Les applications des fonctions exponentielles et logarithmiques

2MS / 2MR

1) La croissance exponentielle :

On dit qu'une quantité augmente de façon exponentielle, si elle augmente régulièrement d'un même pourcentage, sur un intervalle de temps fixé :

$$\boxed{Q(t) = Q_0 \cdot (1+i)^t} \qquad i = \frac{p}{100} \quad \text{où } p : \% \text{ fixe}$$

* Exemple :

- La mitose est le processus biologique responsable de la reproduction des cellules somatiques du corps humain. -> Chaque cellule se divise en deux pour ainsi produire deux cellules filles identiques à la cellule mère.
- Les bactéries et les algues microscopiques se divisent elles aussi par la mitose.

=> Le décompte des populations de cellules soumise à la mitose nous fournit une représentation exponentielle.

2) La décroissance exponentielle :

On dit qu'une quantité diminue de façon exponentielle, si elle diminue régulièrement d'un même pourcentage, sur un intervalle de temps fixé :

$$\boxed{Q(t) = Q_0 \cdot (1-i)^t} \qquad i = \frac{p}{100} \quad \text{où } p : \% \text{ fixe}$$

* Exemple :

- les éléments radioactifs se décomposent avec le temps de manière à ce que leur radioactivité devient négligeable avec le temps. Cette perte de radioactivité suit une courbe de décroissance exponentielle.

3) Processus linéaire :

Le processus est dit linéaire s'il existe un nombre réel $m \neq 0$, tel que :

Q_0 ; $Q_1 = Q_0 + m$, $Q_2 = Q_1 + m$, $Q_3 = Q_2 + m$, ... , $Q(t+1) = Q(t) + m$

$$\boxed{Q(t) = Q_0 + t \cdot m}$$

si $m > 0$ croissance linéaire.

si $m < 0$ décroissance linéaire.

4) Processus exponentiel :

Le processus est dit exponentiel s'il existe un nombre réel $a > 0$ tel que :

Q_0 ; $Q_1 = Q_0 \cdot a$, $Q_2 = Q_1 \cdot a$, $Q_3 = Q_2 \cdot a$, ... , $Q(t+1) = Q(t) \cdot a$, ...

$$\boxed{Q(t) = Q_0 \cdot a^t}$$

si $a > 1$ → croissance exponentielle

si $0 < a < 1$ → décroissance exponentielle

* Autre formule pour les processus exponentiels :

$$f(t) = f_0 \cdot a^{\frac{t}{k}}$$

où f_0 : quantité initiale

a : taux de croissance / décroissance

k : fréquence

5) Modèle exponentiel avec taux de croissance nominal :

$$\boxed{f(t) = f_0 \, e^{\alpha t}}$$

où f_0 : valeur initiale

$\pm \alpha$: taux nominal de croissance ou de décroissance

6) Les intérêts :

Intérêts

$\boxed{\text{Simples}}$

$$\boxed{I = \frac{C \cdot t \cdot n}{100 \cdot 360}}$$

C : capital

t : taux (%)

n : durée (nombre de jours)

Composés

$$\boxed{C_n = C_0 \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n}$$

C_0 : capital initial (année 0)

t : taux d'intérêt en %

n : nombre d'année

* Intérêts simples :

Les intérêts sont proportionnels à la durée du placement et au taux.

$$\boxed{I = \frac{C \cdot t \cdot n}{100 \cdot 360}} \longrightarrow \boxed{t = \frac{I \cdot 100 \cdot 360}{C \cdot n}}$$

$$\boxed{C = \frac{I \cdot 100 \cdot 360}{t \cdot n}}$$

$$\boxed{n = \frac{I \cdot 100 \cdot 360}{C \cdot t}}$$

* Intérêts composés :

Une période de capitalisation (durée entre 2 bouclements) est précisée (année, semestre, trimestre, ...). Pendant la durée du placement, à la fin de chaque période de capitalisation, les intérêts de la période sont ajoutés au capital.

$$\boxed{C_n = C_0 \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n}$$

$\hookrightarrow \boxed{C_n = C_0 (1+i)^n}$

C_0 : capital initial

n : nb de périodes de capitalisation

$t\% = \frac{t}{100} = i$: taux de la période de capitalisation

C_n : capital disponible (intérêts & capital initial) après n périodes de capitalisation du placement.

$$\boxed{C_0 = \frac{C_n}{\left(1 + \frac{t}{100}\right)^n}}$$

$$\boxed{t = 100 \cdot \left(\sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1 \right)}$$

$$\boxed{n = \log_{\left(1 + \frac{t}{100}\right)} \left(\frac{C_n}{C_0}\right) = \frac{\ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right)}{\ln\left(1 + \frac{t}{100}\right)} = \frac{\log\left(\frac{C_n}{C_0}\right)}{\log\left(1 + \frac{t}{100}\right)}}$$

! • On dit que les intérêts composés suivent une croissance exponentielle.

• En conservant le même taux annuel, le capital disponible augmente si la période de capitalisation est raccourcie, mais il existe une valeur limite (intérêts continus).