Exercice 1

À partir d'un groupe de 10 candidats formé de 6 hommes et de 4 femmes, de combien de manières différentes peut-on choisir (chaque personne ne peut occuper qu'une seule fonction) :

a) Un comité formé d'un(e) président(e), d'un(e) caissier(e) et d'un(e) secrétaire ?

Principe de multiplication : $\underset{\text{prés.}}{10} \cdot \underset{\text{caiss.}}{9} \cdot \underset{\text{secrét.}}{8} = 720$

Ou alors : $A_3^{10} = 720$ (ordre important car détermine le rôle)

b) Une commission de 3 personnes ?

Ordre pas important, chaque personne a le même rôle

$\Rightarrow C_3^{10} = 120$

c) Une commission de 3 personnes avec exactement une femme ?

On doit choisir 1 femme parmi 4 ET 2 hommes parmi 6.

Pas d'ordre car pas de rôle spécifique

$\rightarrow C_1^4 \cdot C_2^6 = 60$

d) Une commission de 3 personnes avec au moins une femme ?

Complémentaire : tout sauf aucune femme,

c'est-à-dire tout sauf 3 hommes

$\Rightarrow C_3^{10} - C_3^6 = 100$

Ou alors : 1F ET 2H OU 2F ET 1H OU 3F

$\Rightarrow C_1^4 \cdot C_2^6 + C_2^4 \cdot C_1^6 + C_3^4$

e) Une commission de 3 personnes comportant une personne qui préside la commission et avec exactement une femme ?

1F présidente ET 2 hommes OU 1H président ET 1H ET 1F

$\Rightarrow C_1^4 \cdot C_2^6 + \underbrace{C_1^6 \cdot C_1^5}_{= A_2^6} \cdot C_1^4 = 180$

$= A_2^6$: ordre pour les 2H : le 1er sera président !

Exercice 2

a) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot POLICE ?

Mélange de 6 lettres différentes

$\Rightarrow P_6 = 6! = 720$

b) Combien y en a-t-il où les trois consonnes se trouvent côte-à-côte ?

Astuce du paquet : on choisit l'ordre des 3 consonnes ($\Rightarrow P_3 = 3!$)
puis on imagine qu'on les attache pour qu'elles restent ensemble.
On mélange alors 4 éléments : les 3 voyelles et le paquet ($\Rightarrow P_4 = 4!$)

$\Rightarrow 3! \cdot 4! = 144$

c) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot MISSISSIPPI ?

Mélange de 11 lettres, dont 4 "I", 4 "S" et 2 "P"

$\Rightarrow \overline{P}_{11}(4;4;2) = \dfrac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34'650$

d) Combien y en a-t-il qui commencent et se terminent par la lettre S ?

La 1e et la dernière lettres sont fixées => on doit juste mélanger les 9 lettres restantes

$$\Rightarrow \overline{P}_9(4;2;2) = \frac{9!}{4!\,2!\,2!} = 3780$$

e) Dans combien d'entre-eux les deux P› ne se trouvent-ils pas côte-à-côte ?

Complémentaire : tout sauf les 2 "P" ensemble

$$\Rightarrow \underbrace{34'650}_{\text{voir c)}} - \underbrace{\frac{10!}{4!\,4!}}_{\text{On forme un paquet } \boxed{PP}} = 28'350$$

Exercice 3

De combien de façons peut-on choisir 5 cartes à jouer dans un jeu de 36 cartes en respectant les conditions suivantes ?

a) Aucune condition particulière

Si le contraire n'est pas précisé, l'ordre des cartes n'est jamais important

$$\Rightarrow C_5^{36} = 376'992$$

b) Avoir les 4 as

Si on a les 4 as, il faut seulement choisir la 5e carte parmi les 32 cartes qui ne sont pas des As

$$\Rightarrow C_4^4 \cdot C_1^{32} = 32$$

= 1
facultatif

c) Avoir exactement 2 as et 2 rois

On choisit 2 as parmi 4 ET 2 rois parmi 4 ET 1 5^e carte parmi les 28 cartes qui ne sont ni des as, ni des rois

$$\Rightarrow C_2^4 \cdot C_2^4 \cdot C_1^{28} = 1008$$

d) Avoir au moins 1 as

Complémentaire : tout sauf aucun as

$$\Rightarrow C_5^{36} - C_5^{32} = 175'616$$

les 5 cartes sont choisies parmi les 32 cartes qui ne sont pas des as

e) N'avoir aucun pique

On choisit les 5 cartes parmi les 27 cartes qui ne sont pas des "piques"

$$\Rightarrow C_5^{27} = 80'730$$

Exercice 4

De combien de manières peut-on asseoir 4 hommes et 4 femmes en rang si :

a) aucune restriction n'est mise

On mélange juste 8 personnes $\Rightarrow P_8 = 8! = 40'320$

(les personnes sont <u>toujours</u> différentes !)

b) les personnes A et B veulent être ensemble

Astuce du paquet

$2! \cdot 7! = 10'080$

choix de l'ordre dans le paquet

on mélange 6 personnes plus 1 paquet $\Rightarrow$ 7 éléments

c) les hommes ne doivent avoir que des voisines et inversément

Principe de multiplication : $8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 1152$

Ou alors : on choisit l'ordre des hommes ET l'ordre des femmes ET si on dispose HFHFHFHF ou FHFHFHFH

$\Rightarrow 4! \cdot 4! \cdot 2 = 1152$

d) les hommes doivent rester ensemble

Astuce du paquet

$\Rightarrow 4! \cdot 5! = 2'880$

ordre des 4 hommes dans le paquet

on mélange 4 femmes et un paquet $\Rightarrow$ 5 éléments

e) les personnes forment 4 couples et chaque couple doit rester réuni

Chaque couple va former un paquet. Il y a 2! manières de choisir l'ordre POUR CHAQUE COUPLE $\Rightarrow (2!)^4$

Enfin, on mélangera les 4 paquets $\Rightarrow 4!$

$\Rightarrow (2!)^4 \cdot 4! = 384$

Exercice 5

On dispose de 10 timbres tous différents. Trois d'entre eux sont rouges, cinq sont bleus et deux sont verts. On en choisit quatre.

De combien de façons différentes peut-on faire ce choix, sachant que :

a) les timbres choisis sont tous de la même couleur ?

Ils sont donc forcément bleus

$\Rightarrow C_4^5 = 5$

b) les trois couleurs figurent parmi les timbres choisis ?

2r et 1b et 1v ou 1r et 2b et 1v ou 1r et 1b et 2v

$\Rightarrow C_2^3 \cdot C_1^5 \cdot C_1^2 + C_1^3 \cdot C_2^5 \cdot C_1^2 + C_1^3 \cdot C_1^5 \cdot C_2^2 =$

$= 30 + 60 + 15 = 105$

c) une et une seule des couleurs ne figure pas dans les timbres choisis ?

Complémentaire : tout sauf (4 bleus ou les 3 couleurs y figurent)

$\Rightarrow C_4^{10} - (\underbrace{5}_{\text{voir a)}} + \underbrace{105}_{\text{voir b)}}) = 100$

Exercice 6

De combien de façons peut-on aligner 5 dés à jouer, tous de couleur différente ?

On choisit l'ordre des couleurs ($\Rightarrow 5!$) ET une face pour chaque dé (avec possibilité de choisir plusieurs fois la même face $\Rightarrow 6^5$)

$$\Rightarrow 5! \cdot 6^5 = 933'120$$

Exercice 7

Dans une loterie, on doit choisir 5 numéros parmi les nombres de 1 à 50, en les entourant sur une grille. L'organisateur tire ensuite au sort les 5 numéros gagnants.

a) Combien y a-t-il de manières différentes de remplir une grille ?

On choisit 5 numéros parmi 50, sans tenir compte de l'ordre

$$\Rightarrow C_5^{50} = 2'118'760$$

b) Combien y a-t-il de grilles différentes qui contiennent exactement 3 numéros gagnants (et donc 2 numéros perdants) ?

Il faut avoir coché 3 numéros parmi les 5 qui sont gagnants
ET 2 parmi les 45 qui sont perdants

$$\Rightarrow C_3^5 \cdot C_2^{45} = 9'900$$

c) Combien y a-t-il de grilles différentes qui contiennent au moins un numéro gagnant ?

Complémentaire : tout sauf 5 numéros perdants

$$\Rightarrow C_5^{50} - C_5^{45} = 897'001$$

Exercice 8

Combien de salades différentes peut-on créer à partir des légumes du jardin si l'on a fait pousser des salades vertes, des tomates, des carottes, des endives et des concombres ?

Pour chaque légume, on peut choisir de le mettre ou non dans la salade. Mais si on choisit 5 fois de ne pas mettre le légume, la salade sera vide !

$\Rightarrow 2^5 - 1 = 31$

Exercice 9

Une salle de classe comprend 13 tables de 2 places. On doit y placer 10 élèves. De combien de manières peut-on faire ce choix si :

a) Il n'y a aucune restriction

Il y a 26 places $\Rightarrow 26 \cdot 25 \cdot \ldots \cdot 17 = A_{10}^{26} \cong 19{,}3 \cdot 10^{12}$

(~ 19 mille milliards)

b) On ne peut pas asseoir deux élèves à la même table

Principe de multiplication : $26 \cdot 24 \cdot 22 \cdot \ldots \cdot 8 \cong 1{,}06 \cdot 10^{12}$

Ou alors : on choisit 1 table par élève, puis pour chaque élève, on choisit s'il s'assied à gauche ou à droite

$\Rightarrow A_{10}^{13} \cdot 2^{10} \cong 1{,}06 \cdot 10^{12}$

c) On veut absolument que tous les élèves soient assis par groupes de deux

On choisit 5 tables (sans ordre), puis on répartit les 10 élèves aux 10 places

$\Rightarrow C_5^{13} \cdot 10! = 4'670'265'600 \cong 4{,}67 \cdot 10^9$

d) Les 4 filles veulent être assises aux 4 places près du radiateur

On place les 4 filles, puis les 6 garçons

$\Rightarrow 4! \cdot A_6^{22} = 1'289'312'640$

$= A_4^4$

reste 22 places pour les 6 garçons

e) Julien et Arnaud ne doivent pas être assis côte-à-côte

Complémentaire : tout sauf J. et A. ensemble

$A_{10}^{26} - C_1^{13} \cdot 2 \cdot A_8^{24} \cong 18,5 \cdot 10^{12}$

choix d'une table pour A et J

A J ou J A ?

reste 24 places pour les 8 élèves

Réponses

Ex 1	a) 720	b) 120	c) 60	d) 100	e) 180	
Ex 2	a) 720	b) 144	c) 34'650	d) 3'780	e) 28'350	
Ex 3	a) 376'992	b) 32	c) 1'008	d) 175'616	e) 80'730	
Ex 4	a) 40'320	b) 10'080	c) 1'152	d) 2'880	e) 384	
Ex 5	a) 5	b) 100	c) 105			
Ex 6	933'120					
Ex 7	a) 2'118'760	b) 9'900	c) 897'001			
Ex 8	31					
Ex 9	a) $\sim 19.3 \cdot 10^{12}$	b) $\sim 1.06 \cdot 10^{12}$	c) 4'670'265'600	d) 1'289'312'640	e) $\sim 18.5 \cdot 10^{12}$	