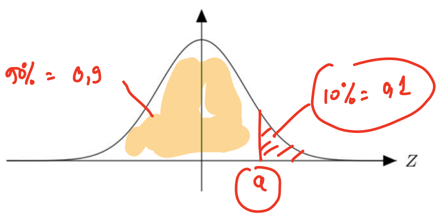
CORRIGÉ

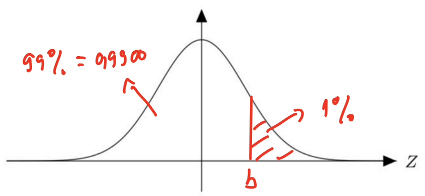
5.5 On considère une variable aléatoire $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$.
Représenter graphiquement chaque situation, puis en utilisant la table de la loi normale, déterminer la valeur de a, b, c, d, e et f.



$P(Z > a) = 10\%$

$\Rightarrow a \cong 1{,}28$

chercher la valeur la plus proche de 0,9 dans la table numérique

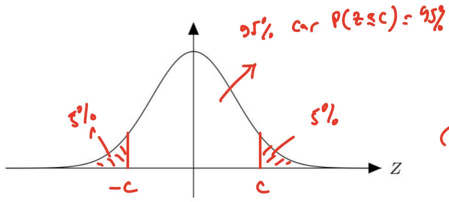


$P(Z > b) = 1\%$

$\Rightarrow b \cong 2{,}33$

chercher la valeur la plus proche de 0,9900

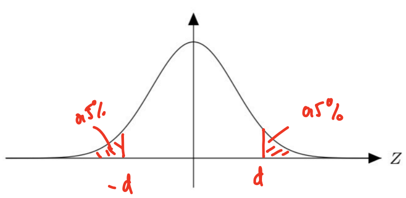
valeur absolue



$P(|Z| > c) = 10\%$

$\Rightarrow c = \frac{1{,}64 + 1{,}65}{2} = 1{,}645$ (car $P(Z \leq c) = 95\%$)

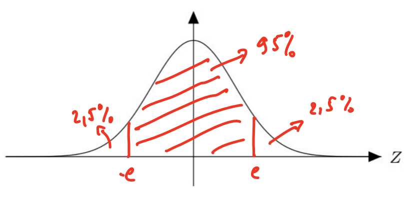
(2 valeurs proche de 0,95)



$P(|Z| > d) = 1\%$

$\Rightarrow d = \frac{2{,}57 + 2{,}58}{2} = 2{,}575$

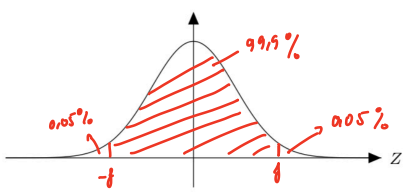
(car $P(Z \leq d) = 0{,}995$)



$P(-e < Z < e) = 95\%$

$\Rightarrow e \cong 1{,}96$

(car $P(Z \leq e) = 0{,}975$)



$P(-f < Z < f) = 99.9\%$

$\Rightarrow f \cong 3{,}29$ (ou 3,30)

(car $P(Z \leq f) = 99{,}95\%$)

5.6 Calculer les probabilités en utilisant la table.

a) $P(X > 60)$ avec $X \sim \mathcal{N}(50; 16)$

b) $P(X \geq 3.9)$ avec $X \sim \mathcal{N}(4; 0.09)$

c) $P(X < 325)$ avec $X \sim \mathcal{N}(500; 10'000)$

d) $P(-1 < X < 2)$ avec $X \sim \mathcal{N}(1.5; 4)$

e) $P(20 < X < 28)$ avec $X \sim \mathcal{N}(24; 25)$

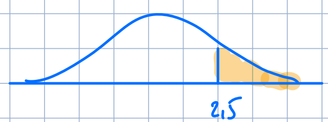
f) $P(|X| > 1)$ avec $X \sim \mathcal{N}(0; 10)$

a) $P(X > 60)$ avec $X \sim \mathcal{N}(50; 16)$

$$\Rightarrow P\left(Z > \frac{60-50}{\sqrt{16}}\right) = P(Z > 2{,}5) = 1 - P(Z \leq 2{,}5)$$

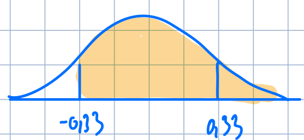
normalisation

$$= 1 - 0{,}9938 = \underline{0{,}0062 = 0{,}62\,\%}$$



b) $P(X \geq 3{,}9)$ avec $X \sim \mathcal{N}(4; 0{,}09)$

$$\Rightarrow P\left(Z \geq \frac{3{,}9-4}{\sqrt{0{,}09}}\right) = P\left(Z \geq \frac{3{,}9-4}{0{,}3}\right) = P(Z \geq -0{,}33)$$



$$= 1 - P(Z < -0{,}33) = 1 - P(Z > 0{,}33)$$

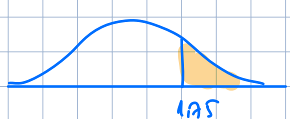
$$= 1 - (1 - P(Z \leq 0{,}33))$$

$$= 1 - 1 + P(Z \leq 0{,}33) = \underline{0{,}6293 = 62{,}93\,\%}$$

c) $P(X < 325)$ avec $X \sim \mathcal{N}(500; 10\,000)$

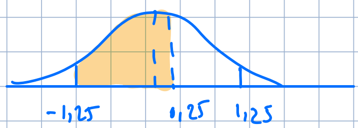
$$\Rightarrow P\left(Z > \frac{325-500}{100}\right) = P(Z > 1{,}75) = 1 - P(Z \leq 1{,}75)$$

$$= 1 - 0{,}9599 = \underline{0{,}0401 = 4{,}01\,\%}$$



d) $P(-1 < x < 2)$ avec $X \sim \mathcal{N}(1{,}5\,;\,4)$

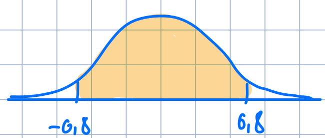
$$\Rightarrow P\left(\frac{-1-1{,}5}{2} < Z < \frac{2-1{,}5}{2}\right) = P(-1{,}25 < Z < 0{,}25)$$



$$= P(Z \leq 0{,}25) - P(Z \leq -1{,}25)$$
$$= P(Z \leq 0{,}25) - P(Z > 1{,}25)$$
$$= P(Z \leq 0{,}25) - (1 - P(Z \leq 1{,}25))$$
$$= P(Z \leq 0{,}25) - 1 + P(Z \leq 1{,}25)$$
$$= 0{,}5987 - 1 + 0{,}8944$$
$$= \underline{0{,}4931 = 49{,}31\,\%}$$

e) $P(20 < x < 28)$ avec $X \sim \mathcal{N}(24\,;\,25)$

$$\Rightarrow P\left(\frac{20-24}{5} < Z < \frac{28-24}{5}\right) = P(-0{,}8 < Z < 0{,}8)$$

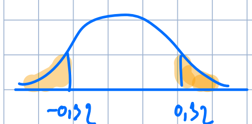


$$= P(Z \leq 0{,}8) - P(Z \leq -0{,}8)$$
$$= P(Z \leq 0{,}8) - P(Z > 0{,}8)$$
$$= P(Z \leq 0{,}8) - (1 - P(Z \leq 0{,}8))$$
$$= P(Z \leq 0{,}8) - 1 + P(Z \leq 0{,}8)$$
$$= 0{,}7881 - 1 + 0{,}7881 = \underline{0{,}5762 = 57{,}62\,\%}$$

f) $P(|x| > 1)$ avec $X \sim \mathcal{N}(0\,;\,10)$

valeur absolue

$$= P(X < -1) + P(X > 1) = P\left(Z < -\frac{1-0}{\sqrt{10}}\right) + P\left(Z > \frac{1-0}{\sqrt{10}}\right)$$



$$\cong P(Z < -0{,}32) + P(Z > 0{,}32)$$
$$= 1 - P(Z \leq 0{,}32) + 1 - P(Z \leq 0{,}32) = 2 - 2 \cdot P(Z \leq 0{,}32)$$
$$= \underline{0{,}7490 = 74{,}90\,\%}$$

5.7 Déterminer, dans chaque cas, la valeur de c.

a) $X \sim \mathcal{N}(0; 9)$ et $P(X \geq c) = 10\%$

b) $X \sim \mathcal{N}(5; 1)$ et $P(X \leq c) = 30\%$

c) $X \sim \mathcal{N}(100; 100)$ et $P(X > c) = 80\%$

d) $X \sim \mathcal{N}(-6; 4)$ et $P(X < c) = 95\%$

e) $X \sim \mathcal{N}(0; 16)$ et $P(|X| \geq c) = 1\%$

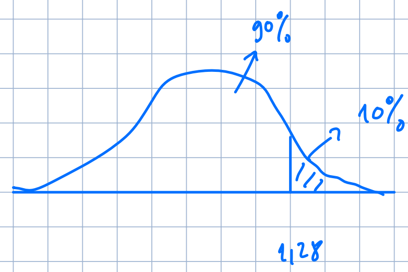
f) $X \sim \mathcal{N}(0; 20)$ et $P(-c < X < c) = 97\%$

a) $X \sim \mathcal{N}(0; 9)$ $\qquad P(X \geq c) = 10\%$

$$\downarrow$$

$$P\left(Z \geq \frac{c-0}{3}\right) = 10\%$$

$$P\left(Z \geq \frac{c}{3}\right) = 10\%$$



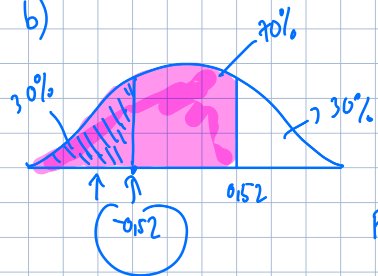
La valeur la plus proche de 0,9 est 0,89973

→ correspond à 1,28

$$P\left(Z \geq \underbrace{\frac{c}{3}}_{=1{,}28}\right) = 10\% \Rightarrow \frac{c}{3} = 1{,}28$$

$$\Rightarrow c = 3 \cdot 1{,}28 = 3{,}84$$

b)



$$P(X \leq c) = P\left(Z \leq \underbrace{\frac{c-5}{1}}\right) =$$

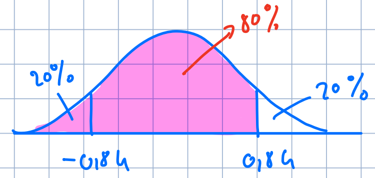
$$P(Z \leq 0{,}52) = 70\%$$

$$P(Z \leq -0{,}52) = 30\%$$

$$c - 5 = -0{,}52$$

$$c = 5 - 0{,}52 = 4{,}48$$

c) $P(X > c) = 80\%$ $\quad X \sim \mathcal{N}(100 ; 100)$



$P\left(Z > \frac{c-100}{10} \right) = 80\%$

D'après la table :

$P(Z \leq 0{,}84) = 80\%$

$\uparrow$

on cherche la valeur la plus proche de 0,80 dans la table =) 0,7995 → correspond à 0,84)

$\Rightarrow P(Z > -0{,}84) = 80\%$

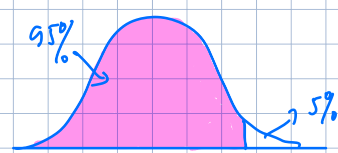
$\Rightarrow P\left(Z > \underbrace{\frac{c-100}{10}}_{= -0{,}84} \right) = 80\%$

$\frac{c-100}{10} = -0{,}84$

$c - 100 = -8{,}4$

$c = 100 - 8{,}4 = \underline{91{,}6}$

d) $X \sim \mathcal{N}(-6 ; 4)$ et $P(X < c) = 95\%$



$\Rightarrow P\left(Z < \frac{c-(-6)}{2} \right) = 95\%$

$\Rightarrow P\left(Z < \frac{c+6}{2} \right) = 95\%$

D'après la table : $\frac{c+6}{2} = \underbrace{1{,}645}$

↓ on cherche les valeurs plus proches de 0,95 =) ici c'est 1,64 et 1,65

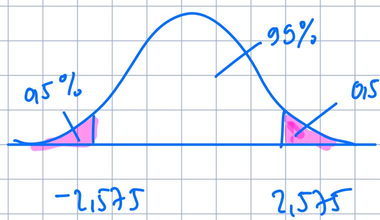
=) moyenne $= \frac{1{,}64 + 1{,}65}{2} = 1{,}645$

$\Rightarrow c + 6 = 2 \cdot 1{,}645 = 3{,}29$

$\Rightarrow c = 3{,}29 - 6 = -2{,}71$

$\Rightarrow \underline{c = -2{,}71}$

e) $X \sim \mathcal{N}(0;16)$ et $P(|X| \geq c) = 1\%$



On cherche la valeur la plus proche de 0,995

$\underbrace{0,9949}_{2,57}$ et $\underbrace{0,9951}_{2,58}$

2,57 et 2,58 → moyenne = 2,575

$\Rightarrow P(Z \leq 2,575) = 99,5\%$

$\Rightarrow P(|Z| \geq 2,575) = 1\%$

$\Rightarrow P((|Z| \geq 2,575) = 1\%$

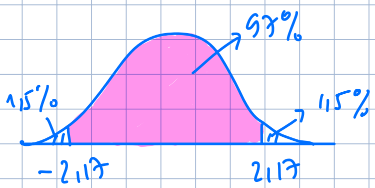
$\Rightarrow P\left(Z \geq \frac{c-0}{4}\right) = 1\%$

$\Rightarrow P\left(Z \geq \frac{c}{4}\right) = 1\%$

$\Rightarrow \frac{c}{4} = 2,575 \Rightarrow c = 4 \cdot 2,575 = 10,3$

$\Rightarrow \underline{c = 10,3}$

f) $X \sim \mathcal{N}(0;20)$ et $P(-c < X < c) = 97\%$



D'après la table :

$P(Z \leq \underbrace{2,17}) = 98,5\%$

valeur plus proche de 0,985

$\Rightarrow P(-2,17 \leq Z \leq 2,17) = 97\%$

$\Rightarrow \frac{c-0}{\sqrt{20}} = 2,17 \Rightarrow c = 2,17 \cdot \sqrt{20} \simeq 9,70$

$\Rightarrow \underline{c \simeq 9,70}$

5.8 Dans un hôpital, on suppose que l'âge moyen du personnel infirmier suit un modèle normal, de moyenne 42 ans et d'écart-type 7 ans.

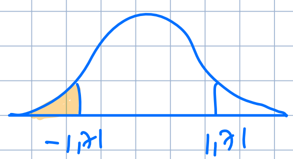
a) Quel pourcentage du personnel infirmier a moins de 30 ans ?

b) Quel pourcentage du personnel infirmier a entre 39 et 56 ans ?

c) Quel âge a Nicole, infirmière dans cet hôpital, si l'on sait que seulement 20% du personnel infirmier est plus âgé qu'elle ?

$X \sim \mathcal{N}(42 ; 49)$

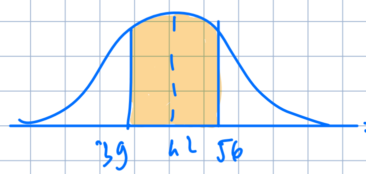
a) $P(X < 30) = P\left(Z < \frac{30-42}{7}\right) = P(Z < -1{,}71)$



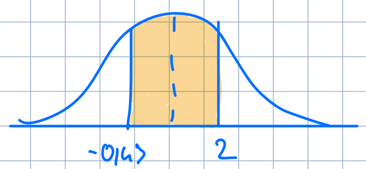
$= P(Z > 1{,}71) = 1 - P(Z \leq 1{,}71)$

$= 1 - 0{,}9564 = 0{,}0436 = 4{,}36\,\%$

b) $P(39 \leq X \leq 56) = P\left(\frac{39-42}{7} \leq Z \leq \frac{56-42}{7}\right)$



$\Rightarrow P(-0{,}43 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -0{,}43)$



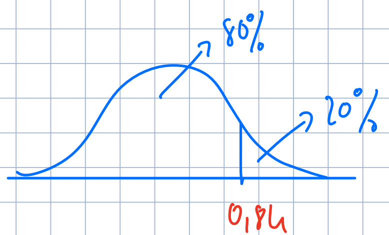
$\Rightarrow P(Z \leq 2) - P(Z > 0{,}43)$

$= P(Z \leq 2) - (1 - P(Z \leq 0{,}43))$

$= P(Z \leq 2) - 1 + P(Z \leq 0{,}43)$

$= 0{,}9772 - 1 + 0{,}6664 = 0{,}6436 = 64{,}36\,\%$

c)



On cherche c tel que $P(X > c) = 20\%$

$P\left(Z > \frac{c-42}{7}\right) = 20\%$

$\Rightarrow \frac{c-42}{7} = 0{,}84 \Leftrightarrow c - 42 = 7 \cdot 0{,}84$

$\Rightarrow c = 5{,}88 + 42 \cong 47{,}88$

$\Rightarrow$ Nicole a environ 48 ans

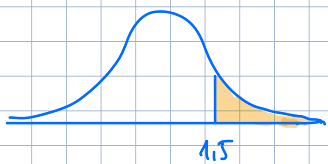
5.9 La durée de vie, en heures, des piles produites par un fabriquant se distribue selon un modèle normal : $X \sim \mathcal{N}(110; 100)$.

a) Quelle est la probabilité qu'une pile dure plus de 125 heures ?

b) Quelle est la probabilité qu'une pile dure entre 95 et 125 heures ?

c) La garantie stipule que si la pile ne dure pas assez longtemps, le fabriquant s'engage à la remplacer gratuitement. A combien d'heures doit-il fixer le seuil de durée garantie pour ne remplacer que 5% des piles vendues ?

a) $P(X > 125) = P\left(Z > \frac{125-110}{\sqrt{100}}\right) = P\left(Z > \frac{125-110}{10}\right)$

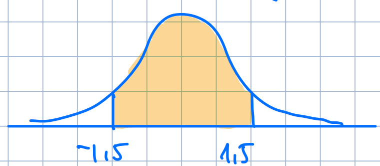


$= P(Z > 1{,}5) = 1 - P(Z \leq 1{,}5) = 1 - 0{,}9332$

$= 0{,}0668 = \underline{6{,}68}\,\%$

b) $P(95 \leq X \leq 125) = P\left(\frac{95-110}{10} \leq Z \leq \frac{125-110}{10}\right)$

$P(-1{,}5 \leq Z \leq 1{,}5) = P(Z \leq 1{,}5) - P(Z \leq -1{,}5)$



$= P(Z \leq 1{,}5) - P(Z > 1{,}5)$

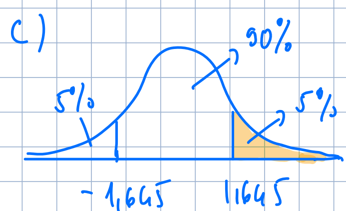
$= P(Z \leq 1{,}5) - (1 - P(Z \leq 1{,}5))$

$= P(Z \leq 1{,}5) - 1 + P(Z \leq 1{,}5)$

$= 2\,P(Z \leq 1{,}5) - 1 = 2 \cdot 0{,}9332 - 1$

$= 0{,}8664 = \underline{86{,}64}\,\%$

c)



On cherche c tel que $P(X < c) = 5\%$

Les valeurs plus proches de 0,95 sont 0,9495 et 0,9505 $\rightarrow$ moyenne $= \frac{1{,}64 + 1{,}65}{2} = 1{,}645$

$\Rightarrow P\left(Z < \frac{c-110}{10}\right) = 5\%$

$\Rightarrow \frac{c-110}{10} = -1{,}645 \Rightarrow c - 110 = -1{,}645 \cdot 10$

$\Rightarrow c = -16{,}45 + 110 = 93{,}55$

$\Rightarrow$ <u>il faut environ 94 heures</u>

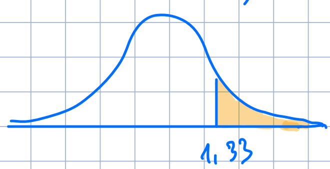
5.10 Louis prend tous les jours le train pour venir au Gymnase. En moyenne, il met 16 minutes pour faire le trajet entre chez lui et la gare, avec un écart-type de 3 minutes. On suppose que la distribution du temps de trajet suit un modèle normal.

a) Si Louis part de chez lui à 7h15 alors que le train part à 7h35, quelle est la probabilité qu'il manque son train ?

b) A quelle heure Louis doit-il partir de chez lui pour que la probabilité qu'il manque son train soit réduite à 1% ?

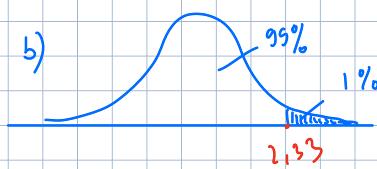
$X \sim \mathcal{N}(16\,;9)$ =

a) $P(X > 20) = P\left(Z > \frac{20-16}{3}\right) = P(Z > 1{,}33) = 1 - P(Z \leq 1{,}33)$



$= 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918 = 9{,}18\%$

b)



On cherche c tel que $P(X > c) = 1\%$

$\Rightarrow P\left(Z > \frac{c-16}{3}\right) = 1\%$

$\Rightarrow \frac{c-16}{3} = 2{,}33$

$\Rightarrow c - 16 = 3 \cdot 2{,}33 = 6{,}99$

$\Rightarrow c = 16 + 6{,}99 = 22{,}99$

Louis doit donc partir 23 minutes avant son train, soit à 7h12

5.11 On suppose que la distribution du quotient intellectuel (QI) suit un modèle normal : $X \sim \mathcal{N}(100; 225)$.

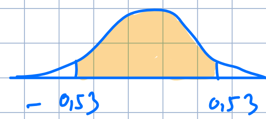
a) Quel pourcentage de la population a un QI compris entre 92 et 108 ?

b) On dit qu'une personne souffre de déficience mentale si son QI est inférieur à 70. Quelle proportion de la population devrait donc souffrir de déficience mentale ?

c) Julien prétend que 80% de la population a un QI inférieur au sien. Quelle devrait être la valeur de son QI ?

a) $P(92 < X < 108) = P\left(\frac{92-100}{15} < Z < \frac{108-100}{15}\right) = P(-0{,}53 < X < 0{,}53)$

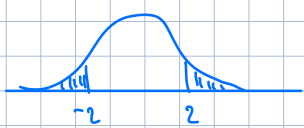
$= P(Z \leq 0{,}53) - P(Z \leq -0{,}53)$



$= P(Z \leq 0{,}53) - (1 - P(Z \leq 0{,}53))$

$= 2\,P(Z \leq 0{,}53) - 1 = 2 \cdot 0{,}7019 - 1 = 0{,}4038 = \underline{40{,}38\,\%}$

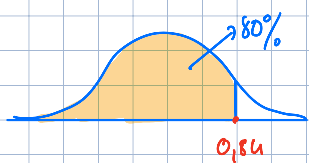
b) $P(X < 70) = P\left(Z < \frac{70-100}{15}\right) = P(Z < -2) = P(Z > 2)$



$= 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$

$= \underline{2{,}28\,\%}$

c)



On cherche c tel que $P(X < c) = 80\,\%$

$\Rightarrow P\left(Z < \frac{c-100}{15}\right) = 80\,\%$

$\Rightarrow$ La valeur la plus proche de 0,80 est 0,7995 qui correspond à 0,84

$\Rightarrow \frac{c-100}{15} = 0{,}84 \Rightarrow c = 100 + 15 \cdot 0{,}84$

$c = 112{,}6$

$\Rightarrow$ Il doit avoir environ <u>113 de QI</u>

5.12 Dans une université, les examens d'admission en médecine sont notés au dixième sur une échelle de 1 à 6. On suppose que la distribution des résultats suit un modèle normal de moyenne 4.12 et d'écart-type 2.7.

a) Quelle est la probabilité qu'un étudiant choisi au hasard ait une note supérieure à 5 ?

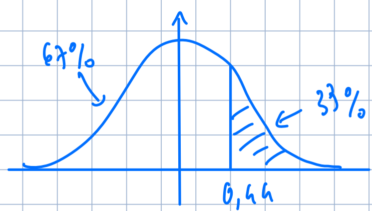
b) Si l'université n'admet que 33% des candidats, à quelle note doit-elle fixer le seuil pour choisir les candidats admis ?

$$X \sim \mathcal{N}(4{,}12 \,;\, 2{,}7^2)$$

a) $P(X > 5) = P\left(Z > \frac{5-4{,}12}{2{,}7}\right) = P(Z > 0{,}33) = 1 - P(Z \leq 0{,}33)$

$= 1 - 0{,}6293 = 0{,}3707 = 37{,}07\,\%$

b) On cherche c tel que $P(X \geq c) = 33\%$



$\Rightarrow P\left(Z \geq \frac{c-4{,}12}{2{,}7}\right) = 33\%$

$\Rightarrow \frac{c-4{,}12}{2{,}7} = 0{,}44$

$\Rightarrow c = 2{,}7 \cdot 0{,}44 + 4{,}12$

$c \cong 5{,}3$

$\Rightarrow$ il faut fixer le seuil à 5,3

Théorème central limite

5.14 Le revenu annuel moyen des 3'000 médecins d'une région est de 200'000 francs, avec un écart-type de 20'000 francs.
On prélève un échantillon aléatoire de 100 médecins parmi ces 3'000 médecins.

a) Pourquoi peut-on considérer que la moyenne des revenus de ces 100 médecins suit une loi normale ?

b) Calculer les paramètres de cette loi normale.

c) Quelle est la probabilité que le revenu moyen de ces 100 médecins vaille exactement 200'000 francs ?

d) Quelle est la probabilité que le revenu moyen de ces 100 médecins soit compris entre 195'000 francs et 205'000 francs ?

e) Quelle est la probabilité qu'il y ait un écart d'au moins 2'000 francs entre le revenu moyen de ces 100 médecins et celui des 3'000 médecins de cette région ?

a) Par le TCL, car $\underline{n = 100 \Rightarrow n \geq 30}$

b) $N = 3000$ et $n = 100 \Rightarrow n \leq \frac{N}{20}$ (échantillon petit)

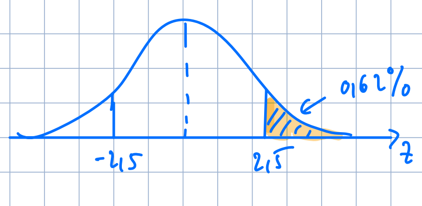
$\Rightarrow \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{20'000}{\sqrt{100}} = \underline{2000}$

Ainsi, $\bar{x} \sim \mathcal{N}(200'000 ; 2000^2) = \underline{\mathcal{N}(200'000 ; 4'000'000)}$

c) $P(\bar{x} = 200'000) = \underline{0\%}$

d) $P(195'000 < \bar{x} < 205'000) = P\left(\frac{195000 - 200000}{2000} < z < \frac{205000 - 200000}{2000}\right)$

$\Rightarrow P(-2,5 < z < 2,5) = P(z \leq 2,5) - P(z \leq -2,5)$



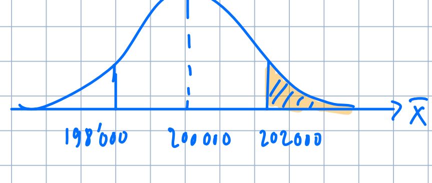
$= P(z \leq 2,5) - P(z > 2,5)$

$= P(z \leq 2,5) - (1 - P(z \leq 2,5))$

$= 2P(z \leq 2,5) - 1 = 2 \cdot 0,9938 - 1$

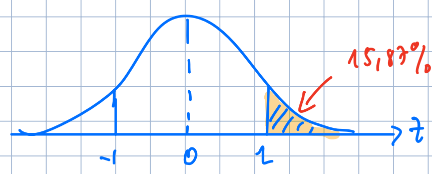
$= 0,9876 = \underline{98,76\ \%}$

e)



$P(\bar{x} < 198'000$ ou $\bar{x} > 202\,000)$

$= P(|z| > 1)$



$= 2 \cdot P(Z < 1) = 2 \cdot (1 - P(Z \leq 1))$

$= 2(1 - 0{,}8413) = 0{,}3174 = \underline{31{,}74\%}$

5.15 Une entreprise fabrique des câbles d'acier.
On désire vérifier si le diamètre X des câbles est conforme aux normes, à savoir une distribution normale de moyenne 0.90 cm et un écart-type de 0.06 cm. Pour ce faire, on prélève au hasard dans la production 36 câbles dont on mesure le diamètre.

a) Pourquoi peut-on considérer que le diamètre moyen de ces 36 câbles suit une loi normale ?

b) Calculer les paramètres de cette loi normale.

c) On obtient un diamètre moyen de 0.88 cm pour ces 36 câbles. Calculer la probabilité d'obtenir un résultat au moins aussi éloigné des 0.90 cm théoriques.

d) D'après le résultat précédent, diriez-vous que les câbles de cette entreprises sont conformes aux normes ?

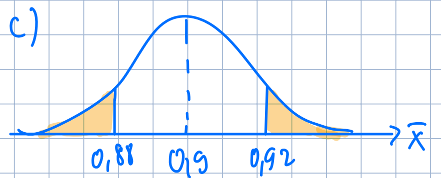
a) Par le TCL, car $n = 36 \Rightarrow n \geq 30$

b) N est supposé infini $\Rightarrow$ échantillon petit

$$\Rightarrow \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}06}{\sqrt{36}} = \underline{0{,}01}$$

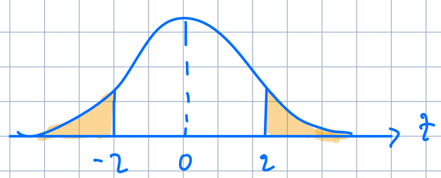
Ainsi, $\overline{X} \sim \mathcal{N}(0{,}9\,;\,0{,}01^2) = \underline{\mathcal{N}(0{,}9\,;\,0{,}0001)}$

c)



$P(\overline{X} \leq 0{,}88$ ou $\overline{X} \geq 0{,}92)$

$= P\left(Z \leq \frac{0{,}88 - 0{,}9}{0{,}01} \text{ ou } Z \geq \frac{0{,}92 - 0{,}9}{0{,}01}\right)$



$= P(Z \leq -2$ ou $Z \geq 2)$

$= P(|Z| \geq 2) = 2P(Z > 2)$

$= 2(1 - P(Z \leq 2))$

$= 2(1 - 0{,}9772) = 0{,}0456 = \underline{4{,}56}\%$

d) <u>Ce résultat est assez rare mais il n'est pas suffisamment pour prétendre que les câbles sont non conformes</u>

5.16 La moyenne d'âge des 200 travailleurs d'une usine est de 38.2 ans, avec un écart-type de 5.4 ans. On suppose que la distribution de l'âge des travailleurs de cette usine suit un modèle normal.
On prélève dans cette population un échantillon aléatoire de 25 travailleurs.

a) Pourquoi peut-on considérer que la moyenne d'âge de ces 25 travailleurs suit une loi normale ?

b) Calculer les paramètres de cette loi normale.

c) Quelle est la probabilité que la moyenne d'âge des 25 travailleurs se situe entre 35 et 40 ans ?

d) Si l'on néglige les valeurs extrêmes ayant moins de 1% de chances d'être obtenues, entre quelles valeurs doit se trouver la moyenne d'âge de ces 25 travailleurs ?

a) Parce que les données de base suivent déjà une loi normale

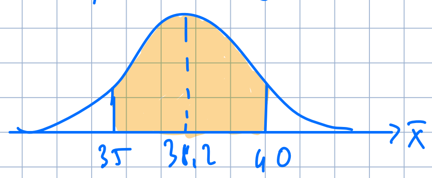
b) $n = 25$, $N = 200$ $\Rightarrow$ $\frac{N}{20} = \frac{200}{20} = 10$

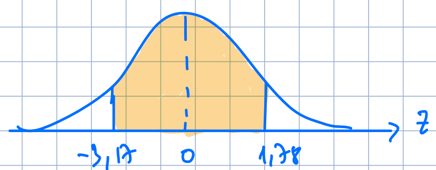
$n > \frac{N}{20}$ $\Rightarrow$ grand échantillon

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{5,4}{\sqrt{25}}\sqrt{\frac{200-25}{200-1}} \simeq \underline{1,01}$$

Ainsi, $\bar{X} \sim \mathcal{N}(38,2\,;\,1,01^2) = \underline{\mathcal{N}(38,2\,;\,1,0201)}$

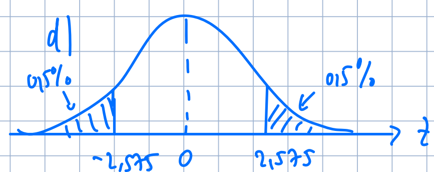
c) $P(35 < X < 40) = ?$





$$\Rightarrow P\left(\frac{35-38,2}{1,01} < Z < \frac{40-38,2}{1,01}\right)$$
$$= P(-3,17 < Z < 1,78)$$
$$= P(Z \leq 1,78) - P(Z \leq -3,17)$$
$$= P(Z \leq 1,78) - P(Z > 3,17)$$
$$= P(Z \leq 1,78) - (1 - P(Z \leq 3,17))$$
$$= 0,9625 - 1 + 0,9992 = 0,9617 \approx \underline{96,17}\%$$

d)



La valeur la plus proche de 0,995 est : $\frac{2,57+2,58}{2} = 2,575$

$\Rightarrow P(|Z| > \underbrace{2,575}_{\downarrow}) = 1\%$

$\bar{X}$ doit se trouver entre : $\frac{c - 38,2}{1,01} = \pm 2,575$

$+2,575$: $c = \underline{40,8 \text{ ans}}$

$-2,575$: $c = \underline{35,6 \text{ ans}}$

5.17 La moyenne d'âge des femmes ayant donné naissance à un enfant en Suisse en 2015 était de 32 ans avec un écart-type de 5 ans.
On prélève un échantillon aléatoire de 100 femmes ayant donné naissance à un enfant en Suisse en 2015, et on leur pose la question suivante : *Quel âge aviez-vous à la naissance de votre enfant ?*

a) Pourquoi peut-on considérer que la moyenne des réponses des 100 femmes suit une loi normale ?

b) Calculer les paramètres de cette loi normale.

c) Si l'on néglige les valeurs extrêmes ayant moins de 5% de chances d'être obtenues, entre quelles valeurs doit se trouver la moyenne des réponses des 100 femmes ?

d) L'âge moyen de ces 100 femmes à la naissance de leur enfant est de 33.7 ans. Doit-on s'étonner d'obtenir un résultat aussi éloigné de la moyenne en Suisse ? Justifier par un calcul de probabilités.

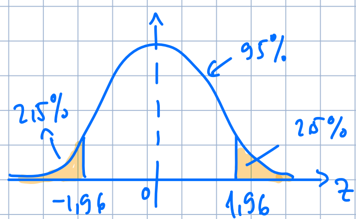
a) Par le TCL, car $n = 100 \Rightarrow n \geq 30$

b) N est supposé infini $\Rightarrow$ échantillon petit

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{100}} = 0{,}5$$

Ainsi, $\bar{X} \sim \mathcal{N}(32\,;\,0{,}5^2) = \mathcal{N}(32\,;\,0{,}25)$

c)



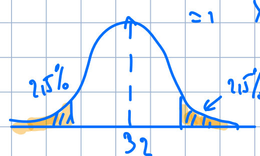
On cherche c tel que $P(|\bar{X}| > c) = 5\%$

$$\Rightarrow P\left(|Z| > \frac{c-32}{0{,}5}\right) = 5\%$$

La valeur la plus proche de 0,975 $\Rightarrow \underbrace{1{,}96}_{\text{table}}$

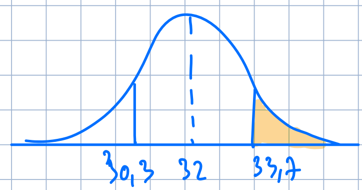
$$\Rightarrow P(|Z| > 1{,}96) = 5\%$$

$\Rightarrow \bar{X}$ doit se trouver entre



i) $\frac{c-32}{0{,}5} = 1{,}96 \Rightarrow c = 0{,}5 \cdot 1{,}96 + 32 = 32{,}98$ ans

et ii) $\frac{c-32}{0{,}5} = -1{,}96 \Rightarrow c = 0{,}5 \cdot (-1{,}96) + 32 = 31{,}02$ ans d)

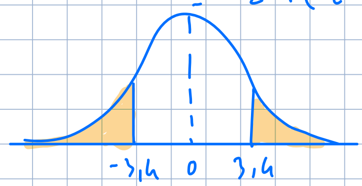


$$P(\bar{X} > 33{,}7 \text{ ou } \bar{X} < 30{,}3)$$

$$P\left(Z > \frac{33{,}7-32}{0{,}5} \text{ ou } Z < \frac{30{,}3-32}{0{,}5}\right)$$

$$\Rightarrow P(Z > 3{,}4 \text{ ou } Z < -3{,}4) = P(|Z| > 3{,}4)$$

$$= 2\cdot P(Z > 3{,}4) = 2\left(1 - P(Z \le 3{,}4)\right)$$



$$= 2 - 2P(Z \le 3{,}4)$$

$$= 2 - 2\cdot 0{,}9997 = 0{,}0006 = \underline{0{,}06\%}$$

<u>Oui, c'est très étonnant, cette situation a 0,06% de chances de se produire !</u>

5.18 Dans un gymnase, 115 élèves de l'école de culture générale ont passé leur examen de mathématiques. On a pu observer que la note de chaque élève suit une loi normale : $X \sim \mathcal{N}(4.1\,;\,1.8225)$.
Un enseignant souhaite déterminer si les élèves de sa classe ont mieux réussi que l'ensemble des élèves du gymnase.

a) Pourquoi peut-on considérer que la moyenne des notes obtenues par les 22 élèves de cette classe suit une loi normale ?

b) Calculer les paramètres de cette loi normale.

c) Quelle est la probabilité que la moyenne des notes des élèves de cette classe soit comprise entre 3.5 et 4.5 ?

d) L'enseignant calcule que la moyenne des notes des élèves de sa classe est de 4.6. Peut-il en déduire que sa classe a particulièrement bien réussi l'examen ? Justifier par un calcul de probabilités.

$X \sim \mathcal{N}(4.1\,;\,1{,}8225)$

a) Oui parce que les données de base suivent déjà une loi normale

b) $N = 115\,,\; n = 22 \;\Rightarrow\; n > \frac{N}{20} = \frac{115}{20} = 5{,}75$

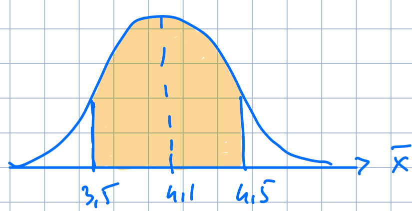
$\Rightarrow$ il s'agit d'un grand échantillon

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{1{,}35}{\sqrt{22}}\cdot\sqrt{\frac{115-22}{115-1}} = \frac{1{,}35}{\sqrt{22}}\cdot\sqrt{\frac{93}{114}}$$

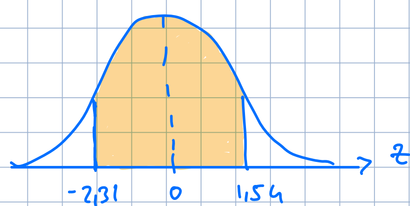
$$\Rightarrow \sigma_{\bar{X}} \cong 0{,}26$$

Ainsi, $\bar{X} \sim \mathcal{N}(4.1\,;\,0{,}26^2) = \mathcal{N}(4{,}1\,;\,0{,}0676)$

c) $P(3{,}5 < \bar{X} < 4{,}5) = ?$



$$\Rightarrow P\left(\frac{3{,}5-4{,}1}{0{,}26} < Z < \frac{4{,}5-4{,}1}{0{,}26}\right) = P(-2{,}31 < Z < 1{,}54)$$



$= P(Z \leq 1{,}54) - P(Z \leq -2{,}31)$

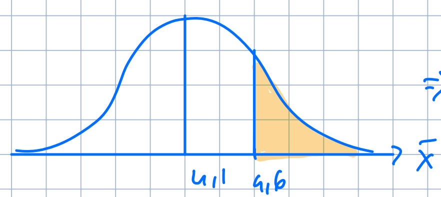
$= P(Z \leq 1{,}54) - P(Z > 2{,}31)$

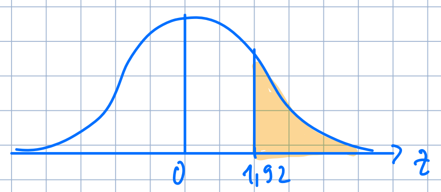
$= P(Z \leq 1{,}54) - (1 - P(Z \leq 2{,}31))$

$= P(Z \leq 1{,}54) - 1 + P(Z \leq 2{,}31)$

$= 0{,}9382 - 1 + 0{,}9896 = 0{,}9278 = 92{,}78\%$

d) $P(\bar{X} \geq 4{,}6)$





$\Rightarrow P\left(Z \geq \frac{4{,}6 - 4{,}1}{0{,}26}\right) = P(Z \geq 1{,}92)$

$= 1 - P(Z \leq 1{,}92)$

$= 1 - 0{,}9726 = 0{,}0274 = 2{,}74\%$

=> Oui, la classe a très bien réussi l'examen, puisque la probabilité d'obtenir une moyenne aussi élevée est de 2,74%

5.19 En 2015, 67'606 personnes sont décédées en Suisse. L'âge moyen au moment du décès est de 79.6 ans avec un écart-type de 15.02 ans.
On prélève au hasard 500 personnes décédées en Suisse en 2015.

a) Pourquoi peut-on considérer que la moyenne des âges de ces 500 personnes au moment du décès suit une loi normale ?

b) Calculer les paramètres de cette loi normale.

c) Quelle est la probabilité que la moyenne d'âge de ces 500 personnes au moment du décès soit inférieure à 80 ans ?

d) Quelle est la probabilité que l'écart entre la moyenne d'âge de ces 500 personnes et celle de toutes les personnes décédées en 2015 soit inférieur à 1 ans ?

e) Si l'on considère uniquement les 99.5% des valeurs les plus proches de la moyenne suisse, entre quelles valeurs doit se trouver la moyenne d'âge de ces 500 personnes ?

a) Par le TCL, car $n = 500 \Rightarrow n \geq 30$

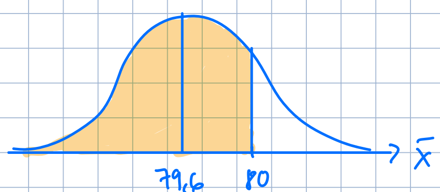
b) $N = 67606$, $n = 500$

$$\frac{N}{20} = \frac{67606}{20} = 3380{,}3 > n \Rightarrow \text{petit échantillon}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{15{,}02}{\sqrt{500}} = 0{,}67$$

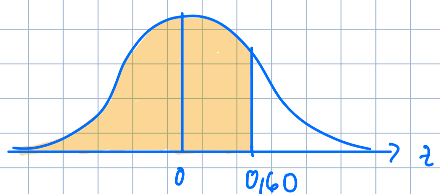
Ainsi $\bar{X} \sim \mathcal{N}(79{,}6\ ;\ 0{,}67^2) = \mathcal{N}(79{,}6\ ;\ 0{,}4489)$

c) $P(\bar{X} < 80)$



$$P(\bar{X} < 80) = P\left(Z < \frac{80-79{,}6}{0{,}67}\right)$$

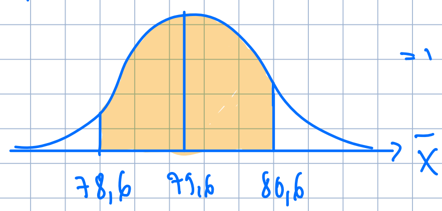
$$\cong P(Z < 0{,}60)$$

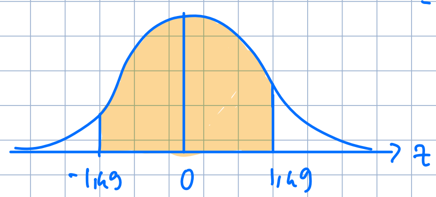


$$\Rightarrow P(Z < 0{,}60) = 100\% - P(Z \geq 0{,}6)$$

$$= 100\% - 27{,}43\% \cong 72{,}57\%$$

d)





$P(78{,}6 < \bar{X} < 80{,}6) = ?$

$\Rightarrow P(78{,}6 < \bar{X} < 80{,}6) = P\left(\frac{78{,}6-79{,}6}{0{,}67} < Z < \frac{80{,}6-79{,}6}{0{,}67}\right)$

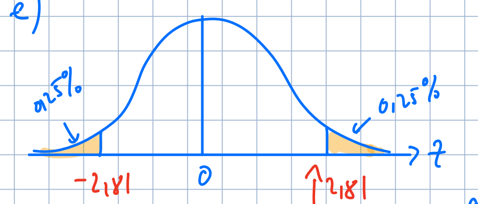
$= P(-1{,}49 < Z < -1{,}49) = P(|Z| < 1{,}49)$

$= 1 - 2P(Z > 1{,}49) = 1 - 2(1 - P(Z \leq 1{,}49))$

$= 1 - 2 + 2P(Z \leq 1{,}49)$

$= -1 + 2 \cdot 0{,}9319 = 0{,}8638 = 86{,}38\%$

e)



chercher c tel que $P(\bar{X} > c) = 99{,}5\%$

$\Rightarrow P\left(Z > \frac{c - 79{,}6}{0{,}67}\right) = 0{,}5\%$

On cherche la valeur la plus proche de 0,9975

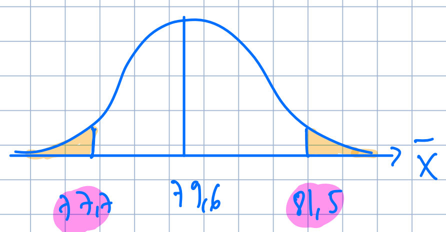
$\rightarrow 2{,}81$

donc $\frac{c - 79{,}6}{0{,}67} = 2{,}81$

$\Rightarrow c = 0{,}67 \cdot 2{,}81 + 79{,}6 \simeq 81{,}5$ ans

et $\frac{c - 79{,}6}{0{,}67} = -2{,}81$

$\Rightarrow c = 0{,}67 \cdot (-2{,}81) + 79{,}6 = 77{,}7$ ans



$\Rightarrow \bar{x}$ doit se trouver entre 77,7 ans et 81,5 ans

5.20 Vous décidez de tenter votre chance au casino en jouant à la roulette américaine. Cette roulette comporte 38 cases : les cases 1 à 36, le zéro et le double zéro.

Vous décidez de miser à chaque fois 1 franc sur "impair". Si la bille tombe sur une case impaire, le casino vous reverse 2 francs. Si la bille tombe sur une case paire, ou sur le zéro ou le double zéro, vous perdez votre mise.

On peut calculer qu'en moyenne, votre gain à chaque partie sera de -5.3 centimes (il s'agit donc d'une perte !) avec un écart-type de 99.86 centimes.

a) Si vous jouez 50 parties, pourquoi peut-on considérer que votre gain moyen par partie (sur l'ensemble des parties de la soirée) suit une loi normale ?

b) Calculer les paramètres de cette loi normale.

c) Quelle est la probabilité qu'à la fin de la soirée, vous repartiez en ayant gagné quelque chose ?

d) Quelle est la probabilité qu'à la fin de la soirée, vous ayez gagné au total plus de 10 francs ?

e) Si vous ne faites pas partie du 1% des joueurs les plus malchanceux, combien d'argent aurez-vous perdu au maximum durant cette soirée ?

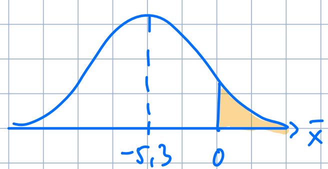
a) Par le TCL, car $n = 50 \Rightarrow n \geq 30$

b) N est supposé infini $\Rightarrow$ échantillon petit

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{99,86}{\sqrt{50}} \cong 14,12$$

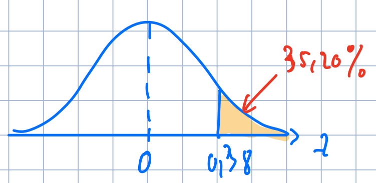
Ainsi, $\bar{X} \sim \mathcal{N}(-5,3\ ;\ 14,12^2) = \mathcal{N}(-5,3\ ;\ 199,37)$

c) $P(\bar{X} > 0)$



$$\Rightarrow P(\bar{X} > 0) = P\left(Z > \frac{0-(-5,3)}{14,12}\right)$$

$$= P\left(Z > \frac{5,3}{14,12}\right) = P(Z > 0,38)$$



$$= 1 - P(Z \leq 0,38) = 1 - 0,6480$$

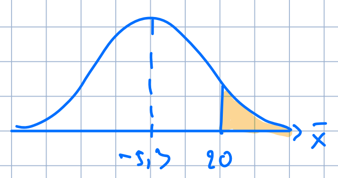
$$= 0,352 = 35,2\ \%$$

d) Gain total $= 10.-$

$\rightarrow$ parties jouées $= 50$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ gain moyen $= \frac{10}{50} = 0{,}2$ frs

$= 20$ cts

$\Rightarrow$ On doit calculer : $P(\bar{x} > 20) = ?$

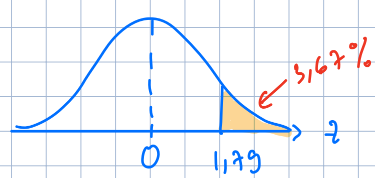


$$P(\bar{x} > 20) = P\left(z > \frac{20-(-5{,}3)}{14{,}12}\right)$$

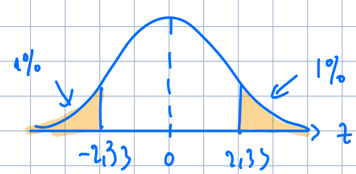
$$= P\left(z > \frac{20+5{,}3}{14{,}12}\right) = P(z > 1{,}79)$$

$$= 1 - P(z \leq 1{,}79) = 1 - 0{,}9633$$

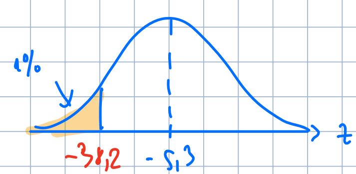
$$= 0{,}0367 = 3{,}67\ \%$$



e) On cherche la valeur plus proche de 0,99 : c'est 2,33 (dans la table)



$$\Rightarrow P(z < -2{,}33) = 1\%$$



$$\Rightarrow P\Big(\bar{x} < \underbrace{\frac{c-(-5{,}3)}{14{,}12}}_{= -2{,}33}\Big) = 1\%$$

$$\Rightarrow \frac{c+5{,}3}{14{,}12} = -2{,}33$$

$$\Rightarrow c = 14{,}12 \cdot (-2{,}33) - 5{,}3 \cong 38{,}20 \text{ cts}$$

$\Rightarrow$ vous perdez maximum : 38,20 cts par parties

$\Rightarrow$ En tout : $38{,}20 \cdot 50 = 1910$ cts

soit 19,10 Frs

5.21 Un gymnase compte 1500 élèves. On a pu mesurer que la moyenne des dépenses hebdomadaires à la cafétéria était de 17.30 avec un écart-type de 8.90. Durant la semaine spéciale, 450 élèves partent en voyage d'études, et ne consomment donc rien à la cafétéria. Le gérant de la cafétéria souhaite estimer la perte que cela représente pour lui.

a) Pourquoi peut-on considérer que le montant moyen qu'auraient dépensés les 450 élèves absents suit une loi normale ?

b) Calculer les paramètres de cette loi normale.

c) Quelle est la probabilité que ce montant moyen soit supérieur à 18 francs par élève ?

d) Si l'on néglige le 1% des valeurs les plus hautes, à combien au maximum doit s'élever le montant moyen qu'auraient dépensés ces élèves ?

A combien s'élève donc, dans le pire cas, la perte totale pour le gérant ?

a) Par le TCL, car $n = 450 \Rightarrow n \geq 30$

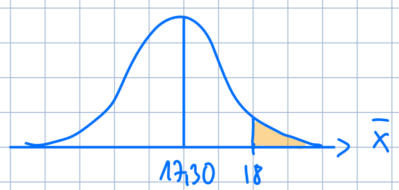
b) $N = 1500$, $n = 450 \Rightarrow \frac{N}{20} = \frac{1500}{20} = 75$

$\Rightarrow 450 > \frac{N}{20} \Rightarrow$ grand échantillon

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{8,90}{\sqrt{450}}\sqrt{\frac{1500-450}{1500-1}} \cong 0,35$$

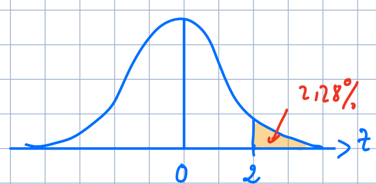
Ainsi, $\bar{X} \sim \mathcal{N}(17,30\,;\,0,35^2) = \mathcal{N}(17,30\,;\,0,1225)$

c)



$P(\bar{X} > 18) = P\left(Z > \frac{18-17,30}{0,35}\right)$

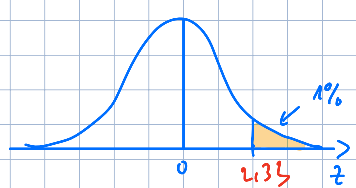
$\Rightarrow P(Z > 2)$



D'où $P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2)$

$= 1 - 0,9772 = 0,0228 = 2,28\%$

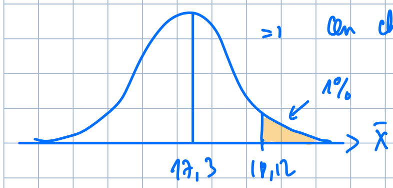
d)



On néglige le 1% des valeurs plus hautes

$\Rightarrow$ On cherche la valeur la plus proche de 0,99 : c'est 2,33 (dans la table)

Donc $P(Z > 2{,}33) = 1\%$



$\Rightarrow$ On cherche c tel que $P\left(\bar{X} > \underbrace{\frac{c - 17{,}30}{0{,}35}}_{!!\ c}\right) = 1\%$

$$\Rightarrow \frac{c - 17{,}30}{0{,}35} = 2{,}33$$

$$\Rightarrow c - 17{,}30 = 0{,}35 \cdot 2{,}33$$

$$\Rightarrow c = 0{,}35 \cdot 2{,}33 + 17{,}30 = 18{,}12$$

$\Rightarrow$ Le montant moyen dépensé par un élève en voyage est au maximum de

18,12 Frs.

$\Rightarrow$ Ceci représente une perte totale de : $18{,}12 \cdot 50 = 8156$ Frs