

Les applications des fonctions exponentielles et logarithmiques

215 / 212

1) La croissance exponentielle :

On dit qu'une quantité augmente de façon exponentielle, si elle augmente régulièrement d'un même pourcentage, sur un intervalle de temps fixé :

$$Q(t) = Q_0 \cdot (1+i)^t$$

$$i = \frac{p}{100} \quad \text{ou } p : \% \text{ fixe}$$

* Exemple :

- La mitose est le processus biologique responsable de la reproduction des cellules somatiques du corps humain. \rightarrow Chaque cellule se divise en deux pour ainsi produire deux cellules filles identiques à la cellule mère.

- Les bactéries et les algues microscopiques se divisent elles aussi par la mitose.

\rightarrow Le décompte des populations de cellules mitotiques à la mitose nous fournirait une représentation exponentielle.

2) La décroissance exponentielle :

On dit qu'une quantité diminue de façon exponentielle, si elle diminue régulièrement d'un même pourcentage, sur un intervalle de temps fixé :

$$Q(t) = Q_0 \cdot (1-i)^t$$

$$i = \frac{p}{100} \quad \text{ou } p : \% \text{ fixe}$$

* Exemple :

- les éléments radioactifs se décomposent avec le temps de manière à ce que leur radioactivité devienne négligeable avec le temps. Cette perte de radioactivité suit une courbe de décroissance exponentielle.

3) Processus linéaire :

Le processus est dit linéaire s'il existe un nombre réel $m \neq 0$, tel que :

$$Q_0 ; Q_1 = Q_0 + m, Q_2 = Q_1 + m, Q_3 = Q_2 + m, \dots, Q(t+1) = Q(t) + m$$

$$Q(t) = Q_0 + t \cdot m$$

si $\begin{cases} m > 0 \rightarrow \text{croissance linéaire} \\ m < 0 \rightarrow \text{décroissance linéaire} \end{cases}$

4) Processus exponentiel :

Le processus est dit exponentiel s'il existe un nombre réel $a > 0$ tel que :

$$Q_0 ; Q_1 = Q_0 \cdot a, Q_2 = Q_1 \cdot a, Q_3 = Q_2 \cdot a, \dots, Q(t+1) = Q(t) \cdot a, \dots$$

$$Q(t) = Q_0 \cdot a^t$$

$\begin{cases} \text{si } a > 1 \rightarrow \text{croissance exponentielle} \\ \text{si } 0 < a < 1 \rightarrow \text{décroissance exponentielle} \end{cases}$

* Autre formule pour les processus exponentiels :

$$f(t) = f_0 \cdot a^{\frac{t}{k}}$$

où f_0 : quantité initiale

a : taux de croissance / décroissance

k : fréquence

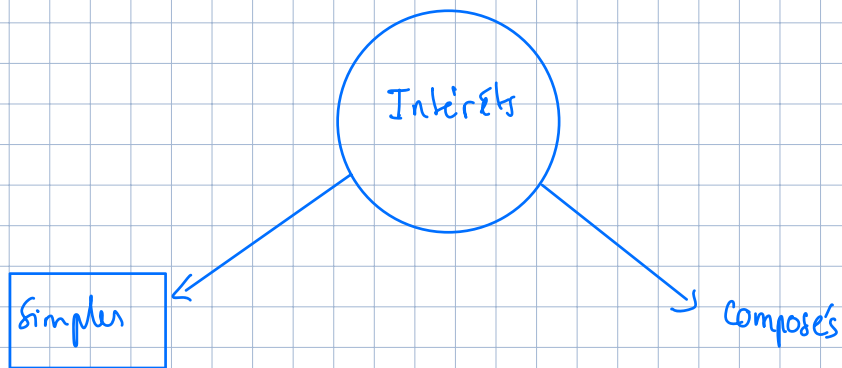
5) Modèle exponentiel avec taux de croissance nominal :

$$f(t) = f_0 e^{\pm d t}$$

où f_0 : valeur initiale

$\pm d$: taux nominal de croissance ou
de décroissance

6) Les intérêts :



$$I = \frac{C \cdot t \cdot m}{100 \cdot 360}$$

C : Capital

t : taux (%)

m : durée (nombre de jours)

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{t}{100} \right)^n$$

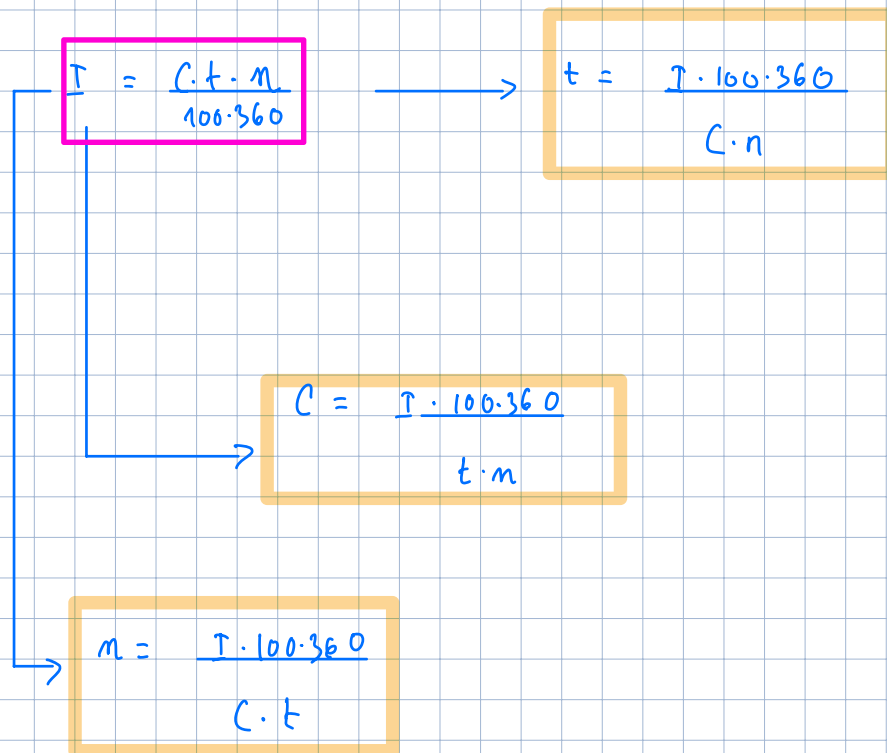
C₀ : Capital initial (année 0)

t : taux d'intérêt en %

n : nombre d'année

* Intérêts simples :

Les intérêts sont proportionnels à la durée du placement et au taux.



* Intérêts composés :

Une période de capitalisation (durée entre 2 boucllements) est précisée (année, semestre, trimestre, ...). Pendant la durée du placement, à la fin de chaque période de capitalisation, les intérêts de la période sont ajoutés au capital.

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{t}{100} \right)^n$$

$$\hookrightarrow C_n = C_0 (1+i)^n$$

$$C_0 = \frac{C_n}{\left(1 + \frac{t}{100} \right)^n}$$

$$t = 100 \cdot \left(\sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1 \right)$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{C_n}{C_0}\right)}{\log\left(1 + \frac{t}{100}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right)}{\ln\left(1 + \frac{t}{100}\right)} = \frac{\log\left(\frac{C_n}{C_0}\right)}{\log\left(1 + \frac{t}{100}\right)}$$

C_0 : capital initial

n : nb de périodes de capitalisation

$t\% = \frac{t}{100} = i$: taux de la période de capitalisation

C_n : capital disponible (intérêts & capital initial) après n périodes de capitalisation du placement.

! On dit que les intérêts composés suivent une croissance exponentielle.

- En conservant le même taux annuel, le capital disponible augmente si la période de capitalisation est raccourcie, mais il existe une valeur limite (intérêts continus).