Probabilités 3C

Les probabilités sont des grandeurs servant à évaluer les chances qu'un phénomène se produise.

1 Calculs de probabilités par dénombrement

Exemple d'introduction

On lance un dé équilibré.

Quelle est la probabilité d'obtenir 6 ?

1 chance sur 6 $\Rightarrow \frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6} \cong 16{,}67\,\%$

Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

2, 4 ou 6 $\Rightarrow$ 3 chances sur 6 $\Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$

On observe que spontanément, on a utilisé la formule suivante :

$$\text{Probabilité} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

On remarque aussi qu'une probabilité peut se donner de trois manières différentes :

— fraction (qu'on réduira si nécessaire)

— code à virgule

— pourcentage (souvent arrondi à 2 décimales)

Définitions

Expérience aléatoire

Une expérience est aléatoire si
- le résultat ne peut pas être prédit avec certitude
- on sait à l'avance quels sont les résultats possibles

Chaque résultat d'une expérience aléatoire est aussi appelé réalisation ou issue.

Univers

L'univers d'une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes les issues possibles. On le note U.

Evénement

Un événement est un sous-ensemble de U. C'est donc un ensemble d'issues possibles, mais pas forcément de toutes les issues possibles.

Exemple

Expérience aléatoire : lancer d'un dé équilibré.

$U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Evénements possibles : A ="obtenir 6" = $\{6\}$

B ="obtenir un nombre pair" = $\{2; 4; 6\}$

C ="obtenir un nombre plus grand que 4" = $\{5; 6\}$

D ="obtenir un nombre positif" = $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\} = U$

E ="obtenir un nombre négatif" = $\{\} = \emptyset$

etc...

Issues équiprobables

Les issues d'une expérience aléatoire sont équiprobables si elles ont la même chance (ou probabilité) de se produire.

Exemples

- Lancer d'un dé équilibré : $U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ toutes ces issues sont équiprobables
- Lancer d'une pièce de monnaie équilibrée : $U = \{\text{Pile} ; \text{Face}\}$ équiprobables
- Note au prochain test de maths : $U = \{1; 1{,}5; 2; \dots; 5{,}5; 6\}$ PAS équiprobables !

Calcul de probabilités lorsque toutes les issues sont équiprobables

Si toutes les issues sont équiprobables (donc tous les éléments de l'univers ont la même probabilité de se produire), on peut calculer la probabilité d'un événement E avec la formule suivante :

$$P(E) = \frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}} = \frac{\text{nombre d'éléments dans } E}{\text{nombre d'éléments dans } U} = \frac{|E|}{|U|}$$

Pour dénombrer les cas favorables et les cas possibles lors d'expériences aléatoires plus complexes, on utilise les outils d'analyse combinatoire.

Exemple 1

On lance 3 fois un dé équilibré et on écrit le résultat sous la forme d'un nombre à 3 chiffres.

Calculer la probabilité des évènements suivants :

A : " obtenir un nombre inférieur à 200 "
B : " obtenir un multiple de 2 "

Cas possibles : $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

Cas fav. pour A : $1 \cdot 6 \cdot 6 = 36 \Rightarrow P(A) = \frac{36}{216} = \frac{1}{36} = 0{,}02\bar{7} \cong 2{,}78\%$

Cas fav. pour B : $6 \cdot 6 \cdot 3 = 108 \Rightarrow P(B) = \frac{108}{216} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$

Exemple 2

On tire 2 cartes d'un jeu de 52 cartes.
Quelle est la probabilité d'obtenir 2 coeurs ?

Cas possibles : $C_2^{52} = 1326$

Cas fav : $C_2^{13} = 78 \Rightarrow P(2\text{ coeurs}) = \frac{78}{1326} \cong 5{,}88\%$

Quelle est la probabilité d'obtenir 2 rois ?

Cas fav : $C_2^4 = 6$ Cas poss : inchangé $\Rightarrow$ 1326

$\Rightarrow P(2 \text{ rois}) = \frac{6}{1326} \cong 0{,}45\,\%$

Quelle est la probabilité d'obtenir l'as de pique et le 10 de trèfle ?

Cas fav : 1 $(C_1^1 \cdot C_1^1 = 1)$

$\Rightarrow P(\text{as de pique et 10 de trèfle}) = \frac{1}{1326} \cong 0{,}08\,\%$

Exemple 3

On tire 5 cartes d'un jeu de 36 cartes. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : " tirer les 4 as"
B : " tirer 5 cartes de la même couleur (= famille) "
C : " tirer au moins un as "

Cas poss : $C_5^{36} = 376'992$

$|A| = C_4^4 \cdot C_1^{32} = 32 \Rightarrow P(A) = \frac{32}{376'992} \cong 0{,}008\,\%$

$|B| = C_1^4 \cdot C_5^9 = 504 \Rightarrow P(B) = \frac{504}{376'992} \cong 0{,}13\,\%$

$|C| = \underbrace{376'992}_{\text{tout}} - \underbrace{C_5^{32}}_{\text{sauf aucun as}} = 175'616 \Rightarrow P(C) = \frac{175'616}{376'992} \cong 46{,}58\,\%$

On peut aussi faire $P(C) = 100\% - P(\text{aucun as}) = 100\% - \frac{C_5^{32}}{C_5^{36}} \cong 100\% - 53{,}42\%$
$= 46{,}58\,\%$

Propriétés des probabilités

N'importe quel événement E vérifie les deux propriétés suivantes :

1) $0 \leq P(E) \leq 1$ La proba se trouve toujours entre 0 et 1, donc entre 0% et 100%

2) $P(\bar{E}) = P(\text{"E ne se réalise pas"}) = 1 - P(E) = 100\% - P(E)$ complémentaire