Corrigé

3C

Chapitre 4 : Puissances, racines, exponentielles et logarithmes

Puissances à exposants entiers

1.1 Simplifier les expressions suivantes :

a) $2^4 \cdot 3^4$ b) $2^3 \cdot (-3)^3 \cdot 4^3$ c) $3^6 \cdot 5^6$

d) $5^0 \cdot 5^1 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot 5^{10}$ e) $3^2 \cdot 5^2 \cdot 15^3$ f) $\frac{5^8}{5^6}$

g) $\frac{5^6}{5^8}$ h) $\left(-\frac{2}{3}\right)^5$ i) $\frac{7 \cdot 7^5 \cdot 7^0 \cdot 7}{7^3 \cdot 7^4}$

a) $2^4 \cdot 3^4 = (2 \cdot 3)^4 = \underline{6^4}$

b) $2^3 \cdot (-3)^3 \cdot 4^3 = (2 \cdot (-3) \cdot 4)^3 = (-24)^3 = \underline{-24^3}$

c) $3^6 \cdot 5^6 = (3 \cdot 5)^6 = \underline{15^6}$

d) $5^0 \cdot 5^1 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot 5^{10} = 5^{0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10} = \underline{5^{55}}$

e) $3^2 \cdot 5^2 \cdot 15^3 = (3 \cdot 5)^2 \cdot 15^3 = 15^2 \cdot 15^3 = 15^{2+3} = \underline{15^5}$

f) $\frac{5^8}{5^6} = (5)^{8-6} = \underline{5^2}$

g) $\frac{5^6}{5^8} = (5)^{6-8} = 5^{-2} = \underline{\frac{1}{5^2}}$

h) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{5} = -\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \underline{-\frac{2^5}{3^5}}$ impair

i) $\frac{7 \cdot 7^5 \cdot 7^0 \cdot 7}{7^3 \cdot 7^4} = \frac{7^{1+5+0+1}}{7^{3+4}} = \frac{7^7}{7^7} = \underline{1}$

1.2 Simplifier les expressions suivantes :

a) $(2^2)^3$ b) $2^{(2^3)}$ c) $((-4)^2)^4$

d) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)^6$ e) $\left(-\frac{2^4}{3^3}\right)^2$ f) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \div \left(\frac{5}{3}\right)^3$

g) $4^2 \cdot 2^5 \cdot 8^2$ h) $\left(\frac{3}{4}\right)^4 \div \left(\frac{9}{8}\right)^4$ i) $\frac{(3 \cdot 9 \cdot 27 \cdot 81)^5}{3^{50}}$

a) $(2^2)^3 = 2^{2\cdot 3} = 2^6$

b) $2^{(2^3)} = 2^8$

c) $((-4)^2)^4$ ← pair $= ((4)^2)^4 = 4^{2\cdot 4} = 4^8 = (2^2)^8 = 2^{2\cdot 8} = 2^{16}$

d) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)^6 = \left(\frac{1}{3}\right)^{3\cdot 6} = \left(\frac{1}{3}\right)^{18} = \frac{1}{3^{18}}$

e) $\left(-\frac{2^4}{3^3}\right)^2 = \left(\frac{2^4}{3^3}\right)^2 = \frac{(2^4)^2}{(3^3)^2} = \frac{2^{4\cdot 2}}{3^{3\cdot 2}} = \frac{2^8}{3^6}$

f) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \div \left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} \div \frac{5^3}{3^3} = \frac{2^3}{\cancel{3^3}} \cdot \frac{\cancel{3^3}}{5^3} = \frac{2^3}{5^3}$

g) $4^2 \cdot 2^5 \cdot 8^2 = (2^2)^2 \cdot 2^5 \cdot (2^3)^2 = 2^{2\cdot 2} \cdot 2^5 \cdot 2^{3\cdot 2} = 2^{15}$

h) $\left(\frac{3}{4}\right)^4 \div \left(\frac{9}{8}\right)^4 = \frac{3^4}{4^4} \div \frac{9^4}{8^4} = \frac{3^4}{(2^2)^4} \div \frac{(3^2)^4}{(2^3)^4}$

$$= \frac{3^4}{2^8} \div \frac{3^8}{2^{12}} = \frac{3^4}{2^8} \cdot \frac{2^{12}}{3^8} = \frac{3^4}{3^8} \cdot \frac{2^{12}}{2^8}$$

$$= (3)^{4-8} \cdot (2)^{12-8} = 3^{-4} \cdot 2^4 = \frac{2^4}{3^4}$$

i) $$\frac{(3 \cdot 9 \cdot 27 \cdot 81)^5}{3^{50}} = \frac{(3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4)^5}{3^{50}} = \frac{(3^{1+2+3+4})^5}{3^{50}}$$

$$= \frac{(3^{10})^5}{3^{50}} = 3^{50-50} = 3^0 = 1$$

1.3 Calculer sans utiliser la machine :

a) 4^{-2} b) 2^{-1} c) 3^{-3} d) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$ e) $\left(\frac{-1}{2}\right)^{-2}$ f) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

a) $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \underline{\frac{1}{16}}$

b) $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \underline{\frac{1}{2}}$

c) $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \underline{\frac{1}{27}}$

d) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{4}{1}\right)^{1} = \underline{4}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$

e) $\left(\frac{-1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{-1}\right)^{2} = \frac{2^2}{(-1)^2} = \frac{4}{1} = \underline{4}$

f) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3} = \frac{3^3}{2^3} = \underline{\frac{27}{8}}$

1.4 Le produit de tous les nombres de chaque ligne et de chaque colonne du tableau vaut 2^{14}. Remplir les cases manquantes :

2^{11}	2^{-2}		2^{8}
2^{0}			2^{3}
		2^{2}	2^{7}
2^{-1}		2^{10}	

$2^{11+0+4-1} = 2^{14}$

2^{11}	2^{-2}	2^{-3}	2^{8}
2^{0}	2^{6}	2^{5}	2^{3}
2^{4}	2	2^{2}	2^{7}
2^{-1}	2^{9}	2^{10}	2^{-4}

Exemple : $2^{-1} \cdot 2^{9} \cdot 2^{10} \cdot 2^{-4} = 2^{-1+9+10-4} = 2^{14}$

1.5 Simplifier les expressions suivantes et les écrire sans fraction :

a) $2^4 \cdot 2^{-2} \cdot 2$ b) $(2^3)^{-5}$ c) $\dfrac{5^3}{5^{-2}}$

d) $((-1)^{-2})^{-3}$ e) $(2^{-1} \cdot 5^{-1})^{-1}$ f) $\left(\dfrac{11^{-2}}{11^8}\right)^{-5}$

g) $7^{-3} \cdot \dfrac{49}{7^8} \cdot 7$ h) $10'000 \cdot \dfrac{100}{100'000} \cdot 10^{-3}$ i) $\dfrac{1'280 \cdot 5^7 \cdot 125}{(0,2 \cdot 25)^3}$

a) $2^4 \cdot 2^{-2} \cdot 2 = 2^{4-2+1} = \underline{2^3}$

b) $(2^3)^{-5} = 2^{3\cdot(-5)} = \underline{2^{-15}}$

c) $\dfrac{5^3}{5^{-2}} = (5)^{3-(-2)} = (5)^{3+2} = \underline{5^5}$

d) $((-1)^{-2})^{-3} = (-1)^{(-2)\cdot(-3)} = (-1)^6 = \underline{1}$

e) $(2^{-1} \cdot 5^{-1})^{-1} = ((2\cdot 5)^{-1})^{-1} = (10^{-1})^{-1}$

$= 10^{(-1)\cdot(-1)} = 10^1 = \underline{10}$

f) $\left(\dfrac{11^{-2}}{11^8}\right)^{-5} = ((11)^{-2-8})^{-5} = ((11)^{-10})^{-5}$

$= (11)^{(-10)\cdot(-5)} = \underline{11^{50}}$

g) $7^{-3} \cdot \dfrac{49}{7^8} \cdot 7 = 7^{-3} \cdot \dfrac{7^2}{7^8} \cdot 7 = \dfrac{7^{-3+2+1}}{7^8} = \dfrac{7^0}{7^8} = \dfrac{1}{7^8} = \underline{7^{-8}}$

h) $10'000 \cdot \dfrac{100}{100'000} \cdot 10^{-3} = 10^4 \cdot \dfrac{10^2}{10^5} \cdot 10^{-3} = \dfrac{10^{4+2-3}}{10^5}$

$= \dfrac{10^3}{10^5} = 10^{3-5} = 10^{-2}$

i) $\dfrac{1'280 \cdot 5^7 \cdot 125}{(0,2 \cdot 25)^3} = \dfrac{1'280 \cdot 5^7 \cdot \cancel{5^3}}{\cancel{5^3}} = 1280 \cdot 5^7$

$= 1'280 \cdot 78125 = 100'000'000 = 10^8$

1.6 Simplifier les expressions suivantes et les écrire sans exposant négatif :

a) $a^2 \cdot (a^2)^3$ b) $(2x^2)^4 \cdot (3x^5)^2$ c) $\left(\frac{2}{3}x^3\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}x^2\right)^3$

d) $(x^2)^{-3} \cdot (x^{-4})^{-2} \cdot x^{-1}$ e) $(5x^2y^{-3}) \cdot (4x^{-5}y^{-1})$ f) $\dfrac{3x^2y^4}{2x^0y^3}$

g) $\dfrac{3x^3 \cdot 2y}{(2x^2y)^3}$ h) $\left(\dfrac{4a^2b}{a^3b^2}\right) \cdot \left(\dfrac{5a^2b}{2b^4}\right)$ i) $(-2xy^2)^5 \cdot \left(\dfrac{x^7}{8y^3}\right)$

a) $a^2 \cdot (a^2)^3 = a^2 \cdot a^6 = \underline{a^8}$

b) $(2x^2)^4 \cdot (3x^5)^2 = 2^4 \cdot x^8 \cdot 3^2 x^{10} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot x^{18} = \underline{144\,x^{18}}$

c) $\left(\dfrac{2x^3}{3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{3}{2}x^2\right)^3 = \dfrac{2^2}{3^2}x^6 \cdot \dfrac{3^3}{2^3}x^6 = \underline{\dfrac{3}{2}x^{12}}$

d) $(x^2)^{-3} \cdot (x^{-4})^{-2} \cdot x^{-1} = x^{-6} \cdot x^8 \cdot x^{-1} = \underline{x}$

e) $(5x^2y^{-3})(4x^{-5}y^{-1}) = 20 \cdot x^2 x^{-5} y^{-3} y^{-1} = 20\,x^{-3}y^{-4} = \underline{\dfrac{20}{x^3y^4}}$

f) $\dfrac{3x^2y^4}{2x^0y^3} = \dfrac{3x^2 \cdot y^{4-3}}{2} = \underline{\dfrac{3x^2y}{2}}$

g) $\dfrac{3x^3 \cdot 2y}{(2x^2y)^3} = \dfrac{3 \cdot 2\,x^3 y}{2^3 x^6 y^3} = \dfrac{3}{2^2}x^{-3}y^{-2} = \underline{\dfrac{3}{4x^3y^2}}$

h) $\left(\dfrac{4a^2b}{a^3b^2}\right) \cdot \left(\dfrac{5a^2b}{2b^4}\right) = \dfrac{4 \cdot 5}{2}\,\dfrac{a^2 \cdot a^2 \cdot b \cdot b}{a^3 \cdot b^2 \cdot b^4} = \underline{\dfrac{10\,a}{b^4}}$

i) $(-2xy^2)^5 \cdot \left(\dfrac{x^7}{8y^3}\right) = (-2)^5 x^5 y^{10} \dfrac{x^7}{8y^3} = \dfrac{-2^5\,x^{12}y^7}{2^3} = \underline{-4x^{12}y^7}$

1.7 Simplifier les expressions suivantes :

a) $x^2yz^3 \cdot 3xy \cdot 27x^3z^5$ b) $(2a^2b^3c)^4$ c) $\left(\frac{2r^3}{s}\right)^2 \cdot \left(\frac{s}{r}\right)^3$

d) $\frac{(4x^2y^3)^5}{(2xy)^3} \div \frac{x^7}{(y^3)^4}$ e) $(u^{-2}v^3)^{-3}$ f) $\frac{8x^3y^{-5}}{4x^{-1}y^2}$

g) $\left(\frac{x}{3}\right)^{-2} \div \left(\frac{x}{9}\right)^{-3}$ h) $\left(\frac{9y^3(3y^2)^{-2}}{(y^{-4})^{-3}}\right)^5$ i) $\left(\frac{4a^{-3}b^2}{3a^4b^{-2}}\right)^2 \cdot \left(\frac{4a^3b^{-2}}{2b^{-4}}\right)^{-2}$

a) $x^2yz^3 \cdot 3xy \cdot 27x^3z^5 = 3\cdot 27\cdot x^2\cdot x\cdot x^3\cdot y\cdot y\cdot z^3\cdot z^5$

$= 3\cdot 3^3\cdot x^6\cdot y^2\cdot z^8 = 3^4x^6y^2z^8$

b) $(2a^2b^3c)^4 = 2^4\cdot a^{2\cdot 4}\cdot b^{3\cdot 4}\cdot c^4 = 2^4\cdot a^8\cdot b^{12}\cdot c^4$

$= 2^4a^8b^{12}c^4$

c) $\left(\frac{2r^3}{s}\right)^2\cdot\left(\frac{s}{r}\right)^3 = \frac{(2r^3)^2}{s^2}\cdot\frac{s^3}{r^3} = \frac{4r^6}{s^2}\cdot\frac{s^3}{r^3}$

$= \frac{4r^6}{r^3}\cdot\frac{s^3}{s^2} = 4r^{6-3}\cdot s^{3-2} = 4r^3\cdot s = 2^2r^3s$

d) $\frac{(4x^2y^3)^5}{(2xy)^3}\div\frac{x^7}{(y^3)^4} = \frac{4^5\cdot x^{10}\cdot y^{15}}{2^3\cdot x^3\cdot y^3}\div\frac{x^7}{y^{12}}$

$= \frac{(2^2)^5\cdot x^{10-3}\cdot y^{15-3}}{2^3}\div\frac{x^7}{y^{12}} = \frac{2^{10}\cdot x^7\cdot y^{12}}{2^3}\div\frac{x^7}{y^{12}}$

$$= \frac{2^{10} \cdot \cancel{x^7} \cdot y^{12}}{2^3} \cdot \frac{y^{12}}{\cancel{x^7}} = 2^{10-3} \cdot y^{12} \cdot y^{12} = 2^7 \cdot y^{24}$$

e) $$\left(u^{-2} v^3\right)^{-3} = u^{(-2)(-3)} \cdot v^{(3)\cdot(-3)} = u^6 v^{-9}$$

f) $$\frac{8x^3y^{-5}}{4x^{-1}y^2} = 2 \cdot x^{3-(-1)} \cdot y^{-5-2} = 2x^4y^{-7}$$

g) $$\left(\frac{x}{3}\right)^{-2} \div \left(\frac{x}{9}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{x}\right)^2 \div \left(\frac{9}{x}\right)^3$$

$$= \frac{3^2}{x^2} \cdot \frac{x^3}{9^3} = \frac{3^2}{x^2} \cdot \frac{x^3}{3^6} = \frac{3^2}{3^6} \cdot \frac{x^3}{x^2} = 3^{-4} \cdot x$$

h) $$\left(\frac{9y^3\left(3y^2\right)^{-2}}{\left(y^{-4}\right)^{-3}}\right)^5 = \frac{9^5 y^{15} \left(3y^2\right)^{-10}}{\left(y^{-4}\right)^{-15}}$$

$$= \frac{\cancel{3^{10}}\, y^{15}\, \cancel{3^{-10}}\, y^{-20}}{y^{60}} = \frac{y^{-5}}{y^{60}} = y^{-5-60} = y^{-65}$$

i) $$\left(\frac{4a^{-3}b^2}{3a^4b^{-2}}\right)^2 \cdot \left(\frac{4a^3b^{-2}}{2b^{-6}}\right)^{-2} = \left(\frac{4a^{-3-4}b^{2-(-2)}}{3}\right)^2 \cdot \left(2a^3b^{-2-(-6)}\right)^{-2}$$

$$= \left(\frac{4a^{-7}b^4}{3}\right)^2 \cdot \left(2a^3b^2\right)^{-2} = \frac{(2^2)^2 \cdot a^{-14} b^8 \cdot 2^{-2} \cdot a^{-6} b^{-4}}{3^2} = \frac{2^4 \cdot 2^{-2} a^{-20} b^4}{3^2}$$

$$= \frac{2^2 \cdot a^{-20} b^4}{3^2} = \frac{4b^4}{9a^{20}}$$

Puissances à exposants rationnels

1.8 Calculer :

a) $\sqrt{25}$ b) $\sqrt[3]{1'000}$ c) $\sqrt[4]{625}$ d) $\sqrt[5]{-32}$ e) $\sqrt[6]{729}$

f) $\sqrt[3]{0,027}$ g) $\sqrt[3]{0,125}$ h) $\sqrt[3]{0,015625}$ i) $\sqrt{0}$ j) $\sqrt[3]{0,000008}$

a) $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$

b) $\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = 10^{3/3} = 10$

c) $\sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5$

d) $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

e) $\sqrt[6]{729} = \sqrt[6]{3^6} = 3$

f) $\sqrt[3]{0,027} = \sqrt[3]{27 \cdot 10^{-3}} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 10^{-3}} = 3^{3/3} \cdot 10^{-3/3}$

$= 3 \cdot 10^{-1} = \frac{3}{10} = 0,3$

g) $\sqrt[3]{0,125} = \sqrt[3]{125 \cdot 10^{-3}} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 10^{-3}} = 5 \cdot 10^{-1}$

$= \frac{5}{10} = 0,5$

h) $\sqrt[3]{0,015625} = \sqrt[3]{15625 \cdot 10^{-6}} = \sqrt[3]{25^3 \cdot 10^{-6}}$

$= 25 \cdot 10^{-2} = \frac{25}{10^2} = 0,25$

i) $\sqrt{0} = 0$

j) $\sqrt[3]{0{,}000008} = \sqrt[3]{8 \cdot 10^{-6}} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 10^{-6}}$

$= 2 \cdot 10^{-2} = \frac{2}{10^2} = 0{,}02$

1.9 Simplifier les expressions suivantes :

a) $\sqrt{24}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{243}$ d) $\sqrt{50}$ e) $\sqrt{300}$ f) $\sqrt{54}$

g) $\sqrt{125}$ h) $\sqrt{147}$ i) $\sqrt{80}$ j) $\sqrt{1'000}$ k) $\sqrt{250}$ l) $\sqrt{7'000}$

m) $3\sqrt{5}-4\sqrt{20}+5\sqrt{45}-3\sqrt{80}$ n) $2\sqrt{40}-2\sqrt{90}+\sqrt{4'000}-5\sqrt{10}$

a) $\sqrt{24} = \sqrt{4\cdot 6} = \sqrt{2^2\cdot 6} = 2\sqrt{6}$

b) $\sqrt{18} = \sqrt{9\cdot 2} = \sqrt{3^2\cdot 2} = 3\sqrt{2}$

c) $\sqrt{243} = \sqrt{81\cdot 3} = \sqrt{9^2\cdot 3} = 9\sqrt{3}$

(ou $\sqrt{81\cdot 3} = \sqrt{81}\cdot\sqrt{3} = 9\cdot\sqrt{3}$)

d) $\sqrt{50} = \sqrt{25\cdot 2} = \sqrt{5^2\cdot 2} = 5\sqrt{2}$

e) $\sqrt{300} = \sqrt{100\cdot 3} = \sqrt{10^2\cdot 3} = 10\sqrt{3}$

f) $\sqrt{54} = \sqrt{9\cdot 6} = \sqrt{3^2\cdot 6} = 3\sqrt{6}$

g) $\sqrt{125} = \sqrt{25\cdot 5} = \sqrt{5^2\cdot 5} = 5\sqrt{5}$

h) $\sqrt{147} = \sqrt{49\cdot 3} = \sqrt{7^2\cdot 3} = 7\sqrt{3}$

i) $\sqrt{80} = \sqrt{16\cdot 5} = \sqrt{4^2\cdot 5} = 4\sqrt{5}$

j) $\sqrt{1000} = \sqrt{100\cdot 10} = \sqrt{10^2\cdot 10} = 10\sqrt{10}$

k) $\sqrt{250} = \sqrt{25\cdot 10} = \sqrt{5^2\cdot 10} = 5\sqrt{10}$

l) $\sqrt{7'000} = \sqrt{100 \cdot 70} = \sqrt{10^2 \cdot 70} = 10\sqrt{70}$

m) $3\sqrt{5} - 4\sqrt{20} + 5\sqrt{45} - 3\sqrt{80}$

$= 3\sqrt{5} - 4\sqrt{4 \cdot 5} + 5\sqrt{9 \cdot 5} - 3\sqrt{16 \cdot 5} = 3\sqrt{5} - 4 \cdot 2\sqrt{5} + 5 \cdot 3\sqrt{5} - 3 \cdot 4\sqrt{5}$

$= 3\sqrt{5} - 8\sqrt{5} + 15\sqrt{5} - 12\sqrt{5} = \sqrt{5}\left(3 - 8 + 15 - 12\right)$

$= -2\sqrt{5}$

n) $2\sqrt{40} - 2\sqrt{90} + \sqrt{4000} - 5\sqrt{10}$

$= 2\sqrt{4 \cdot 10} - 2\sqrt{9 \cdot 10} + \sqrt{400 \cdot 10} - 5\sqrt{10} = 2 \cdot 2\sqrt{10} - 2 \cdot 3\sqrt{10} + 20\sqrt{10} - 5\sqrt{10}$

$= 4\sqrt{10} - 6\sqrt{10} + 20\sqrt{10} - 5\sqrt{10} = \sqrt{10}\left(4 - 6 + 20 - 5\right) = 13\sqrt{10}$

1.10 Simplifier les expressions suivantes :

a) $\sqrt[3]{\sqrt{7}}$ b) $\sqrt[3]{2^{18}\cdot 5^{12}\cdot 3^{3}}$ c) $\sqrt[4]{64}\cdot\sqrt[4]{4}$ d) $\sqrt[5]{3^{15}}$ e) $\left(\sqrt[8]{\sqrt[4]{\sqrt{2}}}\right)^{128}$

f) $\sqrt{3\sqrt{3}}$ g) $\sqrt[3]{5\sqrt{5\sqrt{5}}}$ h) $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}$ i) $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3^4\sqrt[3]{3^6}}}$ j) $\sqrt[3]{2\sqrt[6]{\dfrac{2^{14}}{\sqrt[3]{2^6}}}}$

a) $\sqrt[3]{\sqrt{7}} = \sqrt[3]{7^{1/2}} = 7^{\left(\frac{1/2}{3}\right)} = 7^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{7}$

$\left(\text{ou } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a} \Rightarrow \sqrt[3]{\sqrt{7}} = \sqrt[3.2]{7} = \sqrt[6]{7}\right)$

b) $\sqrt[3]{2^{18}\cdot 5^{12}\cdot 3^{3}} = 2^{\frac{18}{3}}\cdot 5^{\frac{12}{3}}\cdot 3^{\frac{3}{3}} = 2^6\cdot 5^4\cdot 3 = 64\cdot 625\cdot 3 = 120'000$

c) $\sqrt[4]{64}\cdot\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{64\cdot 4} = \sqrt[4]{4^3\cdot 4} = \sqrt[4]{4^4} = 4$

d) $\sqrt[5]{3^{15}} = 3^{15/5} = 3^3 = 27$

e) $\left(\sqrt[8]{\sqrt[4]{\sqrt{2}}}\right)^{128} = \left(\sqrt[8\cdot 4\cdot 2]{2}\right)^{128}$

$= \left(\sqrt[64]{2}\right)^{128} = \sqrt[64]{2^{128}} = 2^{\frac{128}{64}} = 2^2 = 4$

f) $\sqrt{3\sqrt{3}} = \sqrt{3\cdot 3^{1/2}} = \sqrt{3^{1+\frac{1}{2}}} = \sqrt{3^{3/2}}$

$= 3^{\frac{3}{2}/2} = 3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{27}$

$\left(\text{ou } \sqrt{3\sqrt{3}} = \sqrt{\sqrt{9\cdot 3}} = \sqrt{\sqrt{27}} = \sqrt[4]{27}\right)$

g) $\sqrt[3]{5\sqrt{5\sqrt{5}}} = \sqrt[3]{5\sqrt{\sqrt{5^2 \cdot 5}}} = \sqrt[3]{5\sqrt{\sqrt{5^3}}}$

$= \sqrt[3]{5\sqrt[4]{5^3}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{5^4 \cdot 5^3}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{5^7}}$

$= \sqrt[12]{5^7} = \sqrt[12]{78125}$

h) $\sqrt{2\sqrt[3]{2}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^3 \cdot 2}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^4}} = \sqrt[6]{2^4}$

$= 2^{\frac{4}{6}} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

i) $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3^4\sqrt[3]{3^6}}} = \sqrt[3]{3\sqrt[3]{3^4 \cdot 3^{6/3}}} = \sqrt[3]{3\sqrt[3]{3^4 \cdot 3^2}}$

$= \sqrt[3]{3\sqrt[3]{3^6}} = \sqrt[3]{3 \cdot 3^{6/3}} = \sqrt[3]{3 \cdot 3^2}$

$= \sqrt[3]{3^3} = 3^{3/3} = 3$

(ou $\sqrt[3]{\sqrt[3]{3^4\sqrt[3]{3^6}}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{3^3 \cdot 3^4\sqrt[3]{3^6}}}$

$= \sqrt[9]{\sqrt[3]{3^{21} \cdot 3^6}} = \sqrt[27]{3^{27}} = 3$)

j) $\sqrt[3]{2\sqrt[6]{\frac{2^{14}}{\sqrt[3]{2^6}}}} = \sqrt[3]{2\sqrt[6]{\frac{2^{14}}{2^2}}} = \sqrt[3]{2\sqrt[6]{2^{12}}}$

$= \sqrt[3]{2 \cdot 2^2} = \sqrt[3]{2^3} = 2^{3/3} = 2$

1.11 Simplifier les expressions suivantes :

a) $\sqrt[5]{a^3}\cdot(\sqrt[5]{a})^2$ b) $\sqrt[3]{a}\cdot(\sqrt[3]{a})^2$ c) $\sqrt[5]{a^3}\cdot(\sqrt[5]{a^2})^6$ d) $\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^4}$

e) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[5]{a^3}\cdot(\sqrt[10]{a})^4$ f) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a}$ g) $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$ h) $(\sqrt[10]{\sqrt[5]{a}})^{15}$

i) $\dfrac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{a}}$ j) $\dfrac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[4]{a^3}}$ k) $\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a^3}}$ l) $\dfrac{a^3}{\sqrt[3]{a^5}\cdot\sqrt[6]{a}}$

a) $\sqrt[5]{a^3}\cdot\underbrace{(\sqrt[5]{a})^2}_{} = \sqrt[5]{a^3}\cdot\sqrt[5]{a^2}$

$\left((\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p} \right)$

$= \sqrt[5]{a^3\cdot a^2} = \sqrt[5]{a^5} = a$

b) $\sqrt[3]{a}\cdot(\sqrt[3]{a})^2 = \sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a\cdot a^2} = a$

$\left(\text{ou } \sqrt[3]{a}\cdot(\sqrt[3]{a})^2 = a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = a^{3/3} = a \right)$

c) $\sqrt[5]{a^3}\cdot(\sqrt[5]{a^2})^6 = \sqrt[5]{a^3}\cdot\sqrt[5]{(a^2)^6} = \sqrt[5]{a^3}\cdot\sqrt[5]{a^{12}}$

$= \sqrt[5]{a^3\cdot a^{12}} = \sqrt[5]{a^{15}} = a^{15/5} = a^3$

d) $\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^4} = a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{3}{4}+\frac{4}{3}} = a^{\frac{9+16}{12}}$

$= a^{\frac{25}{12}} = \sqrt[12]{a^{25}}$

e) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[5]{a^3} \cdot \left(\sqrt[10]{a}\right)^4 = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{5}} \cdot \underbrace{a^{\frac{4}{10}}}_{= a^{2/5}}$

$= a^{\frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{2}{5}} = a^{\frac{5+6+4}{10}} = a^{\frac{15}{10}} = a^{\frac{3}{2}}$

$= \sqrt{a^3}$

f) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{6}}$

$= a^{\frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{6}} = a^{\frac{4+9+2}{12}} = a^{\cancel{\frac{15}{12}} \frac{5}{4}} = \sqrt[4]{a^5}$

g) $\sqrt{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[6]{a}$

h) $\left(\sqrt[10]{\sqrt[5]{a}}\right)^{15} = \left(\sqrt[50]{a}\right)^{15}$

$= \sqrt[50]{a^{15}} = a^{\frac{15}{50}} = a^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{a^3}$

i) $\dfrac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{a}} = \dfrac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right)} = a^{\frac{8-3}{6}} = a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$

j) $\dfrac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[4]{a^3}} = \dfrac{a^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{3}{4}}} = a^{\left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}\right)} = a^{\frac{10-9}{12}}$

$= a^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{a}$

k) $$\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a^3}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{a^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{a^{\frac{3+2}{6}}}{a^{\frac{3}{4}}}$$

$$= \frac{a^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{3}{4}}} = a^{\frac{5}{6}}\cdot a^{-\frac{3}{4}} = a^{\left(\frac{5}{6}-\frac{3}{4}\right)} = a^{\frac{10-9}{12}}$$

$$= a^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{a}$$

$$\left(\text{ou } \frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a^3}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{3}{4}}} = a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[12]{a}\right)$$

l) $$\frac{a^3}{\sqrt[3]{a^5}\cdot\sqrt[6]{a}} = \frac{a^3}{a^{\frac{5}{3}}\cdot a^{\frac{1}{6}}} = a^3\cdot a^{-\frac{5}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{6}}$$

$$= a^{\left(3-\frac{5}{3}-\frac{1}{6}\right)} = a^{\left(\frac{18-10-1}{6}\right)} = a^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{a^7}$$

1.12 Rendre rationnel les dénominateurs et simplifier les expressions :

a) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ c) $\frac{2}{\sqrt{8}}$ d) $\frac{12}{\sqrt{24}}$ e) $\frac{2}{\sqrt[4]{5}}$ f) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$

"Rendre rationnel le dénominateur d'une fraction, c'est supprimer la racine du dénominateur de cette fraction"

a) $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2\cdot\sqrt{8}}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}} = \frac{2\cdot\sqrt{4\cdot 2}}{8} = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{12}{\sqrt{24}} = \frac{12}{\sqrt{4\cdot 6}} = \frac{12}{2\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\cancel{12}\sqrt{6}}{\cancel{2\cdot 6}} = \sqrt{6}$

e) $\frac{2}{\sqrt[4]{5}} = \frac{2\cdot\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{5}}{\underbrace{\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{5}}_{=5}} = \frac{2\left(\sqrt[4]{5}\right)^3}{5}$

$= \frac{2\sqrt[4]{5^3}}{5} = \frac{2\sqrt[4]{125}}{5}$

f) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}} = \frac{2\cdot\sqrt[3]{2^2}}{2} = \sqrt[3]{4}$

1.13 Simplifier les expressions suivantes et rendre rationnel le dénominateur si nécessaire :

a) $\sqrt{9x^4y^6}$ b) $\sqrt{16x^8y}$ c) $\sqrt[3]{8x^6y^2}$ d) $\sqrt[4]{81x^8y^4}$

e) $\sqrt{\frac{16x^6}{3}}$ f) $\sqrt{\frac{3x}{2y^3}}$ g) $\sqrt{\frac{50x^3}{3}} \cdot \sqrt{\frac{12}{x^4}}$ h) $\sqrt{\frac{1}{3x^3y}}$

a) $\sqrt{9x^4y^6} = \underline{3x^2y^3}$

b) $\sqrt{16x^8y} = \underline{4x^4\sqrt{y}}$

c) $\sqrt[3]{8x^6y^2} = \sqrt[3]{2^3x^6y^2} = \underline{2x^2\sqrt[3]{y^2}}$

d) $\sqrt[4]{81x^8y^4} = \sqrt[4]{3^4x^8y^4} = \underline{3x^2y}$

e) $\sqrt{\frac{16x^6}{3}} = \frac{4x^3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \underline{\frac{4\sqrt{3}\,x^3}{3}}$

f) $\sqrt{\frac{3x}{2y^3}} = \frac{\sqrt{3x} \cdot \sqrt{2y^3}}{\sqrt{2y^3} \cdot \sqrt{2y^3}} = \frac{\sqrt{6xy^3}}{2y^3} = \frac{\sqrt{6x \cdot y^2 \cdot y}}{2y^3} = \frac{y\sqrt{6xy}}{2y^3} = \underline{\frac{\sqrt{6xy}}{2y^2}}$

g) $\sqrt{\frac{50x^3}{3}} \cdot \sqrt{\frac{12}{x^4}} = \sqrt{\frac{50 \cdot 12\, x^3}{3\,x^4}} = \sqrt{\frac{200}{x}} = 10\sqrt{\frac{2}{x}}$

$= \frac{10\sqrt{2} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \underline{\frac{10\sqrt{2x}}{x}}$

h) $\sqrt{\frac{1}{3x^3y}} = \frac{1}{\sqrt{3x^3y}} = \frac{\sqrt{3x^3y}}{3x^3y} = \frac{\sqrt{3x^2 \cdot xy}}{3x^3y} = \frac{\cancel{x}\sqrt{3xy}}{3\cancel{x}^3y}$

$= \underline{\frac{\sqrt{3xy}}{3x^2y}}$

1.14 Écrire à l'aide d'exposants rationnels :

a) $\sqrt[3]{5^2}$ b) $\sqrt[10]{7}$ c) $-\sqrt[8]{7^2}$ d) $\sqrt{2}$ e) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ f) $\dfrac{8}{\sqrt[7]{4^3}}$

g) $\sqrt[7]{3^7}$ h) $\sqrt[5]{x^3}$ i) $\sqrt[3]{x^5}$ j) $\sqrt{x^2+y^2}$ k) $\sqrt{2x}$ l) $\sqrt[3]{x^3-y^3}$

a) $\sqrt[3]{5^2} = a^{\frac{2}{3}}$

c) $-\sqrt[8]{7^2} = -7^{\frac{2}{8}} = -7^{\frac{1}{4}}$

d) $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^{-\frac{1}{2}}$

f) $\dfrac{8}{\sqrt[7]{4^3}} = \dfrac{2^3}{\sqrt[7]{(2^2)^3}} = \dfrac{2^3}{\sqrt[7]{2^6}} = \dfrac{2^3}{2^{6/7}}$

$= 2^3 \cdot 2^{-\frac{6}{7}} = 2^{3-\frac{6}{7}} = 2^{\frac{21-6}{7}} = 2^{\frac{15}{7}}$

g) $\sqrt[7]{3^7} = 3^{\frac{7}{7}} = 3$

h) $\sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}}$

i) $\sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}}$

j) $\sqrt{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$

k) $\sqrt{2x} = (2x)^{\frac{1}{2}}$

l) $\sqrt[3]{x^3 - y^3} = (x^3 - y^3)^{\frac{1}{3}}$

1.15 Écrire à l'aide de racines et d'exposants entiers positifs :

a) $7^{\frac{3}{2}}$ b) $3^{\frac{2}{5}}$ c) $-11^{0,25}$ d) $8^{-\frac{7}{5}}$ e) $27^{-\frac{1}{3}}$ f) $(-3)^{0,5}$

g) $x^{\frac{3}{4}}$ h) $x^{\frac{1}{2}}$ i) $3x^{\frac{2}{3}}$ j) $(3x)^{\frac{2}{3}}$ k) $(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$ l) $4+x^{\frac{2}{3}}$

a) $7^{\frac{3}{2}} = \sqrt{7^3}$

b) $3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}$

c) $-11^{0,25} = -11^{\frac{1}{4}} = -\sqrt[4]{11}$

d) $8^{-\frac{7}{5}} = \dfrac{1}{8^{\frac{7}{5}}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{8^7}}$

e) $27^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{27^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{27}}$

f) $(-3)^{0,5} = (-3)^{\frac{1}{2}} = \cancel{\sqrt{-3}}$ impossible !

g) $x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$

h) $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

i) $3x^{\frac{2}{3}} = 3\sqrt[3]{x^2}$

j) $(3x)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(3x)^2} = \sqrt[3]{9x^2}$

k) $(x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2 - y^2}$

l) $4 + x^{\frac{2}{3}} = 4 + \sqrt[3]{x^2}$

1.16 Calculer sans l'aide de la machine :

a) $\sqrt[4]{16^3}$ b) $1^{\frac{3}{5}}$ c) $0^{\frac{5}{7}}$ d) $9^{-\frac{1}{2}}$ e) $4 \cdot 25^{\frac{3}{2}}$

f) $(4 \cdot 25)^{\frac{3}{2}}$ g) $(-32)^{\frac{1}{5}}$ h) $(32)^{-\frac{1}{5}}$ i) $8^{\frac{2}{3}}$ j) $\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{3}{2}}$

k) $\left(\frac{16}{625}\right)^{-\frac{1}{4}}$ l) $(5 + 16^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$ m) $19 - 27^{\frac{1}{3}}$ n) $(19 - 27)^{\frac{1}{3}}$

a) $\sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{(2^4)^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^{\frac{12}{4}} = 2^3 = 8$

b) $1^{\frac{3}{5}} = 1$

c) $0^{\frac{5}{7}} = 0$

d) $9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

e) $4 \cdot 25^{\frac{3}{2}} = 4 \cdot (5^2)^{\frac{3}{2}} = 4 \cdot 5^3 = 4 \cdot 125 = 500$

f) $(4 \cdot 25)^{\frac{3}{2}} = (2^2 \cdot 5^2)^{\frac{3}{2}} = ((2 \cdot 5)^2)^{\frac{3}{2}}$

$= (10^2)^{\frac{3}{2}} = 10^{2 \cdot \frac{3}{2}} = 10^3 = 1000$

g) $(-32)^{\frac{1}{5}} = ((-2)^5)^{\frac{1}{5}} = (-2)^{5 \cdot \frac{1}{5}} = -2$

h) $(32)^{-\frac{1}{5}} = (2^5)^{-\frac{1}{5}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

i) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{(2^3)^2} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = \underline{4}$

j) $\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{(25)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{25^3}} = \frac{1}{\sqrt{5^6}} = \frac{1}{5^{\frac{6}{2}}} = \frac{1}{\underline{125}}$

k) $\left(\frac{16}{625}\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{625}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{\sqrt[4]{(5^2)^2}}{\sqrt[4]{2^4}} = \frac{5}{\underline{2}}$

l) $\left(5 + 16^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(5 + \sqrt{16}\right)^{\frac{1}{2}} = (5+4)^{\frac{1}{2}}$
$= 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = \underline{3}$

m) $19 - 27^{\frac{1}{3}} = 19 - \sqrt[3]{27} = 19 - \sqrt[3]{3^3} = 19 - 3 = \underline{16}$

n) $(19-27)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = \underline{-2}$

1.17 Calculer :

a) $8^{\frac{2}{3}} + 16^{\frac{1}{2}} + 27^{\frac{2}{3}} + 81^{\frac{1}{4}} - 125^{\frac{1}{3}} - 1'000^{\frac{2}{3}}$

b) $(3 \cdot 32^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot 108^{\frac{1}{3}} - 256 \cdot 2^{\frac{2}{3}}) \cdot 2^{\frac{1}{3}}$

c) $(3 \cdot 2^{0,25} + 2 \cdot 32^{0,25} - 8^{0,75}) \cdot 8^{0,25}$

d) $\dfrac{16^{\frac{1}{3}} - 4 \cdot 128^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot 250^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}$

a) $8^{\frac{2}{3}} + 16^{\frac{1}{2}} + 27^{\frac{2}{3}} + 81^{\frac{1}{4}} - 125^{\frac{1}{3}} - 1000^{\frac{2}{3}}$

$= (2^3)^{\frac{2}{3}} + (2^4)^{\frac{1}{2}} + (3^3)^{\frac{2}{3}} + (3^4)^{\frac{1}{4}} - (5^3)^{\frac{1}{3}} - (10^3)^{\frac{2}{3}}$

$= 2^2 + 2^2 + 3^2 + 3 - 5 - 10^2 = 4 + 4 + 9 + 3 - 5 - 100$

$= -85$

b) $(3 \cdot 32^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot 108^{\frac{1}{3}} - 256 \cdot 2^{\frac{2}{3}}) \cdot 2^{\frac{1}{3}}$

$= \left(3 \cdot (2^5)^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot (4 \cdot 3^3)^{\frac{1}{3}} - 2^8 \cdot 2^{\frac{2}{3}}\right) \cdot 2^{\frac{1}{3}}$

$= \left(3 \cdot 2^{\frac{5}{3}} + 3 \cdot (2^2)^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{3 \cdot \frac{1}{3}} - 2^{8 + \frac{2}{3}}\right) \cdot 2^{\frac{1}{3}}$

$= \left(3 \cdot 2^{\frac{5}{3}} + 3 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3 - 2^{\frac{26}{3}}\right) \cdot 2^{\frac{1}{3}}$

$= \left(3 \cdot 2^{\frac{5}{3}} + 9 \cdot 2^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{26}{3}}\right) \cdot 2^{\frac{1}{3}}$

$= 3 \cdot 2^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} + 9 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{26}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$

$$= 3 \cdot 2^{\frac{6}{3}} + 9 \cdot 2^{\frac{3}{3}} - 2^{\frac{27}{3}} = 3 \cdot 2^{2} + 9 \cdot 2 - 2^{9}$$

$$= 3 \cdot 4 + 18 - 512 = 12 + 18 - 512 = -482$$

c) $$\left(3 \cdot 2^{0{,}25} + 2 \cdot 32^{0{,}25} - 8^{0{,}75}\right) \cdot 8^{0{,}25}$$

$$= \left(3 \cdot 2^{\frac{1}{4}} + 2 \cdot 32^{\frac{1}{4}} - 8^{\frac{3}{4}}\right) \cdot 8^{\frac{1}{4}}$$

$$= \left(3 \cdot 2^{\frac{1}{4}} + 2 \cdot \left(2^{5}\right)^{\frac{1}{4}} - \left(2^{3}\right)^{\frac{3}{4}}\right) \cdot \left(2^{3}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \left(3 \cdot 2^{\frac{1}{4}} + 2 \cdot 2^{\frac{5}{4}} - 2^{\frac{9}{4}}\right) \cdot 2^{\frac{3}{4}}$$

$$= 3 \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{4}} + 2 \cdot 2^{\frac{5}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{4}} - 2^{\frac{9}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{4}}$$

$$= 3 \cdot 2^{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} + 2^{1 + \frac{5}{4} + \frac{3}{4}} - 2^{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}}$$

$$= 3 \cdot 2 + 2^{1+2} - 2^{3} = 6 + 8 - 8 = 6$$

d) $$\frac{16^{\frac{1}{3}} - 4 \cdot 128^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot 250^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{\left(2^4\right)^{\frac{1}{3}} - 2^2 \cdot \left(2^7\right)^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot \left(2 \cdot 5^3\right)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{2^{\frac{4}{3}} - 2^2 \cdot 2^{\frac{7}{3}} + 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{3 \cdot \frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \left(2^{\frac{4}{3}} - 2^2 \cdot 2^{\frac{7}{3}} + 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 5\right) \cdot 2^{-\frac{1}{3}}$$

$$= 2^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}} - 2^2 \cdot 2^{\frac{7}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}} + 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}} \cdot 5$$

$$= 2^{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}} - 2^{2 + \frac{7}{3} - \frac{1}{3}} + 3 \cdot 2^{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}} \cdot 5$$

$$= 2^{\frac{3}{3}} - 2^{2 + \frac{6}{3}} + 3 \cdot 2^0 \cdot 5$$

$$= 2^1 - 2^4 + 3 \cdot 5$$

$$= 2 - 16 + 15 = \underline{1}$$

1.18 Remplacer les ... par $=$ ou $\neq$. Justifier votre réponse.

a) $(x^p)^2 \ldots x^{(p^2)}$ b) $a^p \cdot b^p \ldots (ab)^p$ c) $\sqrt[n]{\frac{1}{x}} \ldots \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$ d) $(a+b)^{-1} \ldots -a-b$

e) $(a^2+1)^{\frac{1}{2}} \ldots a+1$ f) $x^{\frac{1}{k}} \ldots \frac{1}{x^k}$ g) $\sqrt[x]{3} \ldots x^{\frac{1}{3}}$ h) $3x^2 \cdot (2x)^2 \ldots (6x)^4$

i) $(a+b)^2 \ldots a^2+b^2$ j) $(25x^2)\cdot(20x)^2 \ldots (10x)^4$

a) $(x^p)^2 \neq x^{(p^2)}$ car $(x^p)^2 = x^{2p}$ et $x^{(p^2)} = x^{p^2}$

b) $a^p \cdot b^p = (ab)^p$ car $a^p \cdot b^p = (ab)^p$

c) $\sqrt[n]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$ car $\sqrt[n]{\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt[n]{x}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$

d) $(a+b)^{-1} \neq -a-b$ car $(a+b)^{-1} = \frac{1}{a+b} \neq a-b$

e) $(a^2+1)^{\frac{1}{2}} \neq a+1$ car $(a^2+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^2+1} \neq a+1$

f) $x^{\frac{1}{k}} \neq \frac{1}{x^k}$ car $x^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{x} \neq \frac{1}{x^k} = x^{-k}$

g) $\sqrt[x]{3} \neq x^{\frac{1}{3}}$ car $\sqrt[x]{3} = 3^{\frac{1}{x}}$ et $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$

h) $3x^2 \cdot (2x)^2 \neq (6x)^4$ car $3x^2 \cdot (2x)^2 = 3x^2 \cdot 4x^2 = 12x^4$
et $(6x)^4 = 1256x^4$

i) $(a+b)^2 \neq a^2+b^2$ car $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \neq a^2+b^2$

j) $(25x^2)\cdot(20x)^2 = (10x)^4$ car $(25x^2)\cdot(20x)^2 = (10x)^4$

1.19 Résoudre les équations suivantes :

a) $x^6 = 50$ b) $9x^5 = 72$ c) $8x^4 - 100 = 0$

d) $\dfrac{1}{x^3} = 20$ e) $x^8 - 7x^6 = 0$ f) $x^4 + 16 = 0$

a) $x^6 = 50 \Rightarrow x_1 = -\sqrt[6]{50}$; $x_2 = \sqrt[6]{50} \Rightarrow S = \{\sim -1,92 ; \sim 1,92\}$

b) $9x^5 = 72 \Rightarrow x^5 = \frac{72}{9} = 8 \Rightarrow x = \sqrt[5]{8} \Rightarrow S = \{\sim 1,52\}$

c) $8x^4 - 100 = 0 \Rightarrow x^4 = \frac{100}{8} = \frac{25}{2}$

$\Rightarrow x_1 = -\sqrt[4]{\frac{25}{2}}$; $x_2 = \sqrt[4]{\frac{25}{2}} \Rightarrow S = \{\sim -1,88 ; \sim 1,88\}$

d) $\frac{1}{x^3} = 20 \Rightarrow 20x^3 = 1 \Rightarrow x^3 = \frac{1}{20}$

$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{20}} = \frac{1}{\sqrt[3]{20}} \Rightarrow S = \{\sim 0,37\}$

e) $x^8 - 7x^6 = 0$

$\Rightarrow x^6(x^2 - 7) = 0$

$\Rightarrow x = 0$

ou $x^2 - 7 = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{7}$, $x = \sqrt{7}$

$\Rightarrow S = \{-\sqrt{7} ; 0 ; \sqrt{7}\}$

f) $x^4 + 16 = 0$

$\Rightarrow x^4 = -16 < 0 \Rightarrow$ impossible $\Rightarrow S = \emptyset$

1.20 Le volume d'une boule est de 696,9 dm^3 . Quel est son rayon ?

V boule : $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ où r : rayon de la boule

$\Rightarrow \quad 696{,}9 = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \Rightarrow \quad r^3 = \frac{696{,}9 \cdot 3}{4\pi}$

$\Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{696{,}9 \cdot 3}{4\pi}} \cong 5{,}5$

$\Rightarrow$ Le rayon de la boule est égal à $\approx 5{,}5$ dm

1.21 *Visibilité.*

Par un jour clair, la distance d (en km) de visibilité depuis le sommet d'un grand bâtiment de hauteur h (en m) peut être donnée approximativement par $d = 3,5\sqrt{h}$.

a) Donner la distance de visibilité approximative à partir du sommet de la Sears Tower de Chicago, haute de 436 m.

b) Quelle est la hauteur d'une tour au sommet de laquelle on a une visibilité de 50 km ?

$$d = 3,5\sqrt{h}$$

a) $h = 436$ m

$\rightarrow \quad d = 3,5\sqrt{436} \cong 73$ km

b) $h = ?$ si $d = 50$ km

$\rightarrow \quad 50 = 3,5\sqrt{h}$

$\rightarrow \quad \dfrac{50}{3,5} = \sqrt{h} \quad \Big| \, {}^{\wedge 2}$

$\rightarrow \quad h = \left(\dfrac{50}{3,5}\right)^2 \cong 204$ m

1.22 *Longueur d'un flétan.*

Le rapport entre la longueur L (en mètres) et la masse W (en kilogrammes) d'un flétan du Pacifique peut être donné approximativement par la formule $L = 0,46\sqrt[3]{W}$.

a) Le plus grand spécimen connu pèse 230 kilos. Calculer sa longueur.

b) Quelle est la masse d'un flétan de 1,5 mètres de longueur.

$L = 0,46\sqrt[3]{W}$

a) $W = 230$ kg $\rightarrow L = ?$

$\rightarrow L = 0,46\sqrt[3]{230} \simeq \underline{2,82 \text{ m}}$

b) $L = 1,5$ m $\rightarrow W = ?$

$\rightarrow 1,5 = 0,46\sqrt[3]{W}$

$\rightarrow \dfrac{1,5}{0,46} = \sqrt[3]{W} \rightarrow W = \left(\dfrac{1,5}{0,46}\right)^3$

$\rightarrow W \simeq \underline{34,7 \text{ kg}}$

1.23 *Masse d'une baleine.*
Le rapport entre la longueur L (en mètres) et la masse W (en tonnes) d'une baleine (rorqual boréal) peut être évalué par $W = 0,03 \cdot L^{2,43}$.

a) Calculer la masse d'une baleine de 7,5 m de long.

b) Calculer la longueur d'une baleine de 3 tonnes.

$$W = 0,03 \cdot L^{2,43}$$

a) $L = 7,5\,m \rightarrow W = ?$

$\rightarrow W = 0,03 \cdot (7,5)^{2,43}$

$\rightarrow W \cong 4$ tonnes

b) $L = ?$ si $W = 3$ tonnes

$W = 0,03 \cdot L^{2,43} \Rightarrow \dfrac{3}{0,03} = L^{2,43}$

$\rightarrow L = \sqrt[2,43]{\dfrac{3}{0,03}}$

$\rightarrow L \cong 6,65\,m$