Puissances

Rappel : Les puissances entières

- La puissance n-ème d'un nombre a est le produit de n facteurs égaux à a (avec $a \in \mathbb{N}$).
- a s'appelle la base et n l'exposant de la puissance
- on note :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ facteurs}}$$

- Par convention :

$$a^0 = 1 \quad (\text{pour tout } a \neq 0)$$

* propriétés :

Soit a et b deux nombres réels, m et n des entiers naturels non nuls.

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ → ex : $5^3 \cdot 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$
2) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ → ex : $(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6$
3) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$
5) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

6) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

7) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{n}$ $(a; b \neq 0)$

Racines

A) La racine carrée d'un nombre réel positif a est l'unique nombre réel positif r dont le carré est égal au nombre a :

$$\boxed{r = \sqrt{a} \iff r^2 = a \ , \ a \geq 0}$$

- Proposition :

Soient a et b deux nombres réels positifs

1) $\left(\sqrt{a}\right)^p = \sqrt{a^p}$

2) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

3) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ si $b \neq 0$

! Attention : $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$

- Soient a un nombre réel positif et n un nombre naturel, la racine n-ième du nombre réel a, notée $\sqrt[n]{a}$, est le nombre réel positif r, défini par :

$$\boxed{r = \sqrt[n]{a} \iff r^n = a}$$

a : radicande

n : indice

$\sqrt[n]{}$: radical

- Proposition :

Soient a et b deux nombres réels positifs :

1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$

2) $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

3) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ si $b \neq 0$

! Attention : $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$

- **Définition :**

- Si $a < 0$ et n est un nombre entier impair, on définit la racine n-ième par :

$$\boxed{r = \sqrt[n]{a} \iff r^n = a}$$

- Si $a < 0$ et n est un nombre entier pair, la racine n-ième de a n'est pas définie.

B) Les puissances à exposants rationnels

- **Définitions :**

a) Si n est pair et a un réel positif :

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

b) Si n est impair et a un réel quelconque :

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

En effet, dans ce cas, la racine peut-être calculée même si a est négatif, par exemple :

$$(-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1} = -1$$

De manière générale :

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$$

* Exemple :

$$\sqrt[5]{8^3} = 8^{\frac{3}{5}} = \left(2^3\right)^{\frac{3}{5}} = 2^{\frac{3 \cdot 3}{5}} = 2^{\frac{9}{5}}$$

c) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

Équation du type $x^n = b$ (n est un entier)

L'équation $x^n = b$ possède

1) si $b > 0$

a) deux solutions $x_1 = \sqrt[n]{b}$ et $x_2 = -\sqrt[n]{b}$ si n est pair

b) Une seule solution $x = \sqrt[n]{b}$ si n est impair

2) si $b < 0$

a) aucune solution si n est pair

b) Une solution si n est impair