5.25

a) Utiliser l'information contenue dans le graphique suivant pour estimer μ par intervalle de confiance.

Population		Echantillon
$X=$ volume	$\leftarrow$	$\bar{x} = 455$ ml
90 % de chance que :		$\hat{\sigma} = 8.5$ ml
$454{,}1 \leq \mu \leq 455{,}9$		$n = 200$
$\sigma =$ inconnu		
$N = 1000$		

b) Compléter l'énoncé : Il y a ____ de chances que l'écart entre la moyenne de l'échantillon et la moyenne de la population soit inférieur à ____.

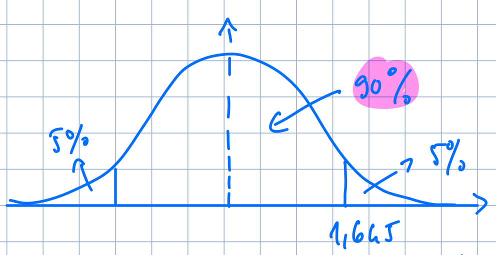
c) Quel type d'estimation utilise-t-on si on pose :
i) $\mu = 455$ ml ? ii) $454.1 \text{ ml} \leq \mu \leq 455.9$ ml ?

d) En négligeant les moyennes $\bar{x}$ ayant moins de 0.3% de chances d'être obtenues, quelle est la plus grande marge d'erreur possible entre μ et $\bar{x}$?
Pourquoi n'utilise-t-on pas cette marge d'erreur pour estimer μ ?

a) $$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}_{\text{facteur de correction}} = \frac{8{,}5}{\sqrt{200}}\sqrt{\frac{1000-200}{1000-1}} \approx 0{,}54$$

facteur de correction car $\frac{N}{20} = \frac{1000}{20} = 50 < 200$

$\Rightarrow$ grand échantillon



On cherche la valeur la plus proche de 0,95 $\rightarrow$ c'est 1,645

d'où $E = q_{0,95} \cdot \hat{\sigma}_{\bar{x}} = 1{,}645 \cdot 0{,}54 \approx 0{,}9$

$\Rightarrow I = [\bar{x} - E \,;\, \bar{x} + E] = [455 - 0{,}9 \,;\, 455 + 0{,}9]$

$\Rightarrow I = [454{,}1 \,;\, 455{,}9]$

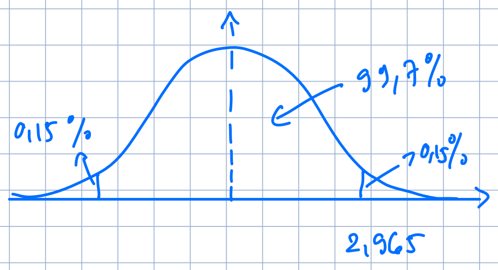
$\Rightarrow \mu$ se situe entre 454,1 ml et 455,9 ml

b) Il y a 90% de chances que l'écart entre la moyenne de l'échantillon et la moyenne de la population soit inférieur à 0,9 ml

c) i) c'est une estimation ponctuelle (une seule valeur)

ii) c'est une estimation par intervalle de confiance.

d)



On cherche 0,9985 dans la table

=> c'est 2,965

$\Rightarrow \hat{r} = q_{0,9985} \cdot \hat{\sigma}_{\bar{x}}$

$= 2{,}965 \cdot 0{,}54 \cong \underline{1{,}6 \text{ ml}}$

Diminuer le risque d'erreur a toujours un coût : ici, c'est la marge d'erreur (et donc l'intervalle) qui augmente.

L'estimation sera donc plus fiable (99,7% au lieu de 90%) mais presque 2 fois moins précise !

5.26 Une équipe de chercheurs suit le développement de jeunes enfants depuis leur naissance afin d'établir une courbe de croissance indiquant la distribution de leur taille et de leur poids selon l'âge. Voici le tableau de distribution du poids des 500 filles de l'échantillon, à l'âge de trois ans.

Répartition de 500 filles de 3 ans selon le poids

Poids en kg	Nombre de filles
[11; 12[	45
[12; 13[	80
[13; 14[	140
[14; 15[	125
[15; 16[	70
[16; 17[	40
Total	**500**

a) Estimer par intervalle de confiance au niveau de confiance de 95% le poids moyen des filles de 3 ans

b) Dans ce cas-ci, l'estimation ponctuelle serait-elle acceptable ? Jusitifier la réponse.

a) $n = 500$

Répartition de 500 filles de 3 ans selon le poids

Poids en kg	Nombre de filles	valeurs centrales
[11; 12[	45	11,5
[12; 13[	80	12,5
[13; 14[	140	13,5
[14; 15[	125	14,5
[15; 16[	70	15,5
[16; 17[	40	16,5
Total	**500**	

* Calculer $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{11{,}5\cdot 45 + 12{,}5\cdot 80 + 13{,}5\cdot 140 + 14{,}5\cdot 125 + 15{,}5\cdot 70 + 16{,}5\cdot 40}{500}$$

$$\simeq 13{,}9$$

Rappel : formule : $\bar{x} = \dfrac{n_1\cdot c_1 + n_2\cdot c_2 + \dots + n_k\cdot c_k}{n}$ où n : effectif, c : valeur centrale

* Calculer $\hat{\sigma}^2$:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}$$

Les données regroupées par classes ou par modalités $\Rightarrow$ la formule devient :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n_1(c_1-\bar{x})^2 + n_2(c_2-\bar{x})^2 + \dots + n_n(c_n-\bar{x})^2}{n-1}$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{65(11{,}5-13{,}9)^2 + 80(12{,}5-13{,}9)^2 + 140(13{,}5-13{,}9)^2 + \dots + 40(16{,}5-13{,}9)^2}{500-1}$$

$$= \frac{65\cdot 5{,}76 + 80\cdot 1{,}96 + 140\cdot 0{,}16 + 125\cdot 0{,}36 + 70\cdot 2{,}56 + 40\cdot 6{,}76}{499}$$

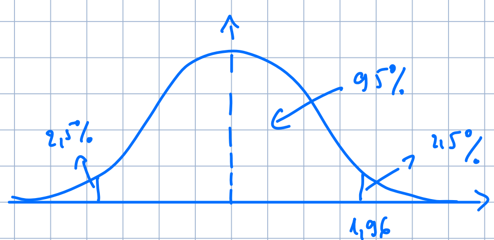
$$\hat{\sigma}^2 \cong 1{,}87$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma} \cong 1{,}37$$

Dans ce cas, on suppose que $N = \infty$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}37}{\sqrt{500}} \cong 0{,}06$$

On veut un niveau de confiance de 95%



$\Rightarrow$ On cherche la valeur la plus proche de 0,975

$\Rightarrow$ c'est 1,96

$$\Rightarrow E = q_{0{,}975} \cdot \hat{\sigma}_{\bar{x}} = 1{,}96 \cdot 0{,}06 \cong 0{,}1$$

$$\Rightarrow I = [\bar{x} - E \; ; \; \bar{x} + E]$$

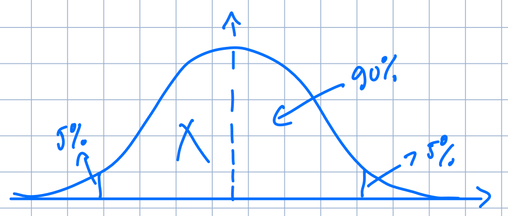
$$= [13{,}9 - 0{,}1 \; ; \; 13{,}9 + 0{,}1]$$

$$\Rightarrow I = [13{,}8 \; ; \; 14{,}0]$$

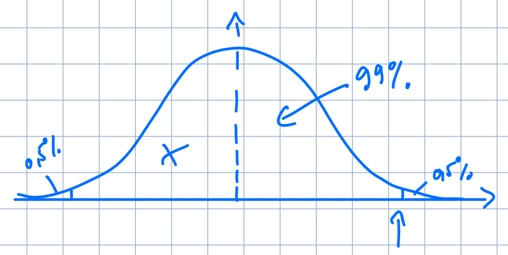
b) Oui, car la marge d'erreur est petite par rapport à la moyenne

$\Rightarrow$ l'estimation ponctuelle suffirait

1)



2)



1) $E = q_{0,95} \cdot \hat{\sigma}_{\bar{x}}$

2) $E = q_{0,995} \cdot \hat{\sigma}_{\bar{x}}$

$q_{0,95} < q_{0,995}$

5.27

a) Si on augmente le niveau de confiance de 90% à 99%, la marge d'erreur dans l'estimation de μ sera-t-elle plus grande ou plus petite ?

b) Si on augmente la taille de l'échantillon tout en gardant le même niveau de confiance, la marge d'erreur dans l'estimation de μ sera-t-elle plus grande ou plus petite ?

a) plus grande : On veut avoir plus de chances de tomber dans l'intervalle, on va donc l'agrandir

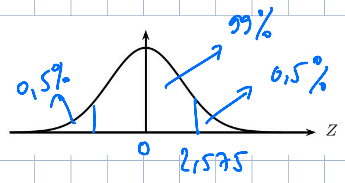
b) plus petite : en ayant un échantillon plus grand, on a une information meilleure sur la population $\Rightarrow$ plus fiable $\Rightarrow$ la marge d'erreur diminue

5.28 Calculer la taille minimale de l'échantillon à prélever pour estimer le poids moyen de sacs de sucre remplis par une machine, avec une marge d'erreur d'au plus 0.03 kg, en utilisant un intervalle de confiance au niveau de 99%.

On considère que la distribution du poids des sacs obéit à une loi normale dont l'écart type est de 0.1 kg.

On veut $E = 0{,}03$ kg

or $E = 2{,}575 \cdot \underbrace{\frac{0{,}1}{\sqrt{n}}}_{\sigma_{\bar{x}}}$



$\Rightarrow$ on a équation : $0{,}03 = 2{,}575 \cdot \frac{0{,}1}{\sqrt{n}} \quad | \cdot \sqrt{n}$

$\Rightarrow 0{,}03\sqrt{n} = 2{,}575 \cdot 0{,}1 \quad | : 0{,}03$

$\Rightarrow \sqrt{n} \cong 8{,}58 \quad | (\ )^2$

$\Rightarrow n \cong 73{,}7$

$\Rightarrow$ il faut au moins 74 sacs

5.29 Calculer la taille minimale de l'échantillon à prélever pour estimer à 500 francs près le revenu familial moyen des familles d'un quartier, avec un niveau de confiance de 95%, si on estime l'écart-type des revenus à 3500 francs.

On veut $E = 500$

or $E = 1{,}96 \cdot \frac{3500}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow 500 = 1{,}96 \cdot \frac{3500}{\sqrt{n}} \quad | \cdot \sqrt{n}$

$\Rightarrow 500\sqrt{n} = 1{,}96 \cdot 3500 \quad | \div 500$

$\sqrt{n} = 13{,}72 \quad | (\ )^2$

$n = 188{,}2 \Rightarrow$ Il faut au moins 189 familles