Géométrie dans l'espace

Corrigé

Tracés de solides et calculs de longueurs, d'aires et de volumes

5.1 A l'aide de polydrons, construire un prisme droit dont la base est un triangle équilatéral et dont les faces perpendiculaires à la base sont des carrés.
Si vous ne disposez pas de polydrons, considérez qu'une arête mesure 7 cm et ignorez la question b).

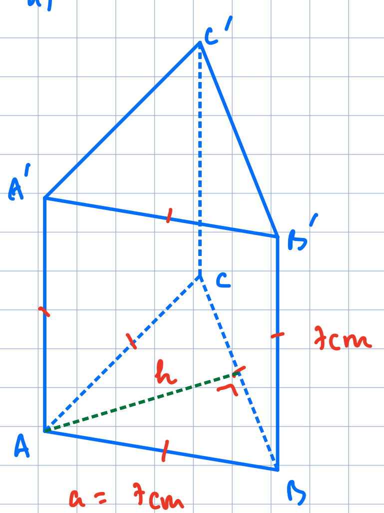
a) Esquisser ce solide.

b) Mesurer la longueur d'une arête de ce solide.

c) Calculer l'aire d'une face triangulaire et celle d'une face carrée. En déduire la surface totale de ce polyèdre.

d) Calculer son volume.

a)



* $A_\Delta = \frac{1}{2}\, h \cdot BC$

où h = hauteur du triangle équilatéral

$\Rightarrow \boxed{h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 7 = \frac{7\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{7\sqrt{3}}{2} \cdot 7 = \frac{49\sqrt{3}}{4} \cong 21,22\ cm^2$

* $A_\square = 7 \cdot 7 = 49\ cm^2$

$\Rightarrow A_{tot} = 2 \cdot A_\Delta + 3 \cdot A_\square = 2 \cdot \frac{49\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 49 = \frac{49\sqrt{3}}{2} + 147$

$\Rightarrow A_{tot} \cong 189,44\ cm^2$

d) $V = B \cdot hauteur = A_\Delta \cdot 7 = \frac{49\sqrt{3}}{4} \cdot 7 = \frac{343\sqrt{3}}{4} \cong 148,52\ cm^3$

5.2 A l'aide de polydrons, construire un prisme droit dont la base est un hexagone régulier et dont les faces perpendiculaires à la base sont des carrés.
Si vous ne disposez pas de polydrons, considérez qu'une arête mesure 7 cm et ignorez la question b).

a) Esquisser ce solide.

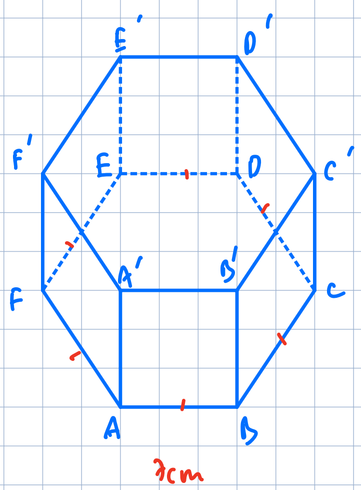
b) Mesurer la longueur d'une arête de ce solide.

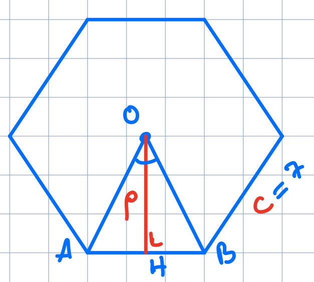
c) Calculer l'aire d'une face hexagonale et celle d'une face carrée. En déduire la surface totale de ce polyèdre.

d) Calculer son volume.

e) Quel est la relation entre l'aire de l'hexagone régulier et celle du triangle équilatéral de même côté ?

a)





$A = \frac{1}{2} n p c$

c) $A_{hexa} = ?$

Angle au centre de hexagone régulier

$\alpha = \frac{360°}{6} = 60°$

Δ AOB est équilatéral

$\Rightarrow OH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 7 = \frac{7\sqrt{3}}{2} = p$

$\Rightarrow A_{hexa} = \frac{1}{2} n p c = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{2} \cdot 7$

$= \frac{147 \cdot \sqrt{3}}{2} \simeq \underline{127{,}31 \text{ cm}^2}$

$A_{carré} = 7 \cdot 7 = \underline{49 \text{ cm}^2}$

$\Rightarrow A_{tot} = 2 A_{hexa} + 6 A_{carré} = 2 \cdot \frac{147\sqrt{3}}{2} + 6 \cdot 49$

$\simeq \underline{548{,}61 \text{ cm}^2}$

d) $V = B \cdot h = \dfrac{147 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot 7 = \dfrac{1029 \cdot \sqrt{3}}{2} \cong \underline{891,14 \text{ cm}^3}$

e) Un hexagone régulier peut être pavé à l'aide de 6 triangles équilatéraux dont la mesure du côté est la même que celle de l'hexagone.

L'aire de l'hexagone vaut donc 6 fois celle du triangle équilatéral de même côté.

5.3 A l'aide de polydrons, construire un prisme droit dont la base est un pentagone régulier et dont les faces perpendiculaires à la base sont des carrés.
Si vous ne disposez pas de polydrons, considérez qu'une arête mesure 7 cm et ignorez la question b).

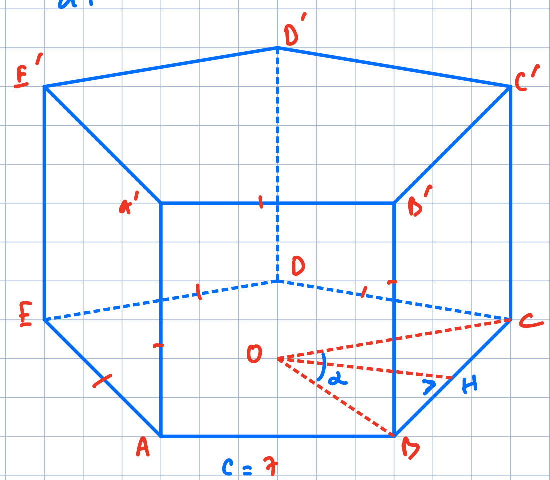
a) Esquisser ce solide.

b) Mesurer la longueur d'une arête de ce solide.

c) Calculer l'aire d'une face pentagonale et celle d'une face carrée. En déduire la surface totale de ce polyèdre.

d) Calculer son volume.

a)



Angle au centre du pentagone :

$$\alpha = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

Triangle OBC est isocèle en O

$$\Rightarrow \widehat{BOH} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

Triangle OBH est rectangle en H

$$\Rightarrow \tan(36^\circ) = \frac{HB}{OH} \Rightarrow OH = \rho = \frac{HB}{\tan(36^\circ)}$$

$$\Rightarrow OH = \rho = \frac{3,5}{\tan(36^\circ)} \cong 4,82 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow A_{pentagone} = \frac{1}{2} n c \rho = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4,82 \cong \underline{84,30 \text{ cm}^2}$$

$$A_{carré} = 7 \cdot 7 = \underline{49 \text{ cm}^2}$$

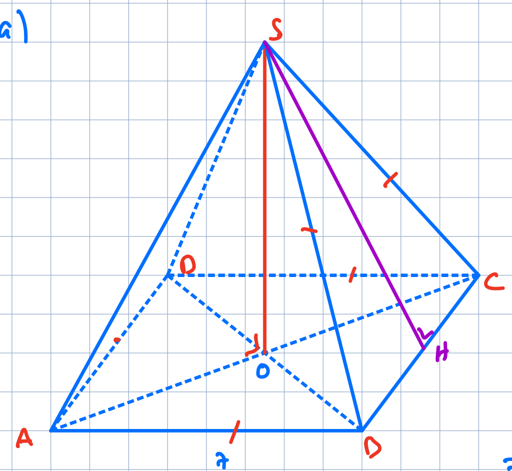
$$A_{tot} = 2 A_{pentagone} + 5 A_{carré} = 2 \cdot 84,30 + 5 \cdot 49 \cong 413,61 \text{ cm}^2$$

d) $$V = B \cdot h = A_{pentagone} \cdot h = 84,30 \cdot 7 \cong \underline{590,1 \text{ cm}^3}$$

5.4 A l'aide de polydrons, construire une pyramide dont la base est un carré et dont les faces sont des triangles équilatéraux.
Si vous ne disposez pas de polydrons, considérez qu'une arête mesure 7 cm et ignorez la question b).

a) Esquisser ce solide.
b) Mesurer la longueur d'une arête de ce solide.
c) Calculer la surface totale de ce polyèdre.
d) Calculer son volume.

a)



c)

$A_{carré} = 7\cdot 7 = 49\ cm^2$

Triangle BSC est équilatéral

$\Rightarrow SH = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 7 = \frac{7\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow A_{triangle} = \frac{SH\cdot BC}{2} = \frac{\frac{7\sqrt{3}}{2}\cdot 7}{2}$

$\Rightarrow A_{triangle} = \frac{49\sqrt{3}}{4}\ cm^2$

$\Rightarrow A_{tot} = A_{carré} + 4\cdot A_{triangle} = 49 + 4\cdot \frac{49\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow A_{tot} = 49 + 49\sqrt{3} \cong \underline{133,87\ cm^2}$

d) $V = \frac{1}{3}\cdot B\cdot h = \frac{1}{3} A_{carré}\cdot SO$

Reste à déterminer $SO = ?$

$\Rightarrow$ Triangle ADC est rectangle en D $\Rightarrow$ par Pythagore : $AC^2 = AD^2 + DC^2$

$\Rightarrow AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{49 + 49} = 7\sqrt{2}$

$\Rightarrow AO = \frac{1}{2} AC = \frac{7\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow$ Triangle SAO est rectangle en O $\Rightarrow SA^2 = AO^2 + SO^2$

$\Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{49 - \frac{49 \cdot 2}{4}} = \sqrt{49 - \frac{49}{2}}$

$\Rightarrow SO = \sqrt{\frac{49}{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3} A_{carré} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 49 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{2} \simeq \underline{80,85 \text{ cm}^3}$

* <u>Autre méthode</u> :

Angle au sommet $\widehat{BSD} = \frac{360°}{4} = 90°$

$\Rightarrow$ Triangle BSD est rectangle isocèle $\Rightarrow \widehat{OSD} = 45°$

$\cos(45°) = \frac{SO}{SB} \Rightarrow SO = SB \cdot \cos(45°) = 7 \cos(45°) = \frac{7 \cdot \sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot A_{carré} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 49 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{2} \simeq 80,85 \text{ cm}^3$

5.5 A l'aide de 6 polydrons carrés et de 8 polydrons triangulaires, construire le polyèdre fermé convexe dont la forme est la plus régulière possible. Ce solide s'appelle le cuboctaèdre.

Si vous ne disposez pas de polydrons, considérez qu'une arête mesure 7 cm et ignorez la question d).

$a = 7\,cm$

a) Observer que le cuboctaèdre peut s'inscrire dans un cube.

b) Dessiner un cube en perspective. Inscrire un cuboctaèdre dans ce cube.

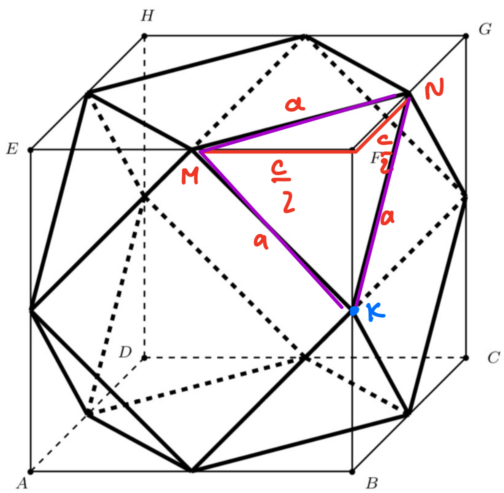
c) Exprimer l'arête de ce cube en fonction de celle du solide

d) Mesurer la longueur d'une arête de ce solide.

e) Calculer l'aire d'une face triangulaire et celle d'une face carrée. En déduire la surface totale de ce polyèdre.

f) Calculer son volume.

b)



c) poser a = longueur d'une arête du solide

c = Longueur d'une arête du cube

Triangle MFN est rectangle isocèle en F

Par Pythagore : $MN^2 = MF^2 + FN^2 \Rightarrow a^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{4}$

$\Rightarrow 4a^2 = c^2 + c^2 = 2c^2 \Rightarrow 2a^2 = c^2 \Rightarrow c = a\sqrt{2}$

e) $A_{triangle}$ = Aire d'une triangle équilatéral = $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 7^2$

↑ formule

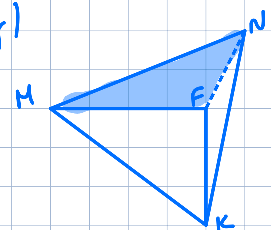
$$\Rightarrow A_{triangle} = \frac{49\sqrt{3}}{4} \cong 21,22 \text{ cm}^2$$

$$A_{carré} = 7 \cdot 7 = 49 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow A_{tot} = 8 \cdot A_{triangle} + 6 A_{carré} = 8 \cdot \frac{49\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot 49$$

$$A_{tot} = 2 \cdot 49\sqrt{3} + 6 \cdot 49 \cong \underline{463,74 \text{ cm}^2}$$

f)



$$V_{pyramide} = \frac{1}{3} A_{\Delta MFN} \cdot FK \quad , \quad FK = \frac{c}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

$$A_{\Delta MFN} = \frac{1}{2} \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} \quad \text{avec } c = a\sqrt{2} \Rightarrow c = 7\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A_{\Delta MFN} = \frac{1}{8} c^2 = \frac{1}{8} 49 \cdot 2 = \frac{49}{4} \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow V_{pyramide} = \frac{1}{3} \cdot \frac{49}{4} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{2} = \frac{343\sqrt{2}}{24}$$

$$\Rightarrow V_{cubotaèdre} = V_{cube} - 8 \cdot V_{pyramide} = (7\sqrt{2})^3 - 8 \cdot \frac{343\sqrt{2}}{24}$$

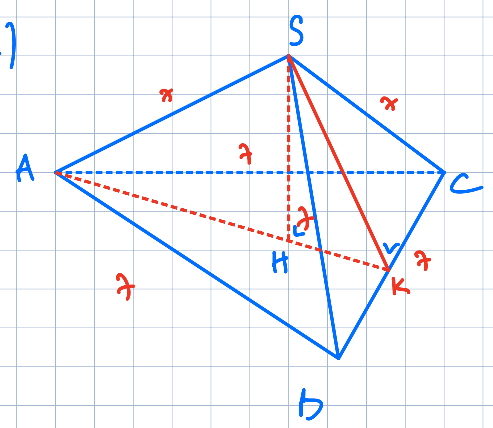
$$= 343 \cdot 2\sqrt{2} - \frac{2744\sqrt{2}}{24} = \frac{16464\sqrt{2} - 2744\sqrt{2}}{24}$$

$$= \frac{13720\sqrt{2}}{24} = \frac{1715\sqrt{2}}{3} \cong \underline{808,46 \text{ cm}^3}$$

5.6 Construire un tétraèdre avec des polydrons.
Si vous ne disposez pas de polydrons, considérez qu'une arête mesure 7 cm et ignorez la question b).

a) Esquisser ce solide.
b) Mesurer la longueur de l'arête du tétraèdre.
c) Calculer l'aire d'une face. En déduire la surface totale de ce polyèdre.
d) Calculer la hauteur de ce tétraèdre et en déduire son volume.

a)



c)

Une face = triangle équilatéral

$\Rightarrow A_{face} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 7^2$

$A_{face} = \frac{49\sqrt{3}}{4} \cong \underline{21,22 \text{ cm}^2}$

$\Rightarrow A_{tot} = 4 \cdot A_{face} = 4 \cdot \frac{49\sqrt{3}}{4} = 49\sqrt{3} \cong \underline{84,87 \text{ cm}^2}$

Dans le triangle équilatéral BSC $\Rightarrow$ SK est la hauteur $\Rightarrow SK = \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 7$

$\Rightarrow AK = SK = \frac{7\sqrt{3}}{2}$

et $HK = \frac{1}{3} AK = \frac{\frac{7\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{7\sqrt{3}}{6}$

$\Rightarrow$ Dans le triangle rectangle SHK $\Rightarrow$ Pythagore : $SK^2 = SH^2 + HK^2$

$\Rightarrow SH^2 =$ hauteur du tétraèdre $= SK^2 - HK^2$

$SH = \sqrt{\left(\frac{7\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{7\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{49 \cdot 3}{4} - \frac{49 \cdot 3}{36}} = \sqrt{\frac{1323 - 147}{36}}$

$$\Rightarrow \quad SH = \frac{1}{6}\sqrt{1176} = \frac{1}{6}\sqrt{196\cdot 6} = \frac{14}{6}\sqrt{6}$$

$$h = SH = \frac{7\sqrt{6}}{3} \cong \underline{5{,}72\ cm}$$

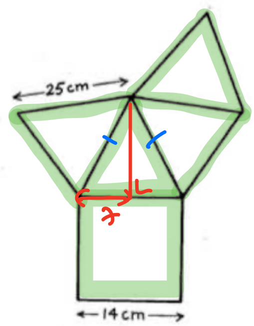
$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{3} B\cdot h = \frac{1}{3} A_{face} \cdot SH = \frac{1}{3}\,\frac{49\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{7\sqrt{6}}{3} \Rightarrow V \cong \underline{40{,}42\ cm^3}$$

5.7 Voici le croquis du développement d'une pyramide régulière à base carrée.

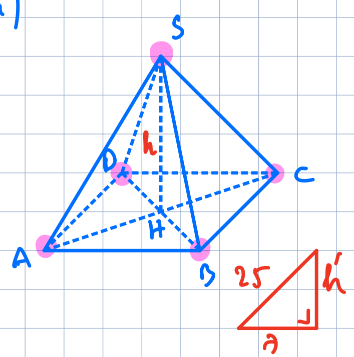
a) Esquisser cette pyramide.

b) Déterminer le nombre d'arêtes, de sommets et de faces de cette pyramide.

c) Calculer l'aire totale A et le volume V de cette pyramide.



a)



b) 8 arêtes, 5 sommets, 5 faces

c) $A_{carré} = 14\cdot 14 = \underline{196\ cm^2}$

$A_{triangle\ isocèle} = \frac{1}{2}\cdot 14\cdot h'$ où $h' = \sqrt{25^2-7^2} = 24$

$\Rightarrow A_{triangle\ isocèle} = \frac{1}{2}\cdot 14\cdot 24 = \underline{168\ cm^2}$

$\Rightarrow A_{tot} = 4\cdot A_{triangle} + A_{carré} = 4\cdot 168 + 196 = \underline{868\ cm^2}$

$\Rightarrow V_{pyramide} = \frac{1}{3}\cdot 196\cdot h$ où h : hauteur du pyramide

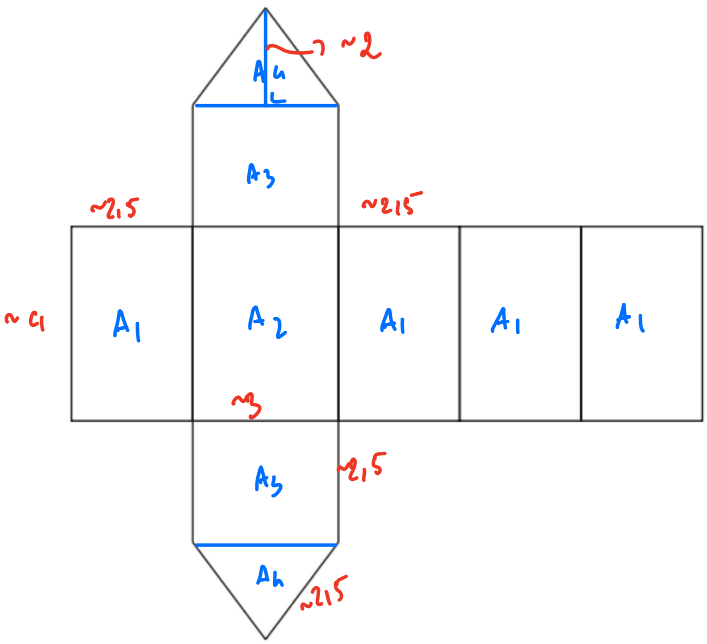
* triangle ABD est rectangle en A $\Rightarrow$ Pythagore : $BD = \sqrt{AD^2+AB^2} = \sqrt{14^2+14^2} = 14\sqrt{2}$

$\Rightarrow HB = \frac{BD}{2} \cong \frac{14\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2}$

Δ rectangle SHB $\Rightarrow$ Pythagore : $SH = h = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \sqrt{25^2-(7\sqrt{2})^2} \cong \underline{22{,}96}$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\cdot 196\cdot 22{,}96 \cong \underline{1499{,}82\ cm^3}$

5.8 Voici en vraie grandeur le développement d'un prisme :

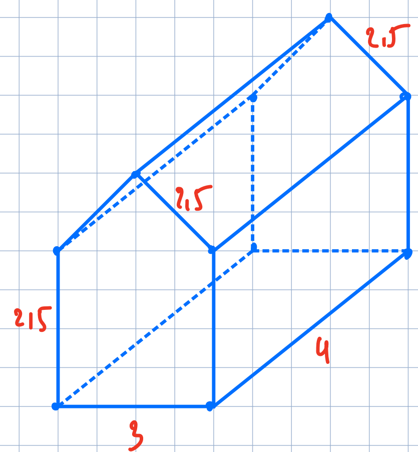


a) Esquisser ce prisme.

b) Déterminer le nombre d'arêtes, de sommets et de faces de ce prisme.

c) Calculer l'aire totale A et le volume V de ce prisme.

a)



b) 10 sommets

15 arêts

7 faces

c) $A_{tot} = 4A_1 + A_2 + 2A_3 + 2A_4$

où $A_1 = 2,5 \cdot 4 = 10\ cm^2$

$A_2 = 3 \cdot 4 = 12\ cm^2$

$A_3 = 2,5 \cdot 3 = 7,5\ cm^2$

$A_4 = \frac{1}{2} 3 \cdot 2 = 3\ cm^2$

$\Rightarrow A_{tot} = 4 \cdot 10 + 12 + 2 \cdot 7,5 + 2 \cdot 3 = \underline{73\ cm^2}$

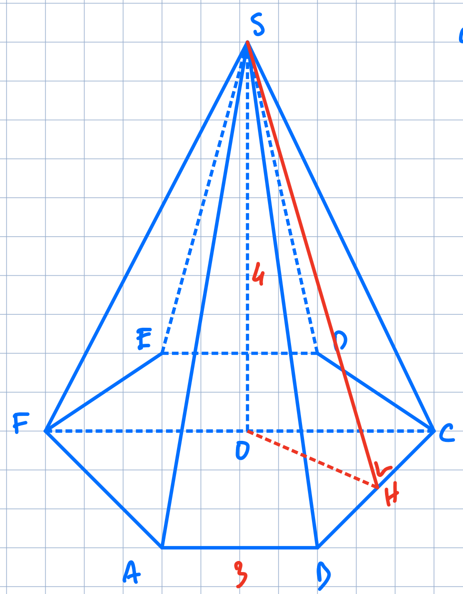
$V = A_{base} \cdot hauteur = (A_3 + A_4) \cdot 4 = (7,5 + 3) \cdot 4 = \underline{42\ cm^3}$

5.9 On considère la pyramide régulière dont la base est un hexagone régulier de côté 3 *cm* et dont la hauteur mesure 4 *cm*.

a) Déterminer le nombre d'arêtes, de sommets et de faces de cette pyramide.

b) Représenter le dévoloppement de cette pyramide en vraie grandeur.

c) Calculer l'aire totale A et le volume V de cette pyramide.



a) 12 arêtes, 7 sommets, 7 faces

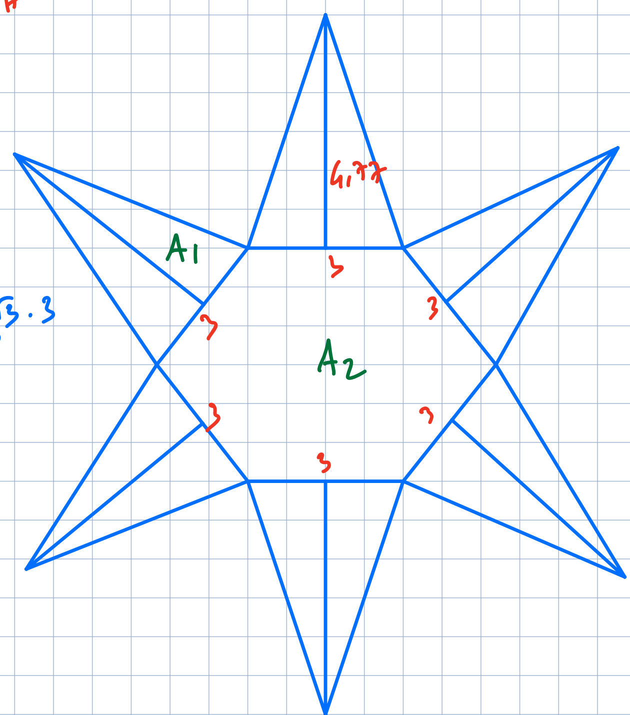
b) Δ OBC équilatéral

$\Rightarrow OH = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ cm

$\Rightarrow \Delta$ SOH rectangle en O

Pythagore : $SH = \sqrt{SO^2 + OH^2} = \sqrt{16 + \frac{27}{4}}$

$SH \cong 4{,}77$ cm



c) $A_{tot} = 6\,A_1 + A_2$

$= 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4{,}77 + \frac{1}{2} 6 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 3$

$\cong \underline{66{,}31 \text{ cm}^2}$

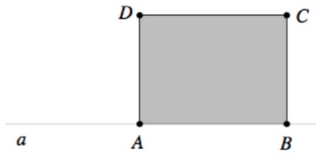
$V_{SABCDEF} = \frac{1}{3} A_2 \cdot 4$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{54\sqrt{3}}{2} \cdot 4$

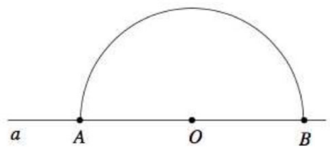
$\cong \underline{31{,}18 \text{ cm}^3}$

5.10

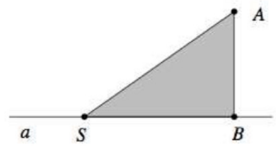
a) Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation du rectangle $ABCD$ autour de l'axe a, où $AB = 5$ cm et $AD = 4$ cm.



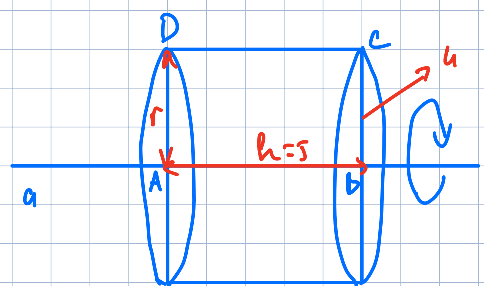
b) Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation du demi-disque de centre O et de diamètre AB autour de l'axe a, où $AB = 10$ cm.



c) Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation du triangle SAB autour de l'axe a, où $AB \perp SB$, $SB = 15$ cm et $AB = 10$ cm.



a)



rotation du rectangle ABCD autour de l'axe a

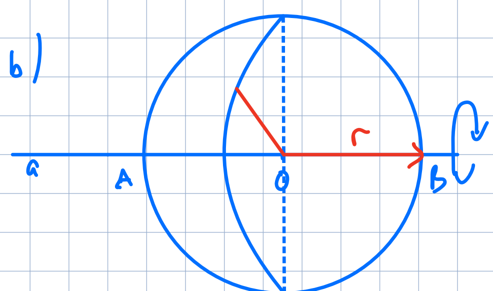
$\rightarrow$ cylindre de révolution

$V =$ Aire de la base $\cdot h = \pi r^2 \cdot h$

où $r = 4$ cm, $h = 5$ cm

$\Rightarrow V = \pi \cdot 4^2 \cdot 5 = 80\pi$ cm^3

b)



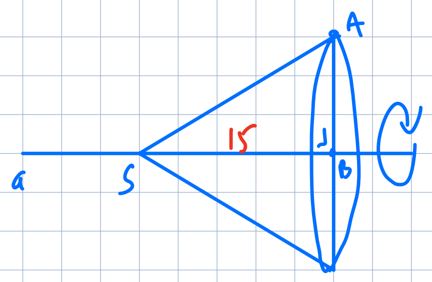
rotation du demi-disque $\rightarrow$ une boule

$\Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$

où $r = \frac{AB}{2} = 5$ cm

$\Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = \frac{500\pi}{3}$ cm^3

c)



Rotation du triangle rectangle SAB autour de l'axe a → cône de révolution

$V = \frac{1}{3}$ Aire de la base $\cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$

où $r = AB = 10\,cm$

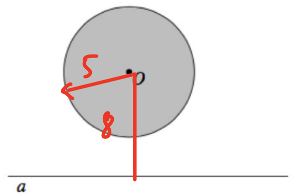
$h = SB = 15\,cm$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 15 = \underline{500\pi\ cm^3}$

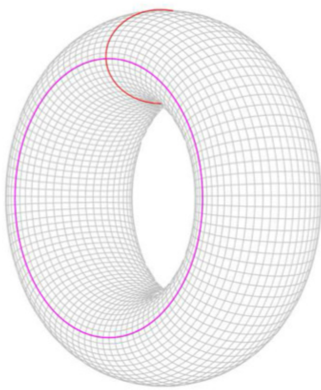
5.11

a) Représenter par un dessin en 3D le solide de révolution engendré par la rotation du disque de centre O autour de l'axe a.

b) Ce volume s'appelle un tore. Si le rayon du cercle est égal à $r = 5$ cm et si la distance du point O à la droite a est égale à $R = 8$ cm, calculer le volume du tore avec la formule $V = 2\pi^2 r^2 R$.



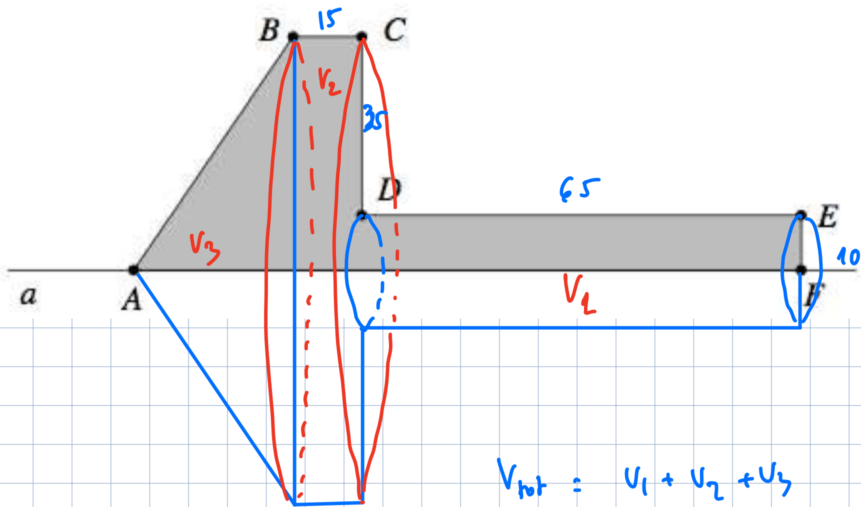
a)



$V = 2\pi^2 r^2 R$ où $r = 5\text{ cm}$, $R = 8\text{ cm}$

$\Rightarrow V = 2\pi^2 \cdot 5^2 \cdot 8 = \underline{400\pi^2}\text{ cm}^3$

5.12 Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation du polygone $ABCDEF$ autour de l'axe a, où $BC \perp CD$, $CD \perp DE$, $DE \perp EF$, $AF = 100$ cm, $BC = 15$ cm, $DE = 65$ cm, $CD = 35$ cm et $EF = 10$ cm.



$V_{tot} = V_1 + V_2 + V_3$

* V_1 : volume d'un cylindre de révolution

$V_1 = \pi r^2 h$ où $r = EF = 10$, h = hauteur $= DE = 65$

$\Rightarrow V_1 = \pi \cdot 10^2 \cdot 65 = \underline{6500\pi \text{ cm}^3}$

* V_2 : volume d'un cylindre de révolution

$V_2 = \pi r'^2 h'$ où r' = rayon $= CD + EF = 35 + 10 = 45$

$h' = BC = 15$

$\Rightarrow V_2 = \pi \cdot 45^2 \cdot 15 = \underline{30375\pi \text{ cm}^3}$

* V_3 : volume d'un cône de révolution

$V_3 = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot H$ où R = rayon $= r' = 45$, H : hauteur

$\Rightarrow H = AF - DE - BC = 100 - 65 - 15 = 20$

$\Rightarrow V_3 = \frac{1}{3}\pi \cdot 45^2 \cdot 20 = \underline{13500\pi \text{ cm}^3}$

$\Rightarrow V_{tot} = 6500\pi + 30375\pi + 13500\pi = \underline{50375\pi} \text{ cm}^3$

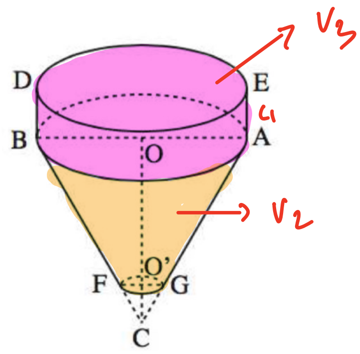
5.13

Un pluviomètre a la forme d'un cône de révolution dont on a coupé la pointe et surmonté d'un cylindre.

$AC = 25$ cm , $AG = 20$ cm , $AB = 14$ cm , $AE = 4$cm , O est le milieu de AB , O' est le milieu de FG.

a) Calculer la contenance totale en cm^3 sour la forme $k\pi$, puis donner sa valeur en dm^3 au centième près.

b) Peut-on verser dans ce pluviomètre 1 litre d'eau ?



$AB = ED = 14$ cm , $AE = BD = 4$ cm , $OA = OB = \frac{AB}{2} = 7$ cm

$GC = AC - AG = 25 - 20 = 5$ cm

a) $GC = \frac{1}{5} AC = 5$ cm $\Rightarrow FG = \frac{1}{5} AB = \frac{1}{5} \cdot 14 = \frac{14}{5}$ cm

$\Rightarrow O'G = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$ cm et $O'C = \frac{1}{5} OC$

$\Rightarrow$ V du cône sommet C et rayon $O'G$: $V_1 = \frac{1}{3} \pi O'G^2 \cdot O'C$

* calcul de $O'C$: ΔBOC rectangle en O $\Rightarrow$ Pythagore : $OC = \sqrt{BC^2 - OB^2}$

$\Rightarrow OC = \sqrt{25^2 - 7^2} = \sqrt{576} = 24$ cm

$\Rightarrow O'C = \frac{1}{5} \cdot 24 = \frac{24}{5}$ cm

$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{7}{5}\right)^2 \cdot \frac{24}{5} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{49}{25} \cdot \frac{24}{5} = \frac{1176\pi}{375} = \frac{392\pi}{125}$

* Volume du grand cône : $V = \frac{1}{3} \pi OA^2 \cdot OC = \frac{1}{3} \pi \cdot 7^2 \cdot 24 = 392\pi$

$\Rightarrow$ Volume du cône tronqué : $V_2 = V - V_1 = 392\pi - \dfrac{392\pi}{125}$

$\Rightarrow V_2 = \dfrac{48608}{125}\pi$

* Volume du cylindre de révolution :

$$V_3 = \pi \cdot OA^2 \cdot AE = \pi \cdot 7^2 \cdot 4 = 196\pi$$

$\Rightarrow$ La contenance totale : $V_{tot} = V_2 + V_3 = \dfrac{48608\pi}{125} + 196\pi$

$$V_{tot} = \frac{48608\pi + 24500\pi}{125} = \underline{\frac{73108}{125}\pi \text{ cm}^3}$$

On sait que $1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$

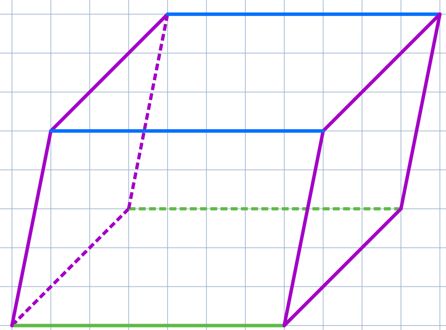
$\Rightarrow V_{tot} = \dfrac{73108\pi}{125 \cdot 1000} \simeq \underline{1,84 \text{ dm}^3}$

b) 1ℓ d'eau $= 1 \text{ dm}^3$

$\Rightarrow$ Ce pluviomètre peut contenir $\approx 1,84 \text{ dm}^3$ $\Rightarrow$ Oui, on peut verser 1ℓ d'eau dans ce pluviomètre.

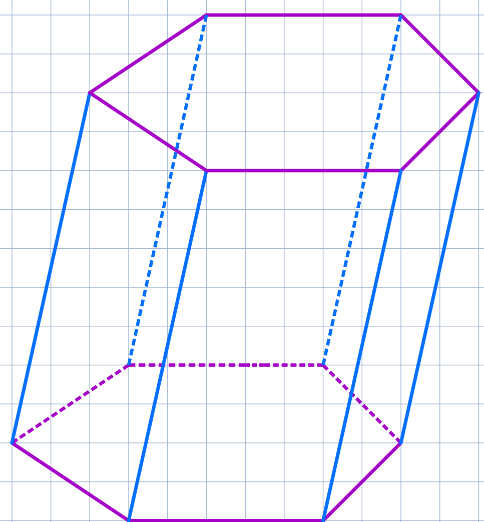
5.14 Quel est le nombre d'arêtes d'un parallélépipède et d'un prisme à base hexagonale ?

parallélépipède



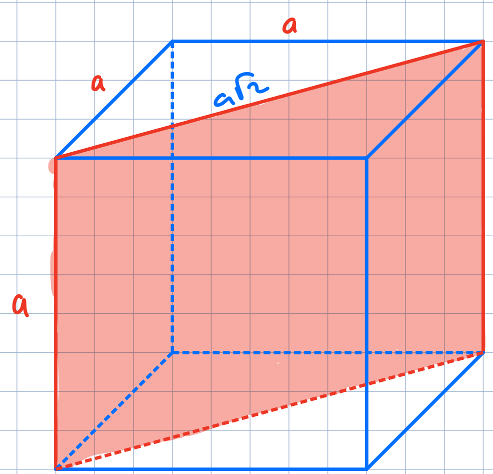
→ 12 arêtes

prisme à base hexagonale



→ 18 arêtes

5.15 Par deux arêtes opposées et parallèles d'un cube de côté a on fait passer un plan. Déterminer la nature du polygone de section et calculer son aire.



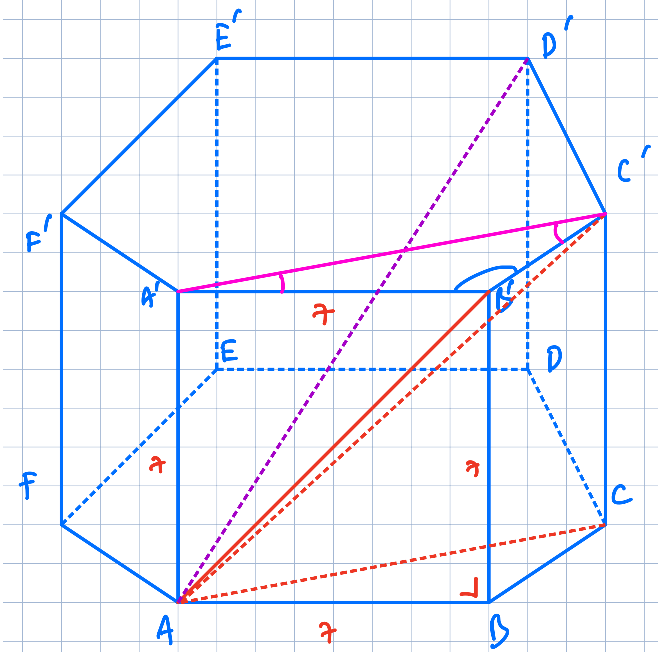
Le polygone de section est un rectangle de dimension : largeur $= a$

et longueur $= \sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2}$

(Pythagore)

$\Rightarrow$ Aire : $A = a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$

5.16 Un prisme droit $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ a pour base $ABCDEF$ un hexagone régulier de côté 7 cm. Ses faces latérales sont des carrés. Calculer la longueur exacte des diagonales AB', AC' et AD'.



- ABB' est un triangle rectangle en B

$\Rightarrow$ Pythagore :

$$AB' = \sqrt{AB^2 + BB'^2} = \underline{7\sqrt{2}\text{ cm}}$$

- $A'B'C'D'E'F'$ est un hexagone régulier

$\beta = \widehat{A'B'C'}$ = angle au sommet

$$\Rightarrow \beta = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{(6-2)\cdot 180^\circ}{6} = 120^\circ$$

donc $A'B'C'$ est un triangle isocèle en B' $\Rightarrow \widehat{C'A'B'} = \dfrac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$

$\Rightarrow$ Théorème du sinus dans $\Delta A'B'C'$:

$$\frac{B'C'}{\sin(\widehat{B'A'C'})} = \frac{A'C'}{\sin(\widehat{A'B'C'})} \Leftrightarrow \frac{7}{\sin(30^\circ)} = \frac{A'C'}{\sin(120^\circ)}$$

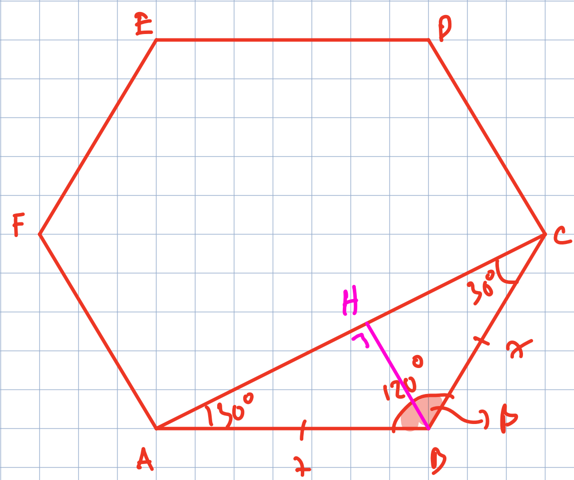
$$\Rightarrow A'C' = \frac{7\cdot\sin(120^\circ)}{\sin(30^\circ)} = \frac{7\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{7\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{1} = 7\sqrt{3}$$

Triangle $AA'C'$ est rectangle en A' $\Rightarrow$ Pythagore : $AC' = \sqrt{AA'^2 + A'C'^2}$

$$\Rightarrow AC' = \sqrt{7^2 + (7\sqrt{3})^2} = \sqrt{49 + 147} = 14$$

$$\Rightarrow \underline{AC' = 14\text{ cm}}$$

* Autre méthode pour calculer AC' :



β = angle au sommet

$$\beta = \frac{(n-2)\,180°}{n}$$

$$\beta = \frac{(6-2)\cdot 180°}{6} = 120°$$

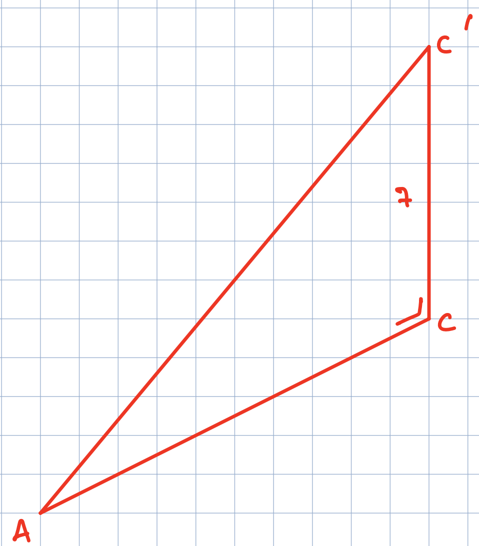
$\Rightarrow \Delta ABC$ est isocèle en B $\Rightarrow \widehat{BAC} = 30°$

$\Rightarrow \Delta ABH$ est rectangle en H

$\Rightarrow \cos(30°) = \dfrac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB\cos(30°)$

$\Rightarrow AH = 7\cos(30°) = 7\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow AC = 2AH = 2\cdot\dfrac{7\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$

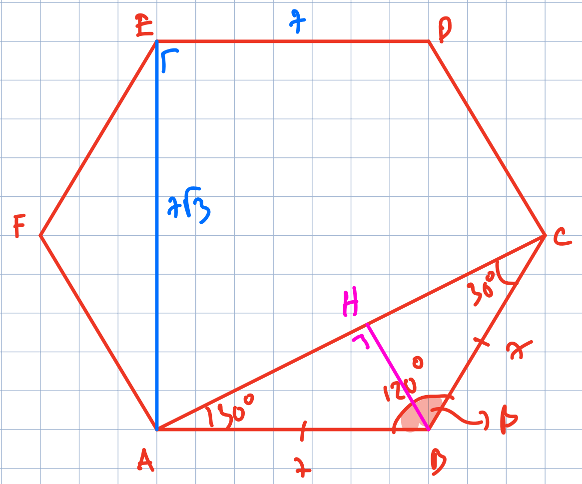


Dans le Δ rectangle ACC', par Pythagore :

$AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2}$

$= \sqrt{(7\sqrt{3})^2 + 7^2} = \sqrt{49\cdot 3 + 49}$

$\Rightarrow$ $\underline{AC' = 14 \text{ cm}}$



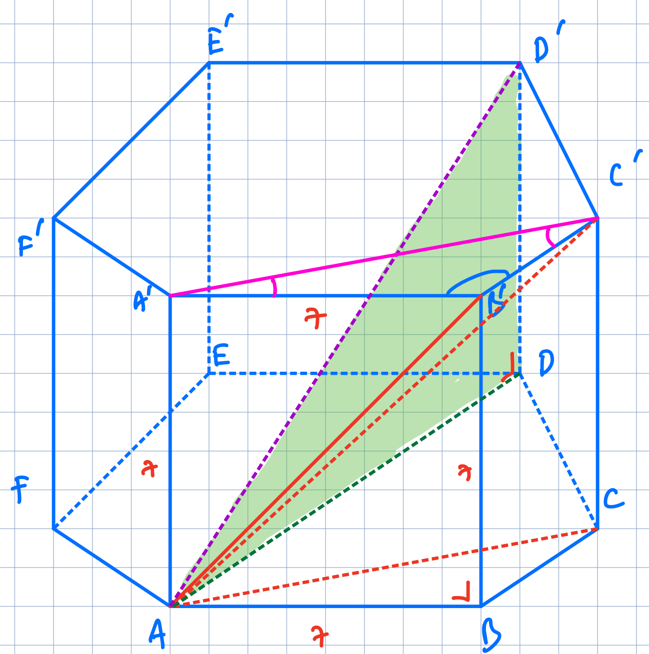
On a $AE = AC = 7\sqrt{3}$

et Δ AED est rectangle en E

$\Rightarrow$ Pythagore : $AD = \sqrt{AE^2 + ED^2}$

$\Rightarrow AD = \sqrt{(7\sqrt{3})^2 + 7^2}$

$\Rightarrow AD = \sqrt{147 + 49} = 14$ cm



Δ ADD' est rectangle en D

$\Rightarrow$ Pythagore :

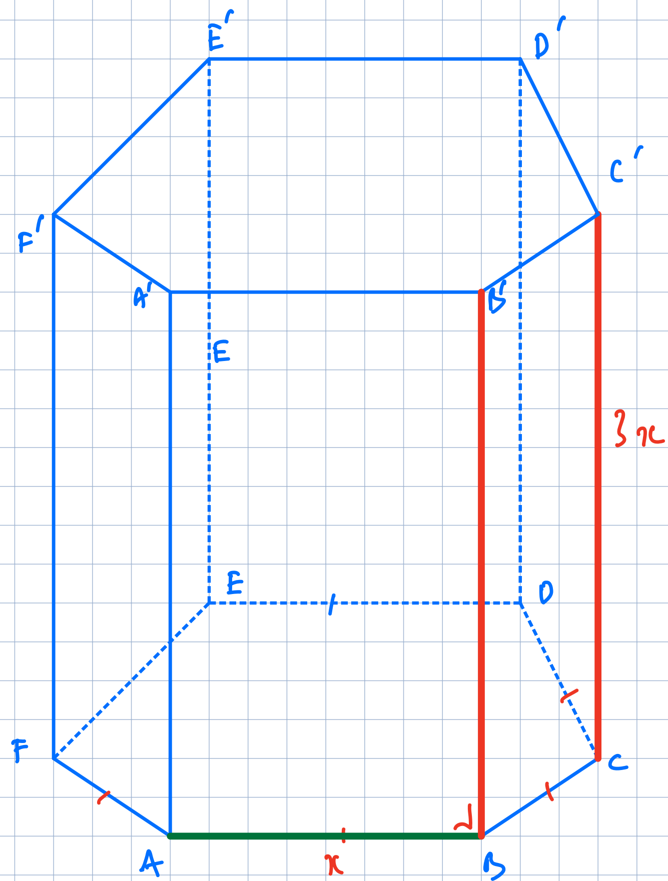
$AD' = \sqrt{AD^2 + DD'^2}$

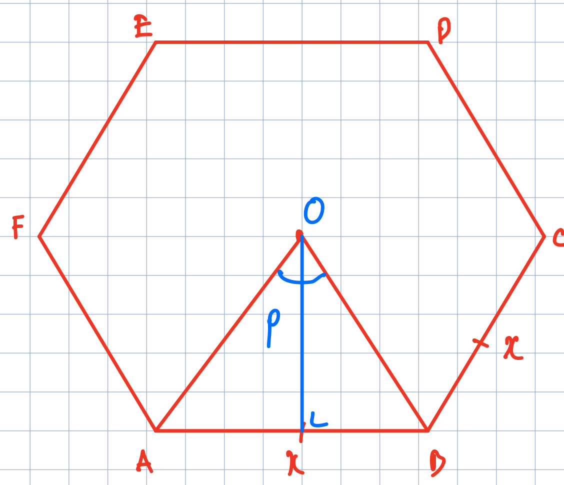
$\Rightarrow AD' = \sqrt{14^2 + 7^2}$

$AD' = \sqrt{196 + 49}$

$\Rightarrow \underline{AD' = 7\sqrt{5} \text{ cm}}$

5.17 Quel est la longueur du côté de la base d'un prisme hexagonal régulier dont l'aire totale est égale à 92.7846 cm^2 et dont la hauteur est égale à 3 fois le côté de la base ?





Aire d'une face rectangulaire :

$A_1 = x \cdot 3x = 3x^2$

Aire d'une base hexagone :

$A_2 = ?$

pour calculer A_2, on a la formule :

$$A_2 = \frac{1}{2} n c \rho$$

où n = nb de côtés = 6

c = longueur d'un côté = x

et ρ = rayon du cercle inscrit

$\Rightarrow$ il faut déterminer ρ

$\Rightarrow$ Angle au centre du hexagone régulier :

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

$\Rightarrow$ Δ OAB est équilatéral

$\Rightarrow \quad \rho = \text{hauteur} = \frac{\sqrt{3}}{2} x$

(formule)

$\Rightarrow \quad A_2 = \frac{1}{2} \, n \, c \, \rho = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} x = \frac{6x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3x^2\sqrt{3}}{2}$

$\text{Aire totale} = 92{,}7846 \text{ cm}^2 = 6 \cdot A_1 + 2 \cdot A_2 = 6 \cdot 3x^2 + \cancel{2} \cdot \frac{3x^2\sqrt{3}}{\cancel{2}}$

$\Rightarrow \quad 18x^2 + 3x^2\sqrt{3} = 92{,}7846$

$\Rightarrow \quad 23{,}1962\, x^2 = 92{,}7846$

$\Rightarrow \quad x^2 \simeq 4{,}3774$

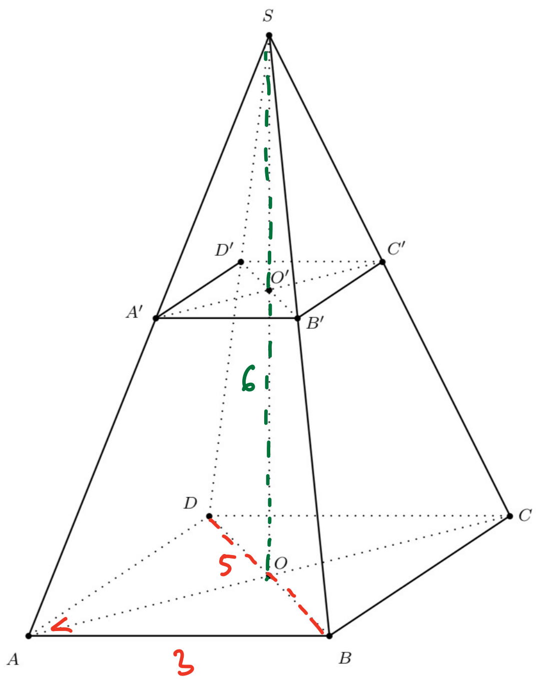
$\Rightarrow \quad \underline{x \simeq 2 \text{ cm}}$

5.18 La base de la pyramide $SABCD$ est le rectangle $ABCD$ de centre O. On connaît $AB = 3$ cm et $BD = 5$ cm. La hauteur SO mesure 6 cm.

a) Calculer AD.

b) Calculer le volume de la pyramide $SABCD$.

c) Soit O' le milieu de SO. On coupe la pyramide par un plan passant par O' et parallèle à sa base. Calculer le volume de la pyramide $SA'B'C'D'$.



a) $AD = ?$

ABCD est un rectangle $\Rightarrow$ Δ ADB est rectangle en A

$\Rightarrow$ Pythagore : $DB^2 = AD^2 + AB^2 \Rightarrow AD^2 = DB^2 - AB^2$

$\Rightarrow AD = \sqrt{DB^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = \underline{4 \text{ cm}}$

b) $V_{SABCD} = \frac{1}{3} A_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \underbrace{4 \cdot 3}_{A_{ABCD}} \cdot 6 = \underline{24 \text{ cm}^3}$

c) Le plan passant par O' et // à ABCD $\Rightarrow$ On a un rapport de $\frac{1}{2}$

$\downarrow$ milieu de SO

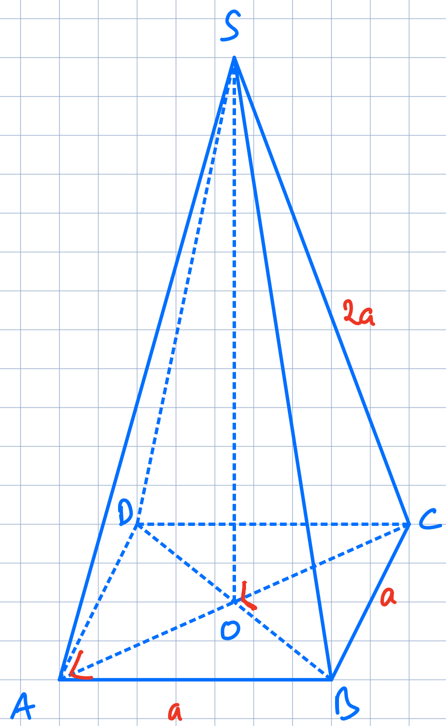
c-à-d : $A'B' = \frac{AB}{2} = \frac{3}{2}$ cm

$B'C' = \frac{BC}{2} = 2$ cm et $SO' = \frac{SO}{2} = 3$cm

d'où $A_{A'B'C'D'} = A'B' \cdot B'C' = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3 \text{ cm}^2$

$\Rightarrow V_{SA'B'C'D'} = \frac{1}{3} \cdot A_{A'B'C'D'} \cdot SO' = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 = \underline{3 \text{ cm}^3}$

5.19 Quel est le volume d'une pyramide régulière à base carrée dont le coté est a et l'arête latérale $2\,a$?



- $A_{ABCD} = a \cdot a = a^2$
- Δ ABD est isocèle rectangle en A

$\Rightarrow$ Pythagore : $BD^2 = AD^2 + AB^2$

$\Rightarrow BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow OB = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

- Δ SOB est rectangle en O

$\Rightarrow$ Pythagore : $SB^2 = SO^2 + OB^2$

$\Rightarrow SO^2 = SB^2 - OB^2 \Rightarrow SO = \sqrt{SB^2 - OB^2}$

$\Rightarrow SO = \sqrt{(2a)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{a^2 \cdot 2}{4}} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{a^2}{2}}$

$\Rightarrow SO = \sqrt{\dfrac{7a^2}{2}} = a\sqrt{\dfrac{7}{2}}$

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3} A_{ABCD} \cdot SO = \dfrac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a\sqrt{\dfrac{7}{2}} = \dfrac{a^3\sqrt{7}}{3\sqrt{2}} = \dfrac{a^3 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$

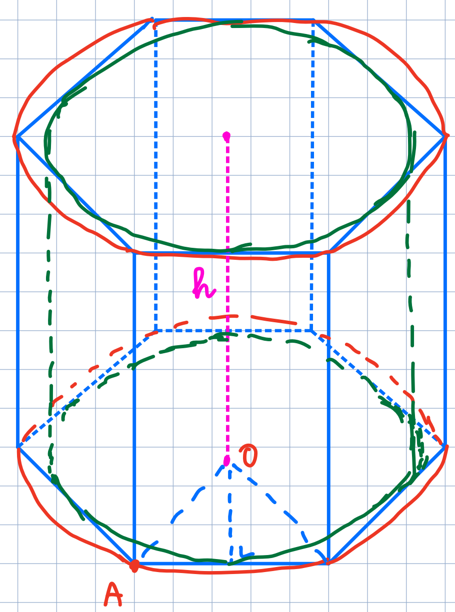
$\Rightarrow V = \dfrac{a^3\sqrt{14}}{6}$

5.20 On considère un prisme droit de hauteur h, dont la base est un hexagone régulier de côté a, ainsi que le cylindre inscrit et le cylindre circonscrit à ce prisme.

a) Calculer l'aire latérale et le volume du prisme.

b) Calculer l'aire latérale et le volume des deux cylindres.

c) Déterminer le rapport des aires latérales et des volumes des deux cylindres.



a) $A_{face} = a \cdot h$

$\Rightarrow A_{latérale} = 6 \cdot A_{face} = \underline{6ah}$

$A_{base} = \frac{1}{2} ncp$

$n = 6$, $c = a$

p = hauteur du triangle équilatéral (voir Ex 17)

$\Rightarrow p = \frac{\sqrt{3}}{2} a \Rightarrow A_{base} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{6a^2\sqrt{3}}{4}$

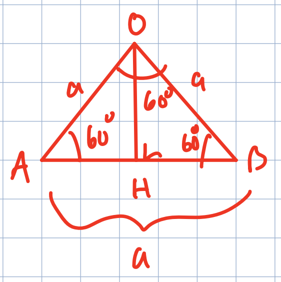
$\Rightarrow A_{base} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

$V_{prisme} = A_{base} \cdot h = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot h = \underline{\frac{3\sqrt{3}\, a^2 h}{2}}$

b) * L'aire latérale du cylindre circonscrit :

$A_{latérale}$ = circonférence de la base $\cdot$ hauteur

$\Rightarrow A_{latérale} = 2\pi r \cdot h$



OAB est un triangle équilatéral $\Rightarrow OA = AB = a$

(voir ex 16)

$\Rightarrow r = a$

$$\Rightarrow \underline{A_{latérale} = 2\pi a h}$$

et volume du cylindre circonscrit : $V = \pi r^2 \cdot h$

$$V = \underline{\pi a^2 h}$$

* l'aire latérale du cylindre inscrit :

$A_{latérale}$ = circonférence de la base . hauteur

$= 2\pi r' \cdot h$

où $r' = OH$ = hauteur du triangle équilatéral OAB

$$\Rightarrow r' = OH = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$\Rightarrow A_{latérale} = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a h = \underline{\sqrt{3}\pi a h}$$

Volume du cylindre inscrit : $V = \pi r'^2 \cdot h = \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a\right)^2 \cdot h$

$$\Rightarrow \underline{V = \frac{3a^2 \pi h}{4}}$$

c) Rapport des aires latérales des 2 cylindres :

$$\frac{A_{\text{latérale inscrit}}}{A_{\text{latérale circonscrit}}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi a h}{2\pi a h} = \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

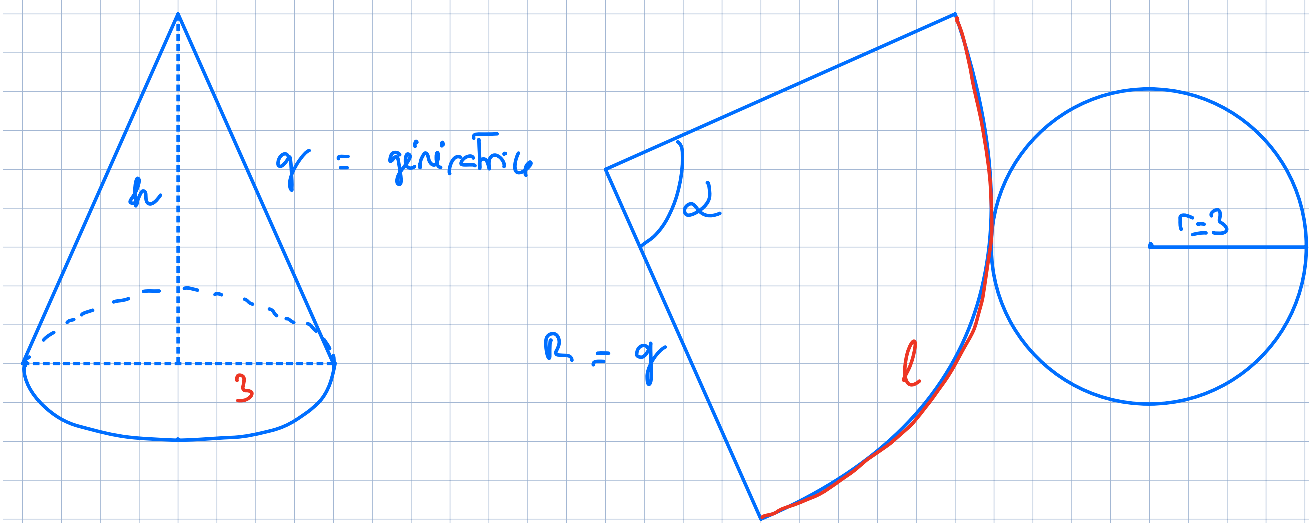
Rapport des volumes :

$$\frac{V_{\text{inscrit}}}{V_{\text{circonscrit}}} = \frac{\frac{3a^2\pi h}{4}}{\pi a^2 h} = \frac{3\cancel{a^2}\cancel{\pi}\cancel{h}}{4} \cdot \frac{1}{\cancel{\pi}\cancel{a^2}\cancel{h}} = \underline{\frac{3}{4}}$$

5.21 On veut construire un cône circulaire droit en papier. Le diamètre de la base doit être 6 cm et l'aire de la base doit être égale aux $3/5$ de sa surface latérale. Calculer :

a) Le rayon et l'angle du secteur qui représente le développement de sa surface latérale.

b) Le volume du cône.



a) Aire base $= \pi \cdot 3^2 = 9\pi = \frac{3}{5}$ Aire latérale

=> Aire latérale $= \frac{5 \cdot 9\pi}{3} = 15\pi$

=> Aire latérale $= \pi \cdot r \cdot g$ => $g = \frac{\text{Aire latérale}}{\pi \cdot r}$

(formulaire bunier)

=> $g = \frac{15\pi}{\pi r} = \frac{15\pi}{3\pi} = 5$ = rayon du secteur = R

=> L'angle du secteur : $\alpha = ?$

On a l = périmètre = circonférence de la base $= 2\pi r = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$

$$\Rightarrow \quad l = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi \cdot R \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{l \cdot 360°}{2\pi R} = \frac{6\pi \cdot 360°}{2\pi \cdot 5}$$

(formulaire et $1^{ère}$ année)

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{3 \cdot 360°}{5} = 216° \quad \Rightarrow \quad \underline{\alpha = 216°}$$

b) V du cône = ?

$$V = \frac{1}{3} \text{Base} \cdot \text{hauteur} \quad \Rightarrow \quad \text{Base} = 9\pi$$

$$\text{et hauteur} = h = \sqrt{g^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 3^2}$$

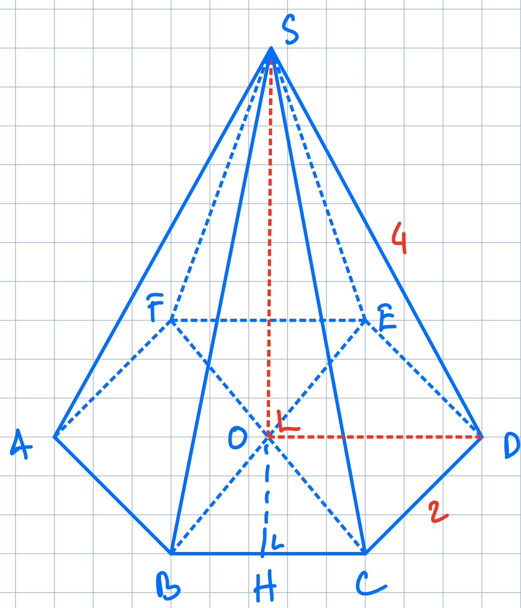
$$\Rightarrow \quad h = 4$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{3} \cdot 9\pi \cdot 4 = 12\pi \quad \Rightarrow \quad \underline{V \cong 37{,}7 \text{ cm}^3}$$

5.22 La base d'une pyramide régulière est un hexagone régulier dont le côté mesure 2 unités. La longueur de chaque arête latérale vaut 4 unités. Calculer

a) la hauteur de cette pyramide et son volume ;

b) l'aire d'une face latérale et l'aire totale de cette pyramide.



a) ABCDEF hexagone régulier

$\Rightarrow$ Δ OCD est équilatéral

$\Rightarrow$ $OD = CD = 2$

Δ SOD est rectangle en O

$\Rightarrow$ Pythagore : $SD^2 = SO^2 + OD^2$

$\Rightarrow SO^2 = SD^2 - OD^2$

$\Rightarrow SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{4^2 - 2^2}$

$\Rightarrow \underline{SO = 2\sqrt{3}}$

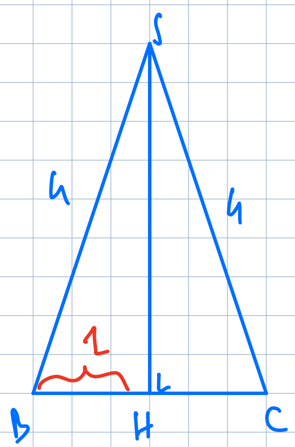
$\Rightarrow OH = \frac{\sqrt{3}}{2} BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$

(hauteur d'un triangle équilatéral)

$\Rightarrow A_{ABCDEF} = \frac{1}{2} n c p = \frac{1}{2} n c \cdot OH = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

$\Rightarrow V_{SABCDEF} = \frac{1}{3} A_{ABCDEF} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ SO}}{h} = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = \underline{12\ u^3}$

b) $A_{\text{face latérale}} = A_{SBC} = \frac{1}{2} BC \cdot SH$



$\Rightarrow SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{16 - 1} = \sqrt{15}$

(Pythagore)

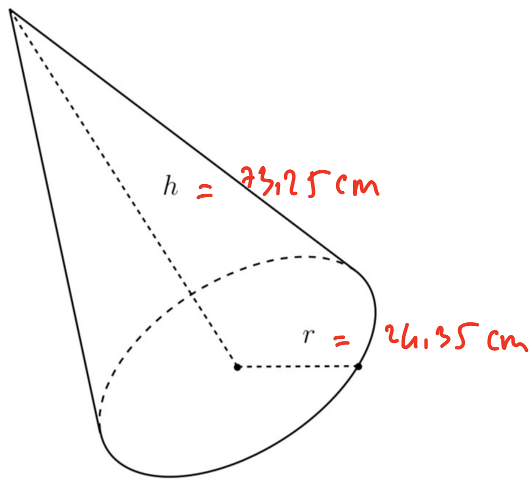
$\Rightarrow A_{SBC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{15} = \sqrt{15}\ u^2$

$A_{tot} = 6 \cdot A_{SBC} + A_{ABCDEF}$

$\Rightarrow A_{tot} = 6 \cdot \sqrt{15} + 6\sqrt{3}$

$\Rightarrow \underline{A_{tot} \cong 33{,}63\ u^2}$

5.23 On donne un cône dont la hauteur mesure 73.25 cm et dont le rayon de la base vaut 24.35 cm. Donner son volume en cm^3. Combien de litres cela représente-t-il ?



$$A_{base} = \pi r^2 = \pi \cdot (24,35)^2 = 592,9225\, \pi$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h = \frac{1}{3}\, 592,9225 \cdot \pi \cdot 73,25$$

$$\Rightarrow V \cong 45481,43 \text{ cm}^3 \cong 14,5 \text{ dm}^3$$

soit environ 45,5 litres

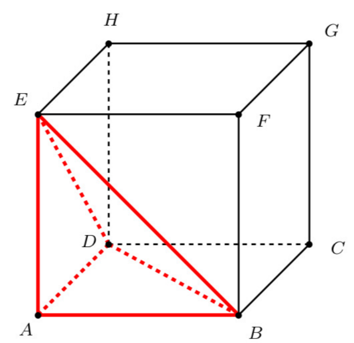
5.24 Partant du cube $ABCDEFGH$ d'arête 4 cm, on définit la pyramide de sommet E (AE est une arête du cube) et de base ABD.

a) Dessiner le cube en perspective. Dans une autre couleur, représenter la pyramide dans le cube.

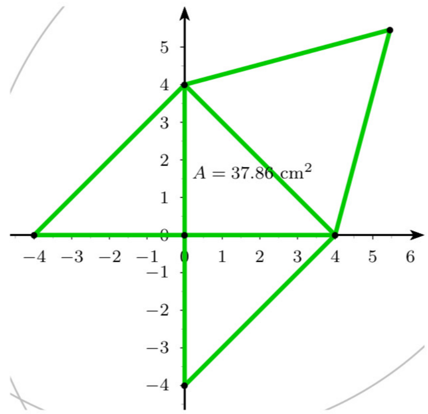
b) Construire un développement de cette pyramide et calculer son aire.

c) On coupe cette pyramide posée sur sa base par le plan horizontal qui passe par le milieu de AE. Quel est, en cm^3, le volume de la portion de la pyramide comprise entre la base ABD et ce plan ?

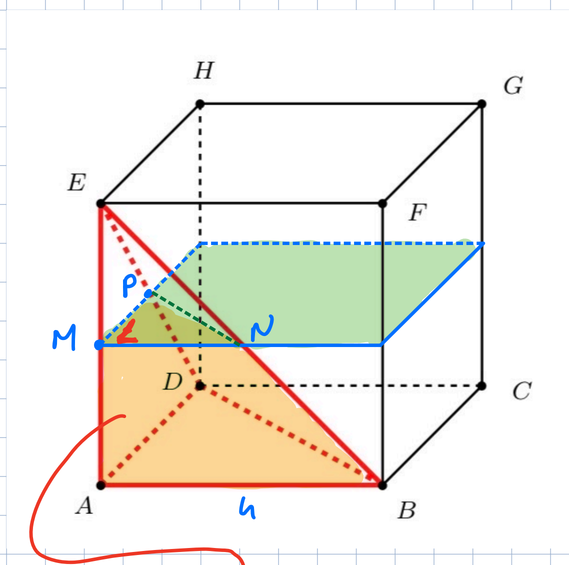
a)

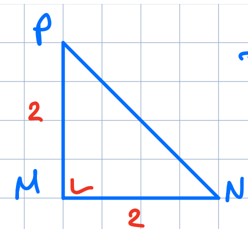


b)



c)





Triangle rectangle MPN

$A_{MPN} = \frac{1}{2} MP \cdot MN$

$= \frac{1}{2}\, 2 \cdot 2 = 2$

$\Rightarrow V_{EMPN} = \frac{1}{3} \cdot A_{MPN} \cdot ME = \frac{4}{3}$

$V_{EABD} = \frac{1}{3} A_{ABD} \cdot AE = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AD \cdot AB \cdot AE$

$= \frac{1}{6}\, 4 \cdot 4 \cdot 4 = \frac{64}{6} = \frac{32}{3}$

$\Rightarrow$ V de la portion de la pyramide $= \frac{32}{3} - \frac{4}{3} = \frac{28}{3} \simeq \underline{9{,}33 \text{ cm}^3}$

5.25 On a représenté ci-dessous le cube $ABCDEFGH$ dont le côté mesure 8 cm. Sur ce dessin, placer les milieux M, N, O et P des segments AB, AD, EF et EH, respectivement.

a) Dessiner le prisme $AMNEOP$ avec visibilité.

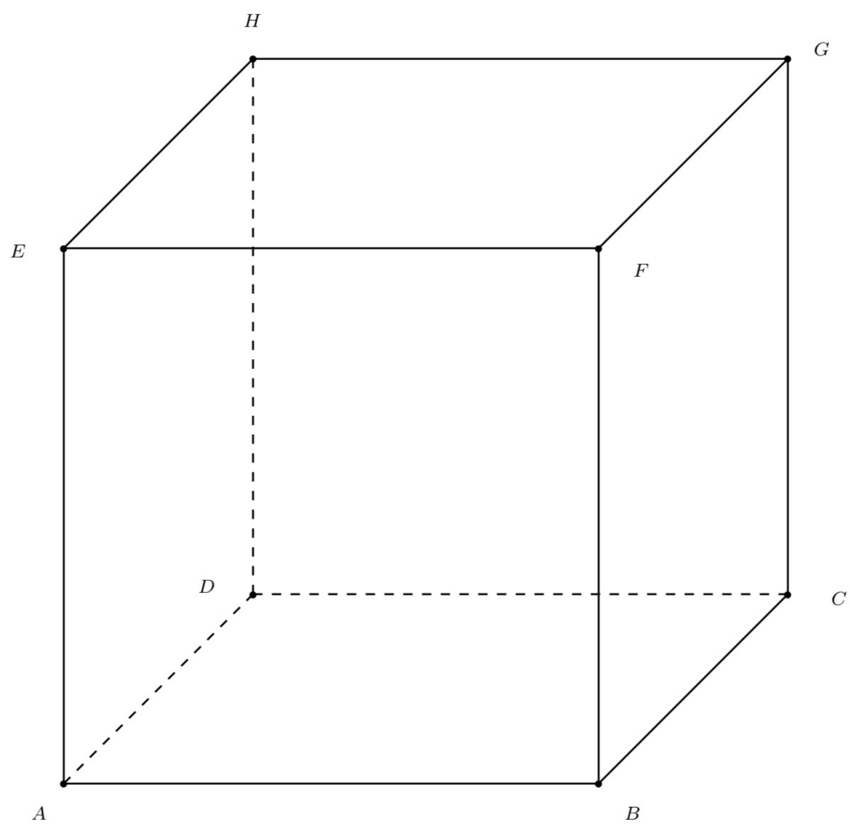
b) Calculer la longueur totale de ses arêtes.

c) Calculer son aire totale et son volume.

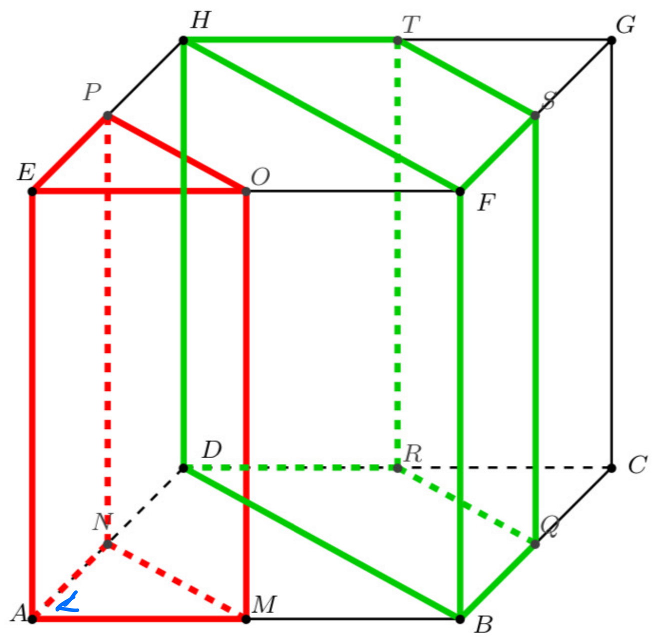
Placer encore les points Q, R, S et T, qui sont les milieux des segments BC, DC, FG et HG, respectivement.

a) Dessiner le prisme $BQRDFSTH$ avec visibilité.

b) Calculer son volume.



a)



b) longueur totale de AMNEOP

$AE = MO = NP = 8$ cm

$EP = EO = AN = AM = 4$ cm

$OP = MN = \sqrt{AN^2 + AM^2} = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$\Rightarrow \ell = 3 \cdot 8 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 4\sqrt{2} = 24 + 16 + 8\sqrt{2} \cong \underline{51,31 \text{ cm}}$

c) Aire totale et volume de AMNEOP

$A_1 = \text{Aire } AMOE = 8 \cdot 4 = 32 \text{ cm}^2$

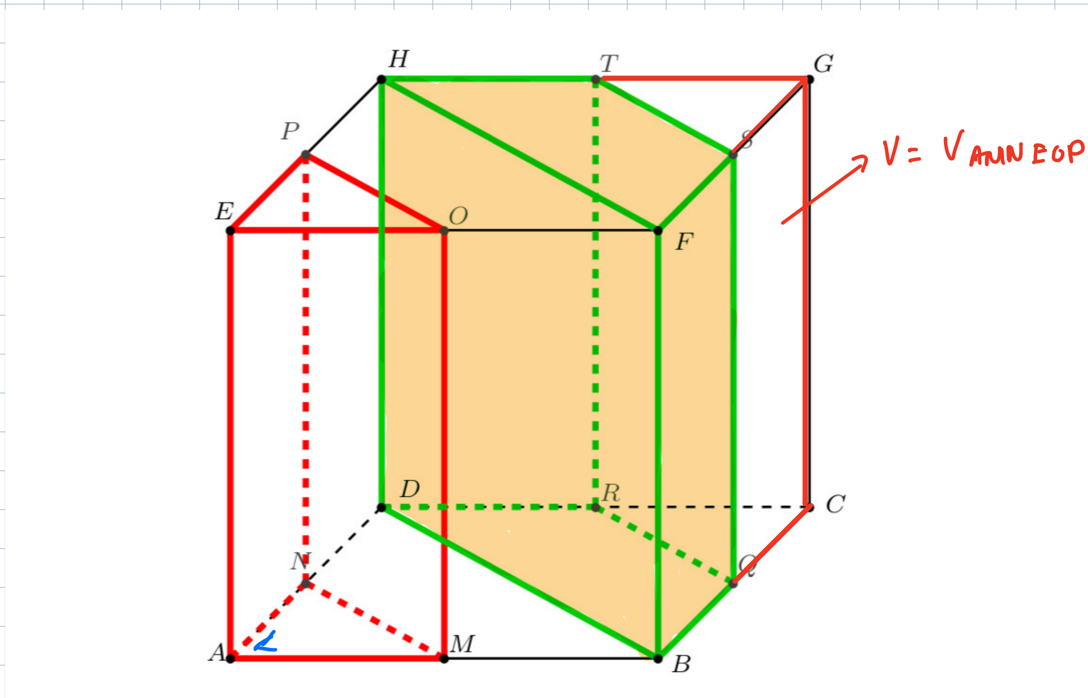
$A_2 = \text{Aire } NMOP = NM \cdot MO = 4\sqrt{2} \cdot 8 = 32\sqrt{2} \text{ cm}^2$

$A_3 = \text{Aire } \Delta \text{ rectangle } AMN = \frac{1}{2} AN \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8 \text{ cm}^2$

$\Rightarrow A_{tot} = 2A_1 + A_2 + 2A_3 = 2 \cdot 32 + 32\sqrt{2} + 2 \cdot 8$
$= 64 + 32\sqrt{2} + 16 \cong \underline{125,255\ cm^2}$

$\Rightarrow V_{AMNEOP} = A_{AMN} \cdot AE = 8 \cdot 8 = \underline{64\ cm^3}$

d)



Volume de BQRDFSTH $= \frac{1}{2}\left(V_{ABCDEFGH} - 2V_{AMNEOP}\right)$

$= \frac{1}{2}(8 \cdot 8 \cdot 8 - 2 \cdot 64) = \frac{1}{2} \cdot 384 = \underline{192\ cm^3}$

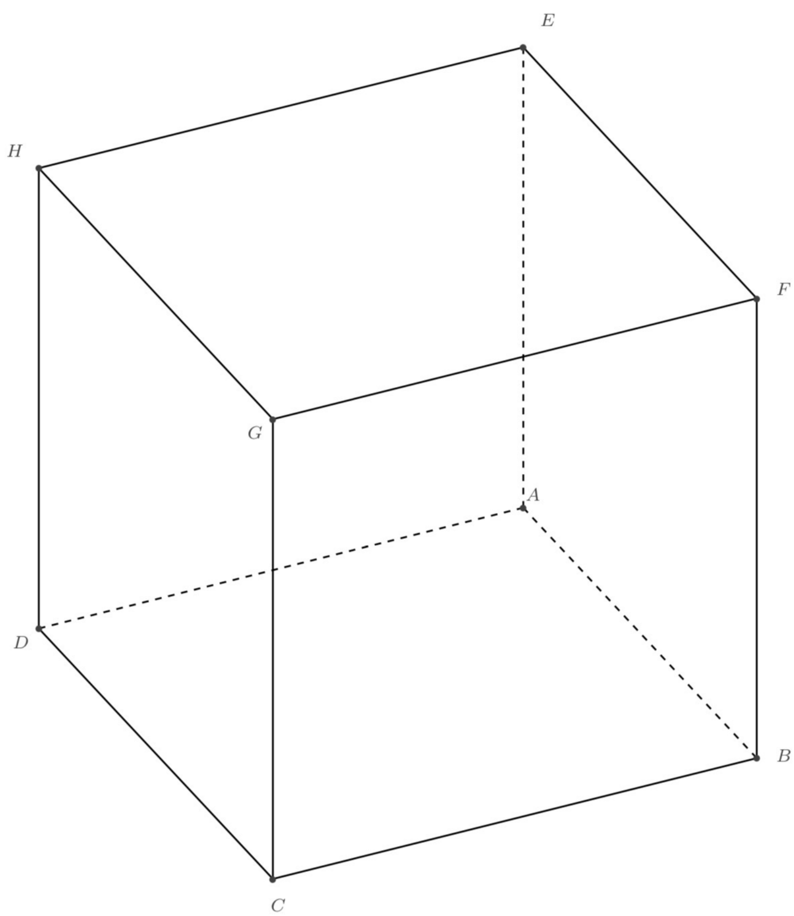
5.26 On a tracé ci-dessous à l'aide d'une axonométrie orthogonale, le cube $ABCDEFGH$ dont le côté mesure 10 cm.

a) Placer sur le dessin le milieu M de la face $EFGH$.

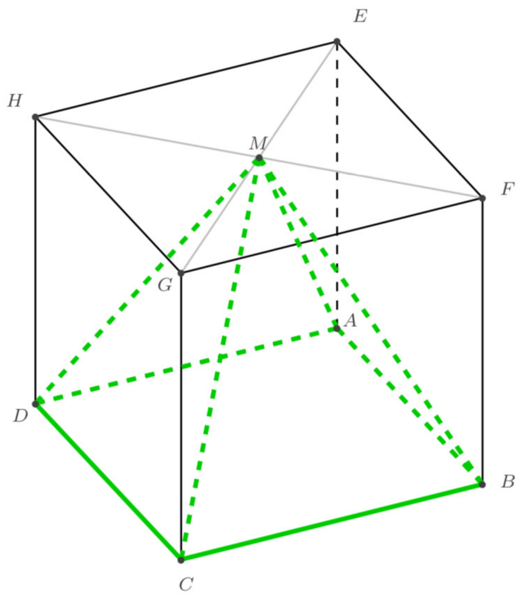
b) Dessiner la pyramide de sommet M et de base $ABCD$, avec visibilité.

c) Soit N le milieu de l'arête GC et O le milieu du segment GN. On considère le plan horizontal qui passe par O. Représenter les intersections de ce plan avec le cube.

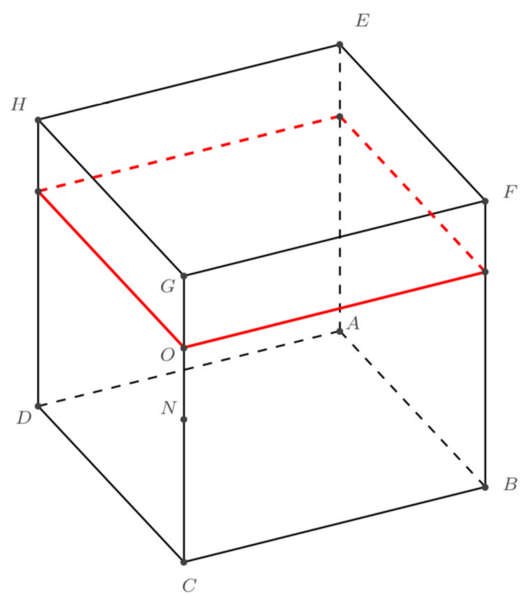
d) Le plan en question découpe la pyramide $MABCD$ en deux polyèdres. Décrire ces polyèdres et calculer le volume et l'aire totale de chacun.



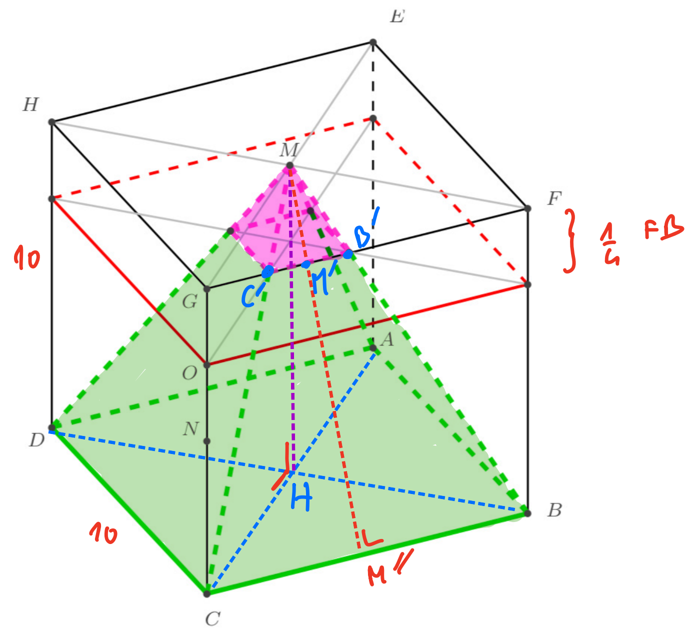
a) b)



c)



d)



Les deux polyèdres sont
- Une petite pyramide à base carrée
- Une pyramide tronquée

* petite pyramide à base carrée :

=> Aire de la base : côté $= \frac{1}{4}$ BO $= \frac{10}{4} = 2{,}5$

=> Aire de la base $= 2{,}5 \cdot 2{,}5 = 6{,}25\ cm^2$

=> la hauteur de la petite pyramide $= \frac{FB}{4} = 2{,}5$ cm

=> $V_{\text{petite pyramide}} = \frac{1}{3}$ Aire de la base $\cdot$ hauteur $= \frac{1}{3} \cdot 6{,}25 \cdot 2{,}5$

$\simeq$ 5,21 cm^3

- Aire totale de la petite pyramide :

$\Rightarrow$ Aire de la base $= 6{,}25\ cm^2$

Δ MHC est rectangle en H $\Rightarrow$ Pythagore : $MC = \sqrt{MH^2 + HC^2}$

$\Rightarrow MC = \sqrt{10^2 + HC^2}$ où $HC = \frac{AC}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{CB^2 + AB^2}$

$\Rightarrow HC = \frac{1}{2}\sqrt{10^2 + 10^2} = 5\sqrt{2}$

$\Rightarrow MC = \sqrt{10^2 + (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{100 + 50} = 5\sqrt{6}$

$\Rightarrow MC' = \frac{MC}{4} = \frac{5\sqrt{6}}{4}$

Δ MCM'' est rectangle en M'' $\Rightarrow$ Pythagore : $MC^2 = MM''^2 + M''C^2$

$\Rightarrow MM'' = \sqrt{MC^2 - M''C^2} = \sqrt{(5\sqrt{6})^2 - (5)^2} = \sqrt{25 \cdot 6 - 25}$

$\Rightarrow MM'' = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ $\Rightarrow MM' = \frac{5\sqrt{5}}{4}$

$\Rightarrow$ Aire $MC'B' = \frac{1}{2} MM' \cdot C'B' = \frac{1}{2} \frac{5\sqrt{5}}{4} \cdot \underbrace{\frac{10}{4}}_{!} = \frac{25\sqrt{5}}{16}$

$\left(C'B' = \frac{CB}{4} \right)$

$\Rightarrow$ Aire totale de la petite pyramide :

$A_{\text{petite pyramide}} =$ Aire base $+ 4$ Aire $MC'B'$

$= 6{,}25 + 4 \cdot \frac{25\sqrt{5}}{16} = 6{,}25 + \frac{25\sqrt{5}}{4}$

$\Rightarrow$ Aire totale $\cong \underline{20{,}23\ cm^3}$

* pyramide tronquée :

- Volume de la pyramide MABDC : $V = \frac{1}{3} A_{ABDC} \cdot MH$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3} 10 \cdot 10 \cdot 10 = \frac{1000}{3} cm^3$

$\Rightarrow V$ pyramide tronquée $= V - V$ petite pyramide $= \frac{1000}{3} - 5{,}21$

$\Rightarrow V$ pyramide tronquée $\simeq \underline{328{,}13 \ cm^3}$

- Aire totale de la pyramide tronquée :

• Aire de la base ABCD $= 10 \cdot 10 = 100 \ cm^2$

• Aire de $CC'B'B$ = Aire d'un trapèze $= \frac{1}{2}(C'B' + CB) \cdot M'M''$

$= \frac{1}{2}(2{,}5 + 10) \frac{3 \cdot 5\sqrt{5}}{4} \simeq 52{,}41 \ cm^2$

$M'M'' = \frac{3}{4} MM''$

$\Rightarrow$ Aire totale de la pyramide tronquée $= A_{ABCD} + 4 \cdot A_{CC'B'B} + A$ petite base

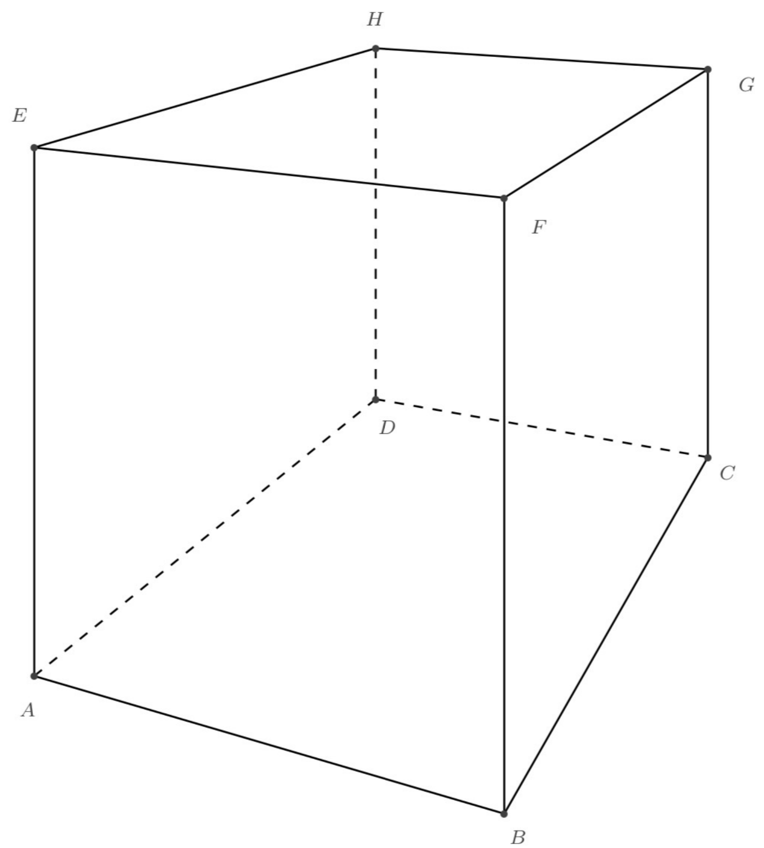
$= 100 + 4 \cdot 52{,}41 + 6{,}25 \simeq \underline{315{,}88 \ cm^2}$

5.27 Dans le cube $ABCDEFGH$, représenté ci-dessous en perspective centrale, on considère le solide de sommets B, D, E et G.

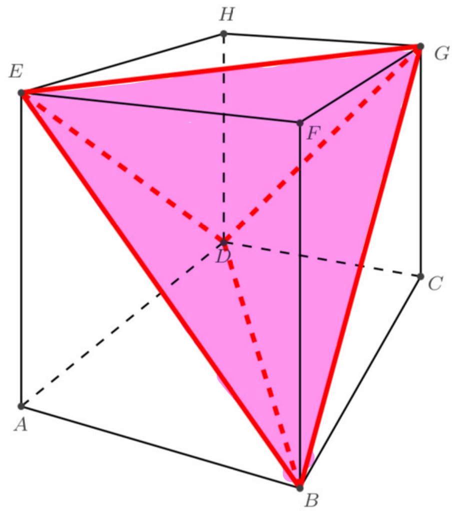
a) Représenter ce solide.

b) De quel type de solide s'agit-il ? En donner une description précise.

c) Dessiner un développement de ce solide.

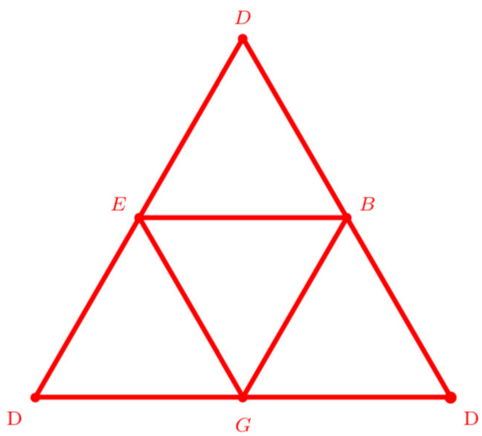


a)



b) C'est un tétraèdre régulier. Un tétraèdre régulier est un tétraèdre dont les 4 faces sont des triangles équilatéraux. Il possède 6 arêtes et 4 sommets.

c)

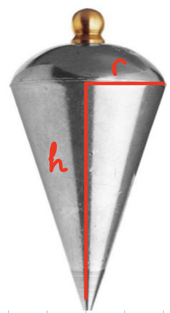


5.28 L'image ci-contre représente le poids d'un fil à plomb de maçon.

On suppose, pour simplifier les calculs, que le poids est formé d'un cône droit, surmonté d'une demi-sphère. On sait que le rayon de la sphère doit valoir le quart de la hauteur du cône.

a) Calculer le volume de cette pièce si la hauteur du cône vaut 5.47 cm.

b) Un poids de ce genre a été réalisé en Zamak, un alliage à base de zinc, dont la masse volumique vaut 6.975 g/cm^3. Sachant qu'il a une masse de 500 g, calculer ses dimensions.



$r = \frac{h}{4}$

a) $h = 5{,}47\text{ cm} \Rightarrow r = \frac{5{,}47}{4} = 1{,}3675\text{ cm}$

$\Rightarrow V$ de ce poids $= V_{cône} + V_{demi\text{-}sphère}$

$$V_{tot} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V_{tot} = \frac{1}{3}\pi\cdot(1{,}3675)^2\cdot 5{,}47 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\,(1{,}3675)^3$$

$$V_{tot} \cong 16{,}1\text{ cm}^3$$

b) Rappel : La masse volumique ρ (rho) est une propriété caractéristique qui représente la quantité de matière (masse) se trouvant dans un espace (unité de volume) donné.

$$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow V = \frac{m}{\rho} = \frac{500}{6{,}975} = 71{,}68\text{ cm}^3$$

On sait que V de ce poids $= V_{tot} = V_{cône} + V_{demi\text{-}sphère}$

$$\Rightarrow 71{,}68 = \frac{1}{3}\pi r^2\cdot h + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$$

et $r = \frac{h}{4}$ $\Rightarrow$ $h = 4r$

$\Rightarrow$ $71{,}68 = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 4r + \frac{2}{3}\pi r^3$

$71{,}68 = \frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{6}{3}\pi r^3 = 2\pi r^3$

$\Rightarrow$ $r^3 = \frac{71{,}68}{2\pi}$

$\Rightarrow$ $r = \sqrt[3]{\frac{71{,}68}{2\pi}} \cong \underline{2{,}25 \text{ cm}}$

$\Rightarrow$ hauteur du cône $= 4 \cdot r$ $\Rightarrow$ $\underline{h = 4 \cdot 2{,}25 = 9\text{cm}}$

et la hauteur totale $= 2{,}25 + 9 = \underline{11{,}25 \text{ cm}}$

5.29 Sur la figure ci-contre, on a représenté un cube $ABCDEFGH$ sur lequel est posée une pyramide $SEFGH$.

— Le côté du cube vaut 4 centimètres.

— La hauteur de la pyramide mesure elle aussi 4 centimètres.

— Le point P est le centre de la face $EFGH$.

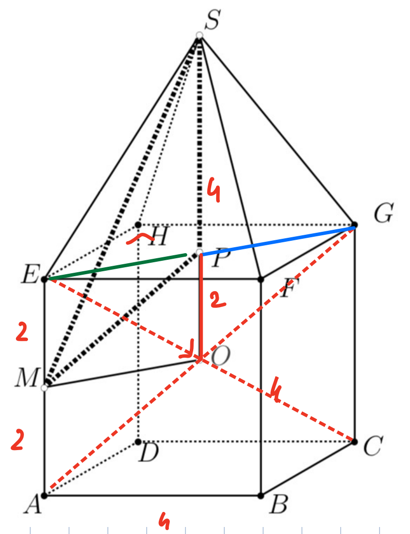
— Le point O est l'intersection des diagonales du cube.

— Le point M est le milieu du segment EA.

a) Calculer les longueurs MO, MP et MS.

b) Trouver les valeurs de tous les angles du triangle MOP.

c) Soit Q le milieu du segment MP. Calculer la valeur de l'angle QSP.



a) * $MO = ?$

$EFGH$ est un carré $\Rightarrow$ $\Delta\, EHG$ est isocèle rectangle en H

$\Rightarrow$ Pythagore : $EG = \sqrt{EH^2 + HG^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ $EH = \frac{EG}{2} = 2\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $MO = 2\sqrt{2}$ cm

* $MP = ?$

$\Delta\, MOP$ est rectangle en O $\Rightarrow$ Pythagore : $MP = \sqrt{MO^2 + OP^2} = \sqrt{8+4}$

$\Rightarrow$ $MP = 2\sqrt{3}$ cm

* $MS = ?$

$\Delta\, MSO$ est rectangle en O $\Rightarrow$ Pythagore : $MS = \sqrt{MO^2 + OS^2}$

où $OS = OP + PS = 2 + 4 = 6$ cm

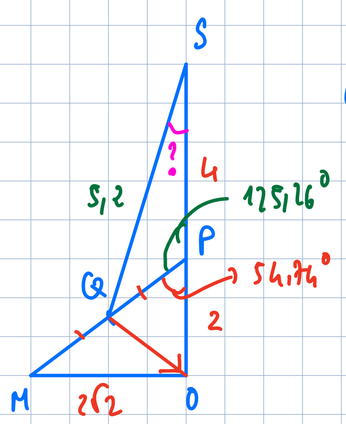
$\Rightarrow MS = \sqrt{8+36} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$ cm

b) ΔMOP est rectangle en $O \Rightarrow \widehat{MOP} = 90°$

* $\cos(\widehat{PMO}) = \dfrac{MO}{MP} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{PMO} \cong 35{,}26°$

* $\cos(\widehat{MPO}) = \dfrac{OP}{MP} = \dfrac{2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{MPO} \cong 54{,}74°$

c)



Q est le milieu de MP $\Rightarrow QP = \dfrac{MP}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow QP = \sqrt{3}$ cm

On a déjà calculé $\widehat{MPO} \cong 54{,}74°$

$\Rightarrow \widehat{QPS} = 180° - \widehat{MPO} = 180° - 54{,}74°$

$\Rightarrow \widehat{QPS} \cong 125{,}26°$ et $QP = \dfrac{MP}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ cm

- Théorème du cosinus dans le ΔQPS :

$$QS^2 = QP^2 + PS^2 - 2\,QP\,PS\cos(\widehat{QPS})$$

$$= (\sqrt{3})^2 + 16 - 2\cdot\sqrt{3}\cdot 4\cos(125{,}26°) = 19 - 8\sqrt{3}\cos(125{,}26°)$$

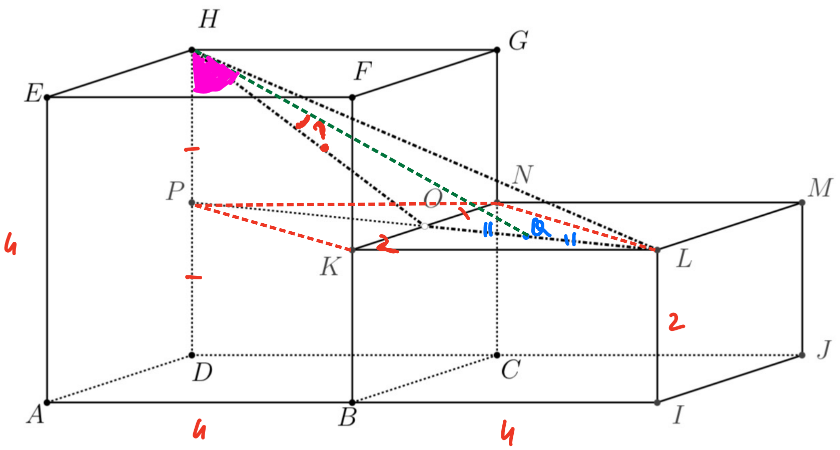
$\Rightarrow QS \cong 5{,}2$ cm

- Théorème du sinus dans le ΔQPS :

$$\frac{QP}{\sin(\widehat{QSP})} = \frac{QS}{\sin(\widehat{QPS})} \Rightarrow \sin(\widehat{QSP}) = \frac{QP\cdot\sin(\widehat{QPS})}{QS} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sin(125{,}26°)}{5{,}2}$$

$\Rightarrow \sin(\widehat{QSP}) \cong 15{,}79°$

5.30 Sur la figure ci-dessous, on a représenté un cube $ABCDEFGH$ contre lequel est posé un « demi-cube » $BIJCKLMN$. On sait que la mesure du côté du cube vaut quatre centimètres. De plus, la hauteur du « demi-cube » mesure la moitié de la hauteur du cube. On sait encore que le point P est le milieu du segment HD et que le point O est le milieu de l'arête NK.



a) Calculer les longueurs OL, PO et HO.

b) Trouver les valeurs de tous les angles du triangle HOP.

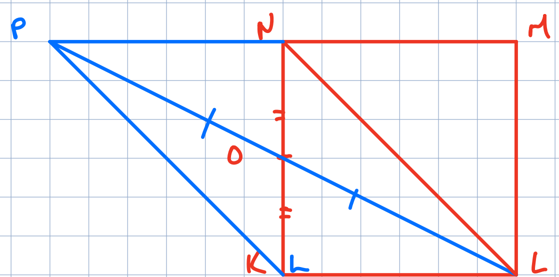
c) Soit maintenant Q, le milieu du segment OL. Calculer la valeur de l'angle OHQ.

a) * $OL = ?$

Δ OKL est rectangle en K $\Rightarrow$ Pythagore : $OL = \sqrt{OK^2 + KL^2} = \sqrt{2^2+4^2}$

$\Rightarrow$ $OL = 2\sqrt{5}$ cm

* $PO = ?$



PNLK est un parallélogramme

$\Rightarrow$ O est l'intersection des 2 diagonales $\Rightarrow$ $PO = OL = 2\sqrt{5}$ cm

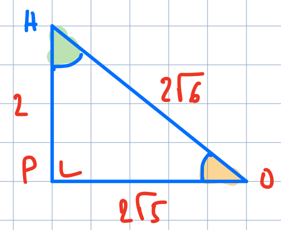
* $HO = ?$

Δ HPO est rectangle en P

$\Rightarrow$ Pythagore : $HO = \sqrt{HP^2 + PO^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{5})^2}$

$\Rightarrow HO = \sqrt{4+20} = \sqrt{24} = \underline{2\sqrt{6} \text{ cm}}$

b)



$\underline{\widehat{HPO} = 90°}$

$\sin(\widehat{POH}) = \dfrac{HP}{HO} = \dfrac{2}{2\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$

$\Rightarrow \underline{\widehat{POH} \cong 24{,}09°}$

$\cos(\widehat{PHO}) = \dfrac{HP}{HO} = \dfrac{2}{2\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow \underline{\widehat{PHO} \cong 65{,}91°}$

ou $\widehat{PHO} = 180° - \widehat{HPO} - \widehat{POH} \cong 65{,}91°$

c) $\widehat{OHQ} = ?$

Δ HPQ est rectangle en P $\Rightarrow \tan(\widehat{PQH}) = \dfrac{PH}{PQ} = \dfrac{PH}{PO + \frac{OL}{2}} = \dfrac{2}{2\sqrt{5} + \frac{2\sqrt{5}}{2}}$

$\Rightarrow \tan(\widehat{PQH}) = \dfrac{2}{2\sqrt{5}+\sqrt{5}} = \dfrac{2}{3\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{15} \Rightarrow \widehat{PQH} \cong 16{,}60°$

$\Rightarrow \widehat{PHQ} = 180° - \widehat{HPQ} - \widehat{PQH} = 180° - 90° - 16{,}60° \cong 73{,}4°$

$\Rightarrow \widehat{OHQ} = \widehat{PHQ} - \widehat{PHO} = 73{,}4° - 65{,}91°$

$\Rightarrow \underline{\widehat{OHQ} \cong 7{,}49°}$