'un cône de révolution dont on a coupé la pointe et surmonté d'un cylindre.



$AC = 25$ cm , $AG = 20$ cm , $AB = 14$ cm , $AE = 4$cm , O est le milieu de AB , O' est le milieu de FG.

a) Calculer la contenance totale en cm^3 sour la forme $k\pi$, puis donner sa valeur en dm^3 au centième près.

b) Peut-on verser dans ce pluviomètre 1 litre d'eau ?

5.14 Quel est le nombre d'arêtes d'un parallélépipède et d'un prisme à base hexagonale ?

5.15 Par deux arêtes opposées et parallèles d'un cube de côté a on fait passer un plan. Déterminer la nature du polygone de section et calculer son aire.

5.16 Un prisme droit $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ a pour base $ABCDEF$ un hexagone régulier de côté 7 cm. Ses faces latérales sont des carrés. Calculer la longueur exacte des diagonales AB', AC' et AD'.

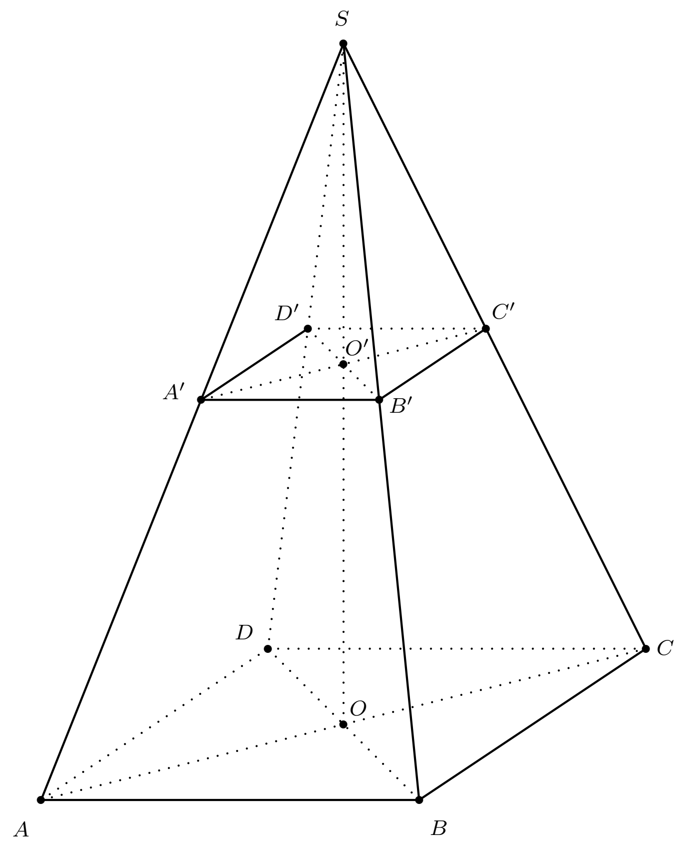
5.17 Quel est la longueur du côté de la base d'un prisme hexagonal régulier dont l'aire totale est égale à 92.7846 cm^2 et dont la hauteur est égale à 3 fois le côté de la base ?

5.18 La base de la pyramide $SABCD$ est le rectangle $ABCD$ de centre O. On connaît $AB = 3$ cm et $BD = 5$ cm. La hauteur SO mesure 6 cm.

a) Calculer AD.

b) Calculer le volume de la pyramide $SABCD$.

c) Soit O' le milieu de SO. On coupe la pyramide par un plan passant par O' et parallèle à sa base. Calculer le volume de la pyramide $SA'B'C'D'$.



5.19 Quel est le volume d'une pyramide régulière à base carrée dont le coté est a et l'arête latérale $2\,a$?

5.20 On considère un prisme droit de hauteur h, dont la base est un hexagone régulier de côté a, ainsi que le cylindre inscrit et le cylindre circonscrit à ce prisme.

a) Calculer l'aire latérale et le volume du prisme.

b) Calculer l'aire latérale et le volume des deux cylindres.

c) Déterminer le rapport des aires latérales et des volumes des deux cylindres.

5.21 On veut construire un cône circulaire droit en papier. Le diamètre de la base doit être 6 cm et l'aire de la base doit être égale aux 3/5 de sa surface latérale. Calculer :

a) Le rayon et l'angle du secteur qui représente le développement de sa surface latérale.

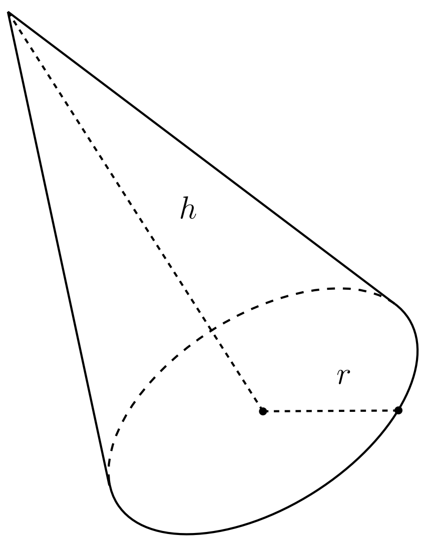
b) Le volume du cône.

5.22 La base d'une pyramide régulière est un hexagone régulier dont le côté mesure 2 unités. La longueur de chaque arête latérale vaut 4 unités. Calculer

a) la hauteur de cette pyramide et son volume ;

b) l'aire d'une face latérale et l'aire totale de cette pyramide.

5.23 On donne un cône dont la hauteur mesure 73.25 cm et dont le rayon de la base vaut 24.35 cm. Donner son volume en cm^3. Combien de litres cela représente-t-il ?



5.24 Partant du cube $ABCDEFGH$ d'arête 4 cm, on définit la pyramide de sommet E (AE est une arête du cube) et de base ABD.

a) Dessiner le cube en perspective. Dans une autre couleur, représenter la pyramide dans le cube.

b) Construire un développement de cette pyramide et calculer son aire.

c) On coupe cette pyramide posée sur sa base par le plan horizontal qui passe par le milieu de AE. Quel est, en cm^3, le volume de la portion de la pyramide comprise entre la base ABD et ce plan ?

5.25 On a représenté ci-dessous le cube $ABCDEFGH$ dont le côté mesure 8 cm. Sur ce dessin, placer les milieux M, N, O et P des segments AB, AD, EF et EH, respectivement.

a) Dessiner le prisme $AMNEOP$ avec visibilité.

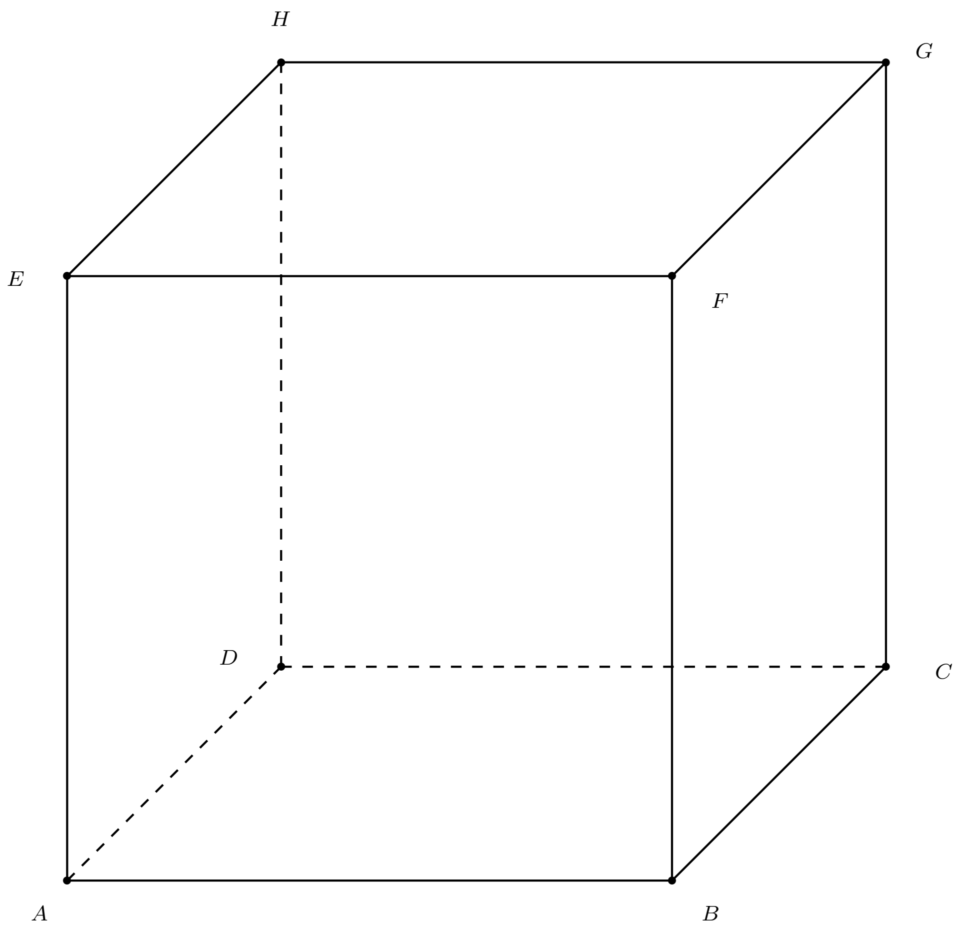
b) Calculer la longueur totale de ses arêtes.

c) Calculer son aire totale et son volume.

Placer encore les points Q, R, S et T, qui sont les milieux des segments BC, DC, FG et HG, respectivement.

a) Dessiner le prisme $BQRDFSTH$ avec visibilité.

b) Calculer son volume.



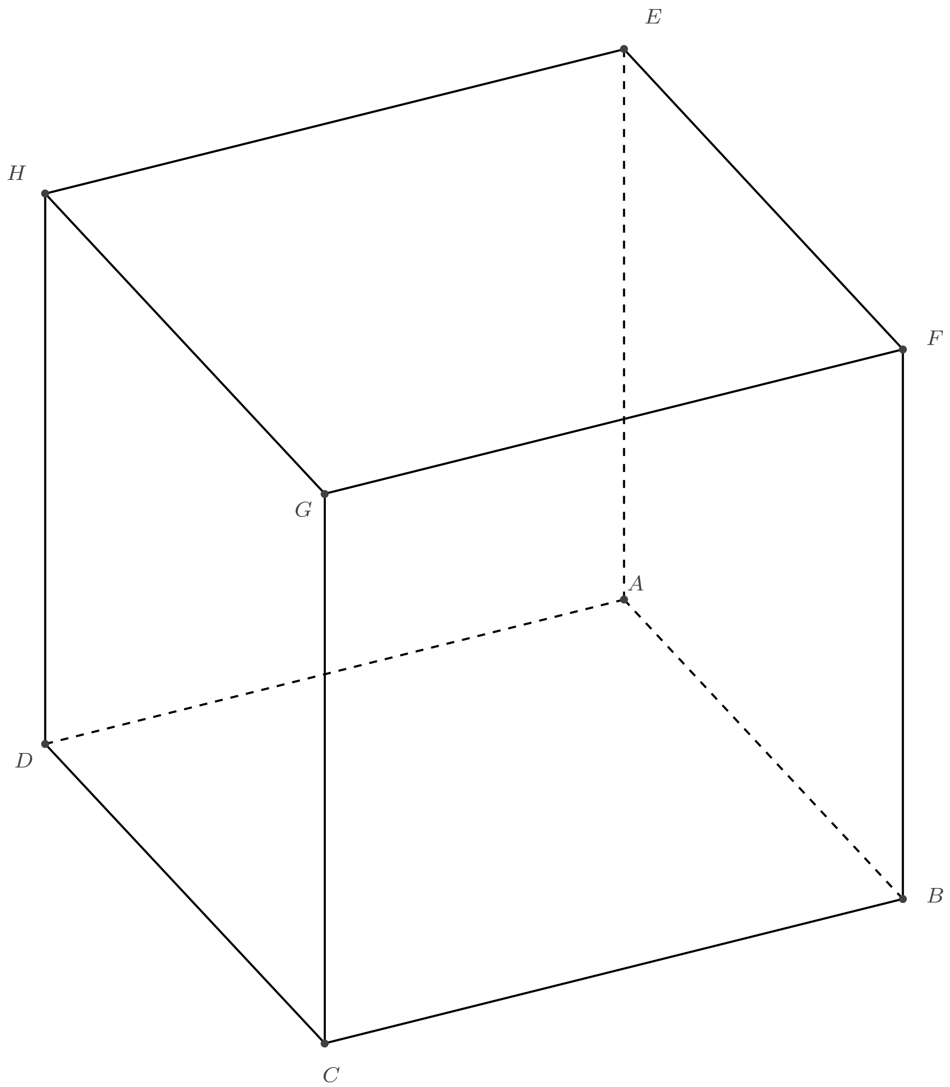
5.26 On a tracé ci-dessous à l'aide d'une axonométrie orthogonale, le cube $ABCDEFGH$ dont le côté mesure 10 cm.

a) Placer sur le dessin le milieu M de la face $EFGH$.

b) Dessiner la pyramide de sommet M et de base $ABCD$, avec visibilité.

c) Soit N le milieu de l'arête GC et O le milieu du segment GN. On considère le plan horizontal qui passe par O. Représenter les intersections de ce plan avec le cube.

d) Le plan en question découpe la pyramide $MABCD$ en deux polyèdres. Décrire ces polyèdres et calculer le volume et l'aire totale de chacun.

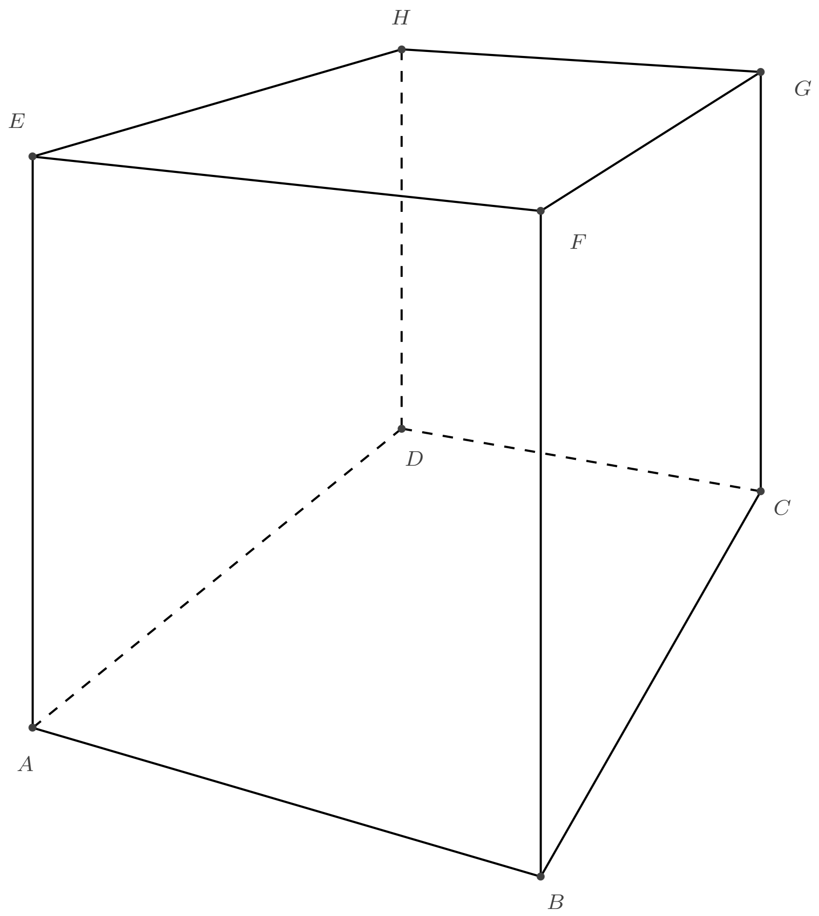


5.27 Dans le cube $ABCDEFGH$, représenté ci-dessous en perspective centrale, on considère le solide de sommets B, D, E et G.

a) Représenter ce solide.

b) De quel type de solide s'agit-il ? En donner une description précise.

c) Dessiner un développement de ce solide.



5.28 L'image ci-contre représente le poids d'un fil à plomb de maçon.

On suppose, pour simplifier les calculs, que le poids est formé d'un cône droit, surmonté d'une demi-sphère. On sait que le rayon de la sphère doit valoir le quart de la hauteur du cône.

a) Calculer le volume de cette pièce si la hauteur du cône vaut 5.47 cm.

b) Un poids de ce genre a été réalisé en Zamak, un alliage à base de zinc, dont la masse volumique vaut 6.975 g/cm^3. Sachant qu'il a une masse de 500 g, calculer ses dimensions.

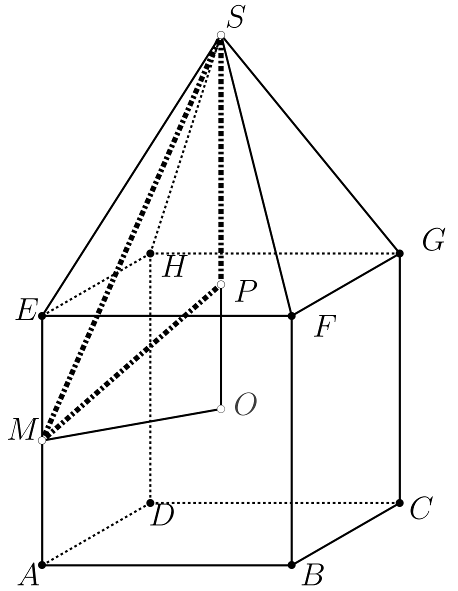
5.29 Sur la figure ci-contre, on a représenté un cube $ABCDEFGH$ sur lequel est posée une pyramide $SEFGH$.

- — Le côté du cube vaut 4 centimètres.
- — La hauteur de la pyramide mesure elle aussi 4 centimètres.
- — Le point P est le centre de la face $EFGH$.
- — Le point O est l'intersection des diagonales du cube.
- — Le point M est le milieu du segment EA.

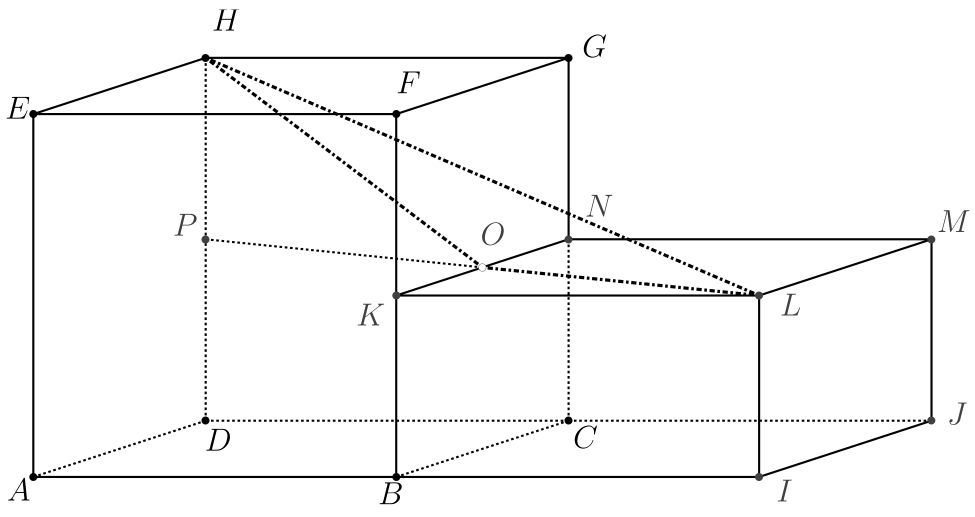
a) Calculer les longueurs MO, MP et MS.

b) Trouver les valeurs de tous les angles du triangle MOP.

c) Soit Q le milieu du segment MP. Calculer la valeur de l'angle QSP.



5.30 Sur la figure ci-dessous, on a représenté un cube $ABCDEFGH$ contre lequel est posé un « demi-cube » $BIJCKLMN$. On sait que la mesure du côté du cube vaut quatre centimètres. De plus, la hauteur du « demi-cube » mesure la moitié de la hauteur du cube. On sait encore que le point P est le milieu du segment HD et que le point O est le milieu de l'arête NK.



a) Calculer les longueurs OL, PO et HO.

b) Trouver les valeurs de tous les angles du triangle HOP.

c) Soit maintenant Q, le milieu du segment OL. Calculer la valeur de l'angle OHQ.

Solutions des exercices

5.1

a) –

b) $a \cong 7$ cm

c)
- Aire d'une face triangulaire : $\dfrac{49\sqrt{3}}{4} \cong 21.22$ cm^2
- Aire d'une face carrée : 49 cm^2
- Surface totale : $147 + \dfrac{49\sqrt{3}}{2} \cong 189.44$ cm^2

d) $V = \dfrac{49\sqrt{3}}{4} \cdot 7 \cong 148.52$ cm^3

5.2

a) –

b) $a \cong 7$ cm

c) Aire d'une face hexagonale : $\dfrac{147\sqrt{3}}{2} \cong 127.31$ cm^2

Aire d'une face carrée : 49 cm^2

Surface totale : $147\sqrt{3} + 294 \cong 548.61$ cm^2

d) $V = \dfrac{1029\sqrt{3}}{2} \cong 891.14$ cm^3

e) Un hexagone régulier peut être pavé à l'aide de 6 triangles équilatéraux dont la mesure du côté est la même que celle de l'hexagone. L'aire de l'hexagone vaut donc 6 fois celle du triangle équilatéral de même côté.

5.3

a) –

b) $a \cong 7$ cm

c) Aire d'une face pentagonale : ~ 84.30 cm^2

Aire d'une face carrée : 49 cm^2

Surface totale : ~ 413.61 cm^2

d) $V \cong 590.12$ cm^3

5.4

a) –

b) $a \cong 7$ cm

c) – Aire d'une face triangulaire : $\frac{49\sqrt{3}}{4} \cong 21.22$ cm^2

– Aire d'une face carrée : 49 cm^2

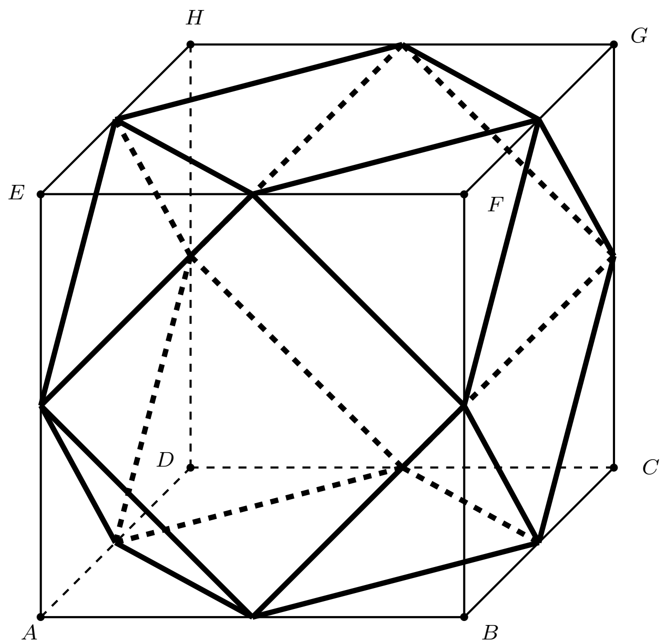
– Surface totale : $49\sqrt{3} + 49 \cong 133.87$ cm^2

d) $V = 49 \cdot \dfrac{343\sqrt{2}}{6} \cong 80.85$ cm^3

5.5

a) –

b)



c) Soit a la mesure de l'arête du solide et c la mesure de l'arête du cube. On a $c = a \cdot \sqrt{2}$

d) $a \cong 7$ cm

e) – Aire d'une face triangulaire : $\dfrac{49\sqrt{3}}{4} \cong 21.22$ cm^2

– Aire d'une face carrée : 49 cm^2

– Surface totale : $98\sqrt{3} + 294 \cong 463.74$ cm^2

f) $V = \dfrac{1715}{3}\sqrt{2} \cong 808.46$ cm^3

5.6

a) –

b) $a \cong 7$ cm

c)
- Aire d'une face triangulaire : $\frac{49\sqrt{3}}{4} \cong 21.22$ cm^2
- Surface totale : $49\sqrt{3} \cong 84.87$ cm^2

d) $H = a \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{3} \simeq \boxed{5.72 \text{ cm}}$ et $V = a^3 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{12} \cong 40.42$ cm^3

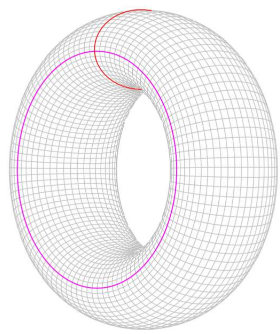
5.7 8 arêtes, 5 sommets et 5 faces. $A = 868$ cm^2 et $V \cong 1499,82$ cm^3.

5.8 15 arêtes, 10 sommets et 7 faces. $A = 73$ cm^2 et $V = 42$ cm^3.

5.9 12 arêtes, 7 sommets et 7 faces. $A \cong 66,31$ cm^2 et $V \cong 31,18$ cm^3.

5.10 a) $V = 80\pi$ b) $V = \dfrac{500}{3}\pi$ c)$V = 500\pi$

5.11 $V = 400\,\pi^2$



5.12 $V = 50'375\,\pi$

5.13 a) $V = \dfrac{73'108}{125}\pi \cong 1.84$ dm^3 b) Oui

5.14 12 arêtes et 18 arêtes

5.15 Le polygone de section est un rectangle de dimensions a et $\sqrt{2}\,a$. Son aire vaut $\sqrt{2}\,a^2$

5.16 $AB' = 7\sqrt{2}$ cm, $AC' = 14$ cm et $AD' = 7\sqrt{5}$ cm.

5.17 2 cm

5.18

a) $AD = 4$ cm

b) 24 cm^3

c) 3 cm^3

5.19 $V = \dfrac{\sqrt{14}\,a^3}{6}$

5.20

a) Aire latérale $= 6\,a\,h$; volume $= \dfrac{3\sqrt{3}\,a^2\,h}{2}$

b) Cylindre inscrit : aire latérale $= \sqrt{3}\,\pi\,a\,h$; volume $= \dfrac{3\,\pi\,a^2\,h}{4}$

Cylindre circonscrit : aire latérale $= 2\,\pi\,a\,h$; volume $= \pi\,a^2\,h$

c) Rapport des aires latérales : $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Rapport des volumes : $\dfrac{3}{4} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

5.21

a) Le rayon : 5 cm. L'angle du secteur : 216°

b) 37.7 cm^3

5.22

a) $H = 2\sqrt{3}$ u et $V = (6\sqrt{3}) \cdot (2\sqrt{3}) \cdot \dfrac{1}{3} = 12$ u^3

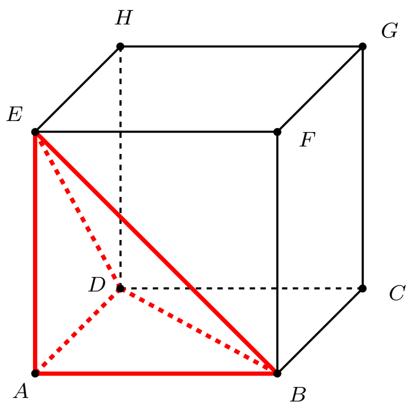
b) – Aire d'une face latérale : $\sqrt{15} \simeq \boxed{3.87 \text{ u}^2}$

– Surface totale : $6 \cdot \sqrt{15} + 6 \cdot \sqrt{3} \simeq \boxed{33.63 \text{ u}^2}$

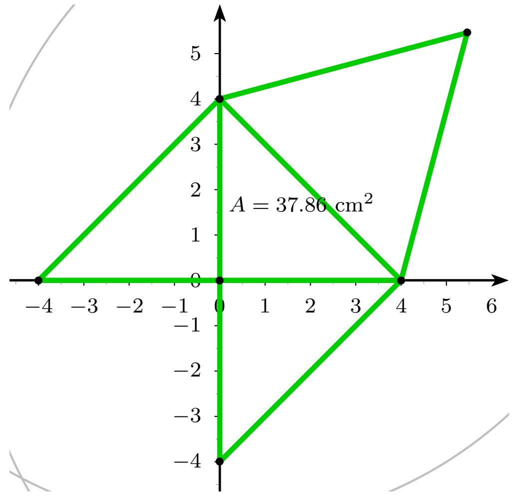
5.23 $\sim$ 45'481.43 cm^3, soit environ 45.5 litres.

5.24

a)

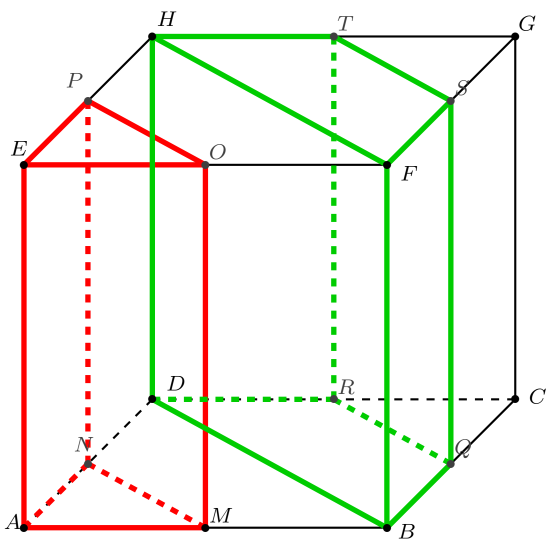


b)



c) $V = \dfrac{28}{3} \cong 9.33\ \mathrm{cm}^3$

5.25 a)



b) Longueur totale : $\ell = 40 + 8\sqrt{2} \cong 51.314$ cm

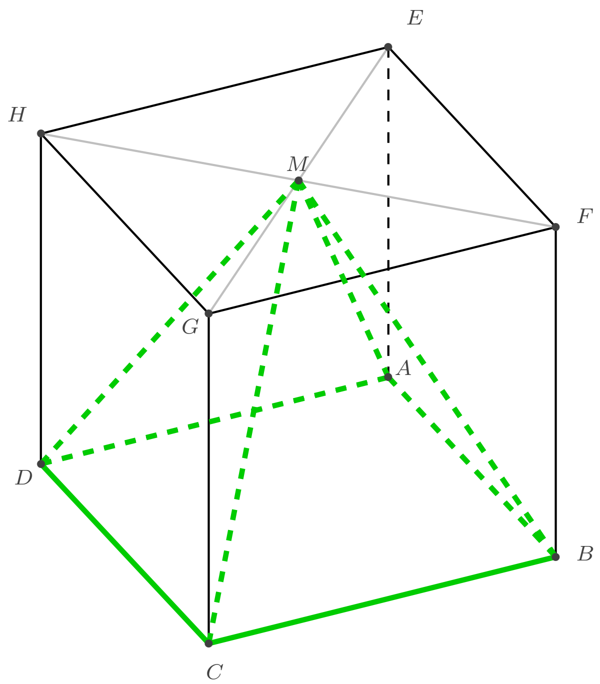
c) $A = 80 + 32\sqrt{2} \cong 125.255\ \mathrm{cm}^2$

$V = 64\ \mathrm{cm}^3$

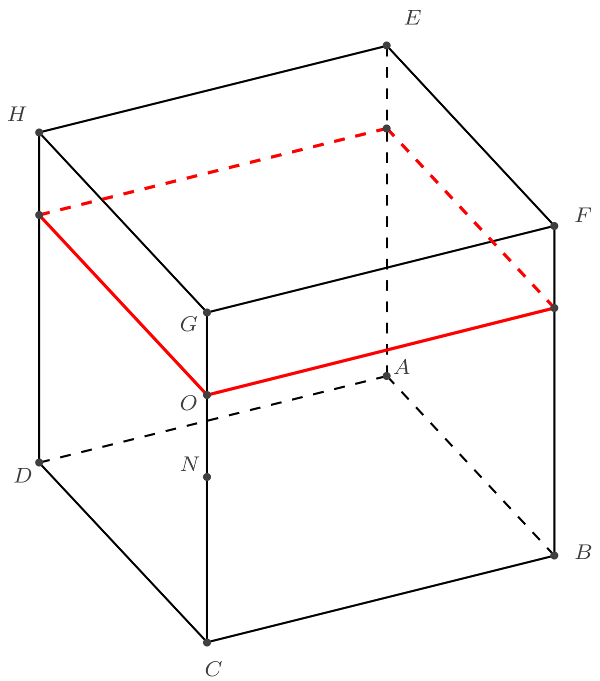
d) $V = 192\ \mathrm{cm}^3$

5.26 a) –

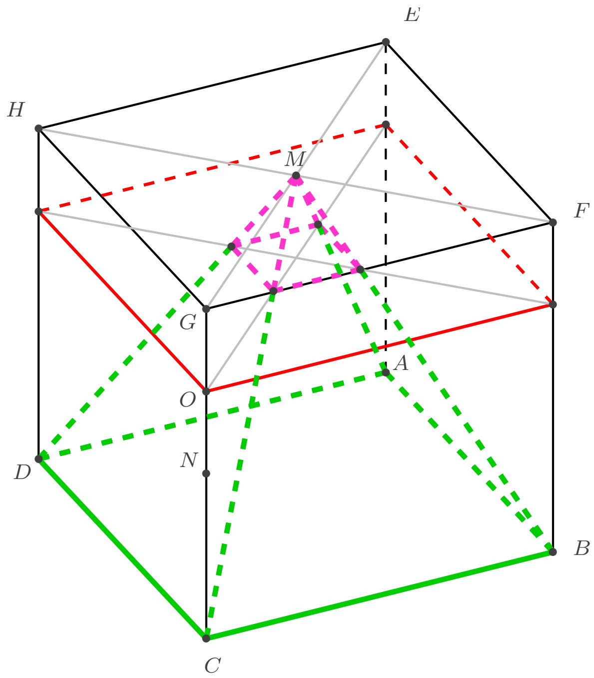
b)



c)



d)



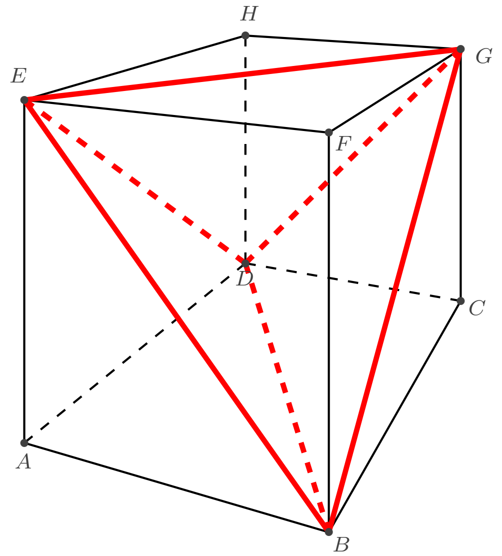
Les deux polyèdres sont :

— une petite pyramide à base carrée, dont le volume vaut $\frac{125}{24} \cong 5.21$ cm^3 et l'aire vaut $\frac{25\sqrt{5}+25}{4} \cong 20.23$ cm^2.

— une pyramide tronquée, dont le volume vaut $\frac{2625}{8} \cong 328.13$ cm^3 et l'aire vaut $\frac{375\sqrt{5}+425}{4} \cong 315.88$ cm^2.

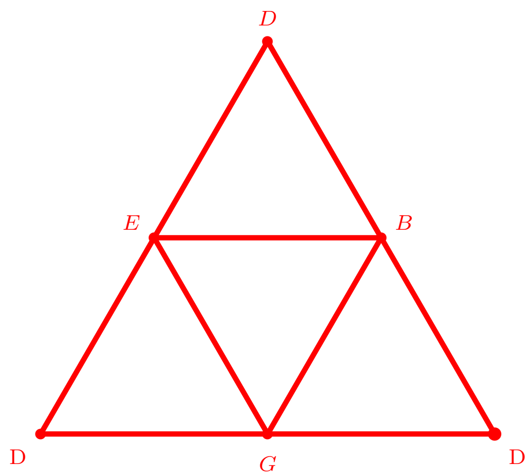
5.27

a)



b) C'est un tétraèdre régulier.

c)



5.28

a) $V \simeq 16.1 \text{ cm}^3$

b) La hauteur du cône mesure 9 cm et le tout 11.25 cm.

5.29

a) $MO = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \cong 2.83$ cm

$MP = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \cong 3.46$ cm

$MS = \sqrt{44} = 2\sqrt{11} \cong 6.63$ cm

b) $\widehat{PMO} \cong 35.26\,^\circ$

$\widehat{MPO} \cong 54.74\,^\circ$

$\widehat{MOP} = 90\,^\circ$

c) $\widehat{QSP} \cong 15.79\,^\circ$

5.30

a) $OL = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \cong 4.47$ cm

$PO = OL$

$HO = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \cong 4.90$ cm

b) $\widehat{PHO} \cong 65.91\,^\circ$

$\widehat{POH} \cong 24.09\,^\circ$

$\widehat{HPO} = 90\,^\circ$

c) $\widehat{OHQ} \cong 7.49\,^\circ$