Généralités sur les fonctions :

Corrigé

2.2.1 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes : Fonctions polynomiales $ED_f = \mathbb{R}$

a) $f(x) = 4 - 5x$

b) $f(x) = x^2 - x - 2$

c) $f(x) = (x+4)^2(2+x)$

d) $f(x) = -6x^3 + 11x^2 - 3x$

e) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

f) $f(x) = x^4 + 5x^2 - 36$

a) $f(x) = 4 - 5x$ est définie sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow ED_f = \mathbb{R}$

b) $f(x) = x^2 - x - 2 \Rightarrow \underline{ED_f = \mathbb{R}}$

c) $f(x) = (x+4)^2(2+x) \Rightarrow \underline{ED_f = \mathbb{R}}$

d) $f(x) = -6x^3 + 11x^2 - 3x \Rightarrow \underline{ED_f = \mathbb{R}}$

e) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \Rightarrow \underline{ED_f = \mathbb{R}}$

f) $f(x) = x^4 + 5x^2 - 36 \Rightarrow \underline{ED_f = \mathbb{R}}$

2.2.2 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes : Fonctions rationnelles

a) $f(x) = \dfrac{x(x+4)}{3-2x}$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{16 - x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{(x+2)^2(x+1)}{x^2 + x}$

d) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x-5} + \dfrac{3}{x+1}$

f) $f(x) = \dfrac{-5(4-x)^2}{(1-x^2)(2-x)}$

a) $f(x) = \dfrac{x(x+4)}{3-2x}$ est définie si $3 - 2x \neq 0 \Rightarrow x \neq \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow \underline{ED_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}}$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{16-x^2}$ est définie si $16-x^2 \neq 0 \iff (4-x)(4+x) \neq 0$

$\Rightarrow x \neq 4$ ou $x \neq -4$

$\Rightarrow$ $\underline{ED_f = \mathbb{R} \setminus \{-4 ; 4\}}$

c) $f(x) = \dfrac{(x+2)^2(x+1)}{x^2+x}$ est définie si $x^2+x \neq 0$

$\iff x(x+1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ ou $x \neq -1$

$\Rightarrow ED_f = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 0\}$ ou $\underline{ED_f = \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}}$

d) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ est définie si $x \neq 0$

$\Rightarrow$ $\underline{ED_f = \mathbb{R}^*}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x-5} + \dfrac{3}{x+1}$ est définie si $x-5 \neq 0$ et $x+1 \neq 0$

$\Rightarrow x \neq 5$ et $x \neq -1$

$\Rightarrow$ $\underline{ED_f = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 5\}}$

f) $f(x) = \dfrac{-5(4-x)^2}{(1-x^2)(2-x)}$ est définie si $(1-x^2)(2-x) \neq 0$

$\Rightarrow 1-x^2 \neq 0$ ou $2-x \neq 0$

$\Rightarrow (1-x)(1+x) \neq 0$ ou $x \neq 2$

$\Rightarrow$ $\underline{ED_f = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1 ; 2\}}$

2.2.3 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes : *fonction irrationnelles*

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ b) $f(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{x-5}$

c) $f(x) = \sqrt{(x-1)(x-5)}$ d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{6-2x}}{x^2 - 5x + 4}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-4}}$ f) $f(x) = \dfrac{x^2 + 7x}{\sqrt{1-x^2}}$

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

$f(x)$ est définie si $x^2 + x + 1 \geqslant 0$

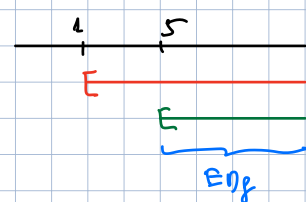
$\Delta = -3 < 0 \iff x^2 + x + 1$ est > 0

(même signe a de x^2)

$\Rightarrow \underline{ED_f = \mathbb{R}}$

b) $f(x) = \sqrt{x-1}\,\sqrt{x-5}$ est définie si $x - 1 \geqslant 0$ et $x - 5 \geqslant 0$ ← intersection

$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 \geqslant 0 \\ x - 5 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x \geqslant 5 \end{cases}$



$\Rightarrow \underline{ED_f = [5 \, ; +\infty[}$

c) $f(x) = \sqrt{(x-1)(x-5)}$ est définie si $(x-1)(x-5) \geqslant 0$

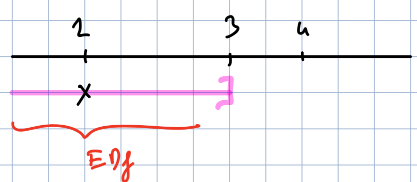
Tableau de signe :

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$(x-1)(x-5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Rightarrow \underline{ED_f =]-\infty \, ; 1] \cup [5 \, ; +\infty[}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{6-2x}}{x^2-5x+4}$ est définie si $6-2x \geq 0$ et $x^2-5x+4 \neq 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 6-2x \geq 0 \\ x^2-5x+4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ (x-4)(x-1) \neq 0 \end{cases}$



$\Rightarrow ED_f =]-\infty\,;3] \setminus \{1\}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-4}}$ est définie si $\dfrac{x+1}{x-4} \geq 0$ et $x-4 \neq 0$

Tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-4$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\dfrac{x+1}{x-4}$		$+$	0	$-$	||	$+$	

$\Rightarrow ED_f =]-\infty\,;-1] \cup]4\,;+\infty[$

ou :

on teste avec des valeurs $\rightarrow$

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$\dfrac{x+1}{x-4}$		$+$	0	$-$	||	$+$	

$\Rightarrow ED_f =]-\infty\,;-1] \cup]4\,;+\infty[$

f) $f(x) = \dfrac{x^2+7x}{\sqrt{1-x^2}}$ est définie si $1-x^2 \geqslant 0$ et $\underbrace{1-x^2}\neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$

$\Rightarrow \quad 1-x^2 > 0$

$\Rightarrow \quad (1-x)(1+x) > 0$

Tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\Rightarrow \boxed{ED_f =]-1\,;\,1[}$

2.2.5 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \ln(7-2x)$

b) $f(x) = e^{x-1}$

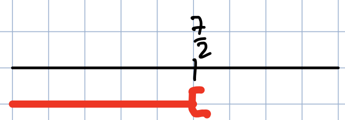
c) $f(x) = \dfrac{3-x}{1-\log(x)}$

d) $f(x) = 3^{1/(x+2)}$

e) $f(x) = \log_2\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)$

f) $f(x) = 10^{-x}$

a) $f(x) = \ln(7-2x)$ est définie si $7-2x > 0 \Rightarrow x < \frac{7}{2}$



$ED_f =]-\infty\,;\,\frac{7}{2}[$

b) $f(x) = e^{x-1}$ est définie sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $ED_f = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \dfrac{3-x}{1-\log(x)}$ est définie si $1-\log(x) \neq 0$ et $x > 0$

$\Rightarrow \quad 1-\log(x) \neq 0 \Rightarrow \log(x) \neq 1 \Rightarrow \log(x) \neq \log(10)$

$\Rightarrow \quad x \neq 10$

$\Rightarrow$ $ED_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{10\}$

d) $f(x) = 3^{1/(x+2)}$ est définie si $x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

$\Rightarrow ED_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

e) $f(x) = \log\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)$ est définie si $\dfrac{2+x}{3-x} > 0$ et $3-x \neq 0$

$\Rightarrow$ Signe de $\dfrac{2+x}{3-x}$

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$\dfrac{2+x}{3-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

on teste avec des valeurs ->

$\Rightarrow ED_f =]-2\,;3[$

f) $f(x) = 10^{-x}$ est définie sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow ED_f = \mathbb{R}$

2.2.6 Calculer dans chaque cas la valeur de $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$ et $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$.

Donner ensuite les ensembles de définition des fonctions $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ et $\dfrac{f}{g}$.

a) $f(x) = 3$ et $g(x) = x^2$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{x-4}$ et $g(x) = \dfrac{x}{x+5}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \sqrt{4x}$

d) $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = \ln(1-x)$

a) $f(x) = 3$ et $g(x) = x^2$

* $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 3 + x^2 = x^2 + 3 \Rightarrow ED(f+g) = \mathbb{R}$
* $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 3 - x^2 = -x^2 + 3 \Rightarrow ED(f-g) = \mathbb{R}$
* $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) = 3\cdot x^2 \Rightarrow ED(f\cdot g) = \mathbb{R}$
* $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{3}{x^2} \Rightarrow ED\left(\dfrac{f}{g}\right) = \mathbb{R}^*$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{x-4}$ et $g(x) = \dfrac{x}{x+5}$

* $(f+g)(x) = \dfrac{2x}{x-4} + \dfrac{x}{x+5} = \dfrac{3x^2+6x}{(x-4)(x+5)} \Rightarrow ED(f+g) = \mathbb{R} \setminus \{-5;4\}$

* $(f-g)(x) = \dfrac{2x}{x-4} - \dfrac{x}{x+5} = \dfrac{x^2+14x}{(x-4)(x+5)} \Rightarrow ED(f-g) = \mathbb{R} \setminus \{-5;4\}$

* $(f \cdot g)(x) = \dfrac{2x}{x-4} \cdot \dfrac{x}{x+5} = \dfrac{2x^2}{(x-4)(x+5)} \Rightarrow ED(f \cdot g) = \mathbb{R} \setminus \{-5;4\}$

* $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\frac{2x}{x-4}}{\frac{x}{x+5}} = \dfrac{2x}{x-4} \cdot \dfrac{x+5}{x} = \dfrac{2x(x+5)}{x(x-4)}$

$\Rightarrow ED\left(\dfrac{f}{g}\right) = \mathbb{R}^* \setminus \{-5;4\}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \sqrt{4x}$

* $(f+g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4x} = \sqrt{x} + 2\sqrt{x} = 3\sqrt{x} \Rightarrow ED(f+g) = \mathbb{R}_+$

* $(f-g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{4x} = \sqrt{x} - 2\sqrt{x} = -\sqrt{x} \Rightarrow ED(f-g) = \mathbb{R}_+$

* $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{4x} = \sqrt{4x^2} = 2|x| = 2x \Rightarrow ED(f \cdot g) = \mathbb{R}_+$

* $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{4x}} = \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow ED = \mathbb{R}_+^*$

d) $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = \ln(1-x)$

* $(f+g)(x) = \ln(x) + \ln(1-x) = \ln(x(1-x)) = \ln(\underbrace{x - x^2}_{x(1-x)})$

$\Rightarrow ED(f+g) =]0;1[$

$-\ \ 0\ \ +\ \ 1\ \ -$

* $(f-g)(x) = \ln(x) - \ln(1-x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$

$\frac{x}{1-x} > 0$ et $x \neq 1$

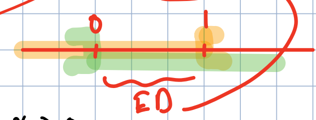
$\Rightarrow ED(f-g) =]0;1[$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{x}{1-x}$		$-$		$+$		$-$	

$\underbrace{}_{ED(f-g)}$

* $(f\cdot g)(x) = \ln(x)\cdot\ln(1-x) \Rightarrow ED(f\cdot g) =]0;1[$

$x > 0$ $\quad$ $1-x > 0$, $x < 1$



* $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(1-x)} \Rightarrow$ conditions $\begin{cases} x > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases} \Rightarrow ED\left(\frac{f}{g}\right) =]0;1[$

2.2.7 Soit f, g et h trois fonctions définies par $f(x) = 2x$, $g(x) = 2x - 1$ et $h(x) = x^2$.
Calculer :

a) $(f \circ g)(x)$ $\qquad$ b) $(h \circ f)(x)$ $\qquad$ c) $(g \circ h \circ f)(x)$

$\boxed{\text{Rappel : } (g \circ f)(x) = g(f(x))}$

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x-1) = 2(2x-1) = 4x - 2$

b) $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(2x) = (2x)^2 = 4x^2$

c) $(g \circ h \circ f)(x) = g[h(2x)] = g(4x^2) = 2(4x^2) - 1 = 8x^2 - 1$

2.2.8 Dans chacun des cas suivants, donner $(f \circ g)(x)$, $D_{f \circ g}$, $(g \circ f)(x)$, $D_{g \circ f}$.

a) $f(x) = x^2 - 3x$ et $g(x) = \sqrt{x+2}$ b) $f(x) = \dfrac{x}{3x+2}$ et $g(x) = \dfrac{2}{x}$

a) $f(x) = x^2 - 3x$ et $g(x) = \sqrt{x+2}$

$\Rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x+2}) = (\sqrt{x+2})^2 - 3(\sqrt{x+2}) = x+2-3\underbrace{\sqrt{x+2}}_{x+2 \geq 0}$

$\Rightarrow ED(f \circ g) = [-2 ; +\infty[$

-2

$ED(f \circ g)$

$\Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2-3x) = \sqrt{x^2-3x+2}$

condition : $x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) \geq 0$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$(x-1)(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Rightarrow ED(g \circ f) =]-\infty ; 1] \cup [2 ; +\infty[$

b) $f(x) = \dfrac{x}{3x+2}$ et $g(x) = \dfrac{2}{x}$

$\Rightarrow (f \circ g)(x) = f\left(\dfrac{2}{x}\right) = \dfrac{\frac{2}{x}}{3 \cdot \frac{2}{x} + 2} = \dfrac{1}{\underbrace{3+x}_{3+x \neq 0}}$ $x \neq 0$

$\Rightarrow ED(f \circ g) = \mathbb{R}^* \setminus \{-3\}$

$\Rightarrow (g \circ f)(x) = g\left(\dfrac{x}{3x+2}\right) = \dfrac{6x+4}{x}$

$\Rightarrow ED(g \circ f) = \mathbb{R}^* \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

2.2.11 Tracer dans le même système d'axes les graphes des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x \ , \ f_2(x) = x^2 \ , \ f_3(x) = x^3 \ , \ f_4(x) = x^4 \ , \ f_5(x) = x^5$$

Rappel : fonction puissance n-ème

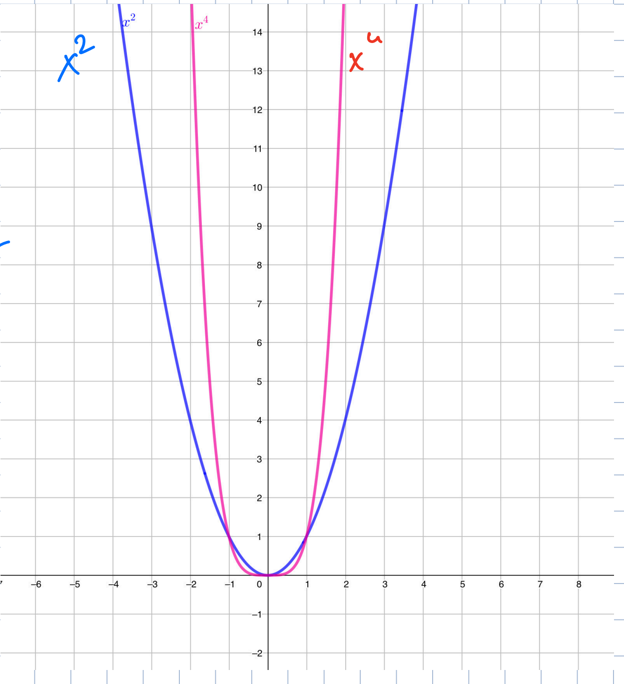
$$\boxed{f(x) = x^n}$$

a) si n est pair

alors :

1) Symétrie : $(-x)^n = x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$

fct est paire → symétrie par rapport à l'axe des y.



2) Forme :

plus n est petit, plus la courbe représentant de la fct f "s'éloigne" rapidement de l'axe Oy quand x augmente ($x > 0$) ou diminue ($x < 0$), qu'elle passe par les points $(0;0)$ (0 est le zéro de f) et $(1;1)$, et qu'elle est toujours au-dessus de l'axe des abscisses ($f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$).

b) <u>Si n est impair</u> :

1) <u>Symétrie</u> :

La représentation graphique de la fct $f(x) = x^n$ admet une symétrie centrale de centre O car $(-x)^n = -x^n$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Cette fct est donc une fonction impaire (car $f(-x) = -f(x)$).

2) <u>Forme</u> :

On peut remarquer que, plus l'exposant est petit, plus la courbe représentant la fct f "s'éloigne" rapidement l'axe Oy quand x augmente ($x > 0$) ou diminue ($x < 0$), qu'elle passe par les points $(0;0)$ (0 est le zéro de f) et $(1;1)$, et qu'elle est au-dessus de l'axe des abscisses pour $x > 0$ ($f(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$) et au-dessous pour $x < 0$ ($f(x) < 0$ $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$).

2.2.19 Déterminer si les fonctions suivantes sont paires, impaires ou ni l'un ni l'autre :

a) $f(x) = 9x^4 - 3x^2 + 2$

b) $f(x) = x^3 - 2x$

c) $f(x) = 5$

d) $f(x) = x^2 + 8x + 2$

e) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2}{2x}$

f) $f(x) = \dfrac{x^5 - x}{x^2 + 1}$

g) $f(x) = \dfrac{x}{x+2} + \dfrac{x}{x-2}$

h) $f(x) = x^6 + 3x^2 - \frac{1}{x}$

i) $f(x) = \sqrt{x}$

j) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

k) $f(x) = |x^3 - 3x| + 1$

l) $f(x) = \dfrac{x}{|x| - 1}$

m) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$

n) $f(x) = \sin^2(x) \cdot \cos(x)$

a) $f(x) = 9x^4 - 3x^2 + 2 \Rightarrow f(-x) = 9(-x)^4 - 3(-x)^2 + 2$

$f(-x) = 9x^4 - 3x^2 + 2 = f(x)$

$\Rightarrow$ $f(x)$ est paire

b) $f(x) = x^3 - 2x \Rightarrow f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x)$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ $f(x)$ est impaire

c) $f(x) = 5 \Rightarrow f(-x) = 5 = f(x) \Rightarrow$ $f(x)$ est paire

d) $f(x) = x^2 + 8x + 2 \Rightarrow f(-x) = (-x)^2 + 8(-x) + 2 = x^2 - 8x + 2$

$\Rightarrow f(-x) \neq f(x) \Rightarrow$ $f(x)$ est ni paire, ni impaire

e) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2}{2x} \Rightarrow f(-x) = \dfrac{3(-x)^2 - 2}{2(-x)} = \dfrac{3x^2 - 2}{-2x} = -\dfrac{3x^2 - 2}{2x}$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ $f(x)$ est impaire

f) $f(x) = \dfrac{x^5 - x}{x^2 + 1} \Rightarrow f(-x) = \dfrac{(-x)^5 - (-x)}{(-x)^2 + 1} = \dfrac{-x^5 + x}{x^2 + 1} = -\dfrac{x^5 - x}{x^2 + 1}$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ $f(x)$ est impaire

g) $f(x) = \frac{x}{x+2} + \frac{x}{x-2} \Rightarrow f(-x) = \frac{-x}{-x+2} + \frac{-x}{-x-2}$

$\Rightarrow f(-x) = \frac{-x}{-(x-2)} + \frac{-x}{-(x+2)} = \frac{x}{x-2} + \frac{x}{x+2} = \frac{x}{x+2} + \frac{x}{x-2}$

$\Rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow$ $f(x)$ est paire

h) $f(x) = x^6 + 3x^2 - \frac{1}{x} \Rightarrow f(-x) = (-x)^6 + 3(-x)^2 - \frac{1}{-x}$

$\Rightarrow f(-x) = x^6 + 3x^2 + \frac{1}{x} \neq f(x) \Rightarrow$ $f(x)$ n'est ni paire, ni impaire

i) $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(-x) = \sqrt{-x}$ n'est pas définie sur le même domaine

$\Rightarrow$ $f(x)$ n'est ni paire, ni impaire

j) $f(x) = \sqrt{9-x^2} \Rightarrow f(-x) = \sqrt{9-(x)^2} = \sqrt{9-x^2}$

$\Rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow$ $f(x)$ est paire

Rf k) $f(x) = |x^3 - 3x| + 1 \Rightarrow f(-x) = |(-x)^3 - 3(-x)| + 1 = |-x^3 + 3x| + 1$

$\Rightarrow f(-x) = |-(x^3 - 3x)| + 1 = |x^3 - 3x| + 1$

$\Rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow$ $f(x)$ est paire

Rf l) $f(x) = \frac{x}{|x|-1} \Rightarrow f(-x) = \frac{-x}{|-x|-1} = \frac{-x}{|x|-1} = -\frac{x}{|x|-1}$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ $f(x)$ est impaire

Rf m) $f(x) = \sin(x) + \cos(x) \Rightarrow f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin(x) + \cos(x)$

$\Rightarrow f(-x) \neq f(x) \Rightarrow f(x)$ n'est ni paire, ni impaire

Rf n) $f(x) = \sin^2(x) \cdot \cos(x) \Rightarrow f(-x) = \sin^2(-x) \cdot \cos(-x) = (-\sin(x))^2 \cdot \cos(x)$

$\Rightarrow f(-x) = \sin^2(x)\cos(x) = f(x) \Rightarrow$ $f(x)$ est paire

2.3.1 Déterminer les applications injectives, surjectives ou bijectives.

a) $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 2x+1 \end{array}$ d) $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$ g) $f_7 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

b) $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ e) $f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x \end{array}$ h) $f_8 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

c) $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x-3 \end{array}$ f) $f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x+2 \end{array}$ i) $f_9 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+1 \end{array}$

j) $f_{10} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$ l) $f_{12} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ n) $f_{14} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$

k) $f_{11} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3-x^2 \end{array}$ m) $f_{13} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ o) $f_{15} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \log(x) \end{array}$

a) $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 2x+1 \end{array}$

f_1 est injective. En effet, soit x_1 et $x_2 \in \mathbb{Z}$ tq $f_1(x_1) = f_1(x_2)$

$$\Rightarrow 2x_1+1 = 2x_2+1 \quad | -1$$
$$2x_1 = 2x_2 \quad | \div 2$$
$$x_1 = x_2$$

donc $f_1(x_1) = f_1(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

f_1 n'est pas surjective. En effet, si $a \in \mathbb{Z}$ est tel que $f(a) = 0$

alors $2a+1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

(* on peut démontrer que 2 n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{Z}$: $2x+1 = 2$
$\Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$)

b) $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

f_2 n'est pas injective. En effet, soit x_1 et $x_2 \in \mathbb{Z}$ tq $f_2(x_1) = f_2(x_2)$

$\Rightarrow \quad x_1^2 = x_2^2 \iff x_1^2 - x_2^2 = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$

$\Rightarrow$ sauf s'ils sont nuls, 2 nombres opposés ne sont pas égaux !

$\Rightarrow$ f n'est pas injective.

(ou $f_2(1) = f_2(-1) = 1 \to$ pas injective)

f_2 n'est pas surjective : $\forall y \in \mathbb{Z}$, $\nexists x \in \mathbb{Z}$

en effet, les nombres négatifs n'ont pas d'antécédent dans $\mathbb{Z}$

c) $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x-3 \end{array}$

f_3 est injective. En effet, soit x_1 et $x_2 \in \mathbb{Z}$ tq $f_3(x_1) = f_3(x_2)$

$\Rightarrow \quad x_1 - 3 = x_2 - 3 \Rightarrow x_1 = x_2$

donc $f_3(x_1) = f_3(x_2) \iff x_1 = x_2$

f_3 est surjective. En effet $\forall y \in \mathbb{Z}$, $\exists x \in \mathbb{Z}$ tq $f(x) = y$

$y = 2 \in \mathbb{Z} \to x - 3 = 2 \Rightarrow x = 5 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ f_3 est bijective.

2.3.2 Définir l'application réciproque des bijections.

a) $f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$

b) $f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x \end{array}$

c) $f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+3 \end{array}$

d) $f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$

e) $f_5 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$

f) $f_6 : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x-3 \end{array}$

g) $f_7 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}-\{1\} & \to & \mathbb{R}-\{2\} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x+1}{x-1} \end{array}$

h) $f_8 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}-\{1\} & \to & \mathbb{R}-\{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array}$

a) $f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array} \Rightarrow \boxed{f_1^r : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathbb{R} \end{array}}$

b) $f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x \end{array}$

La fonction réciproque s'obtient en résolvant l'équation :

$$f(x) = 3x = y \Rightarrow x = \frac{y}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_2^r : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \frac{y}{3} \end{array} \quad \text{ou} \quad f_2^r : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{3} \end{array}}$$

c) $f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+3 \end{array}$

$$\Rightarrow 2x+3 = y \Rightarrow 2x = y-3 \Rightarrow x = \frac{y}{2} - \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_3^r : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x-3}{2} \end{array}}$$

d) $f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \Rightarrow \frac{1}{x} = y \Rightarrow x = \frac{1}{y}$

$$\Rightarrow \boxed{f_4^r : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}}$$

e) $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^3$

$\Rightarrow x^3 = y \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} f_5^r : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto \sqrt[3]{x} \end{array}}$$

f) $f_6 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$x \mapsto x-3$

$\Rightarrow x-3 = y \Rightarrow x = y+3$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} f_6^r : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ \quad x \mapsto x+3 \end{array}}$$

g) $f_7 : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}\setminus\{2\}$

$x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$

$\Rightarrow \frac{2x+1}{x-1} = y \Rightarrow 2x+1 = y(x-1) = yx - y$

$\Rightarrow 2x - yx = -y-1 \Rightarrow x(2-y) = -y-1$

$\Rightarrow x = \frac{-y-1}{2-y} = \frac{-(y+1)}{-(y-2)} = \frac{y+1}{y-2}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} f_7^r : \mathbb{R}\setminus\{2\} \to \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ \quad x \mapsto \frac{x+1}{x-2} \end{array}}$$

h) $f_8 : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$x \mapsto \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow x = \frac{y+1}{y-1}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} f_8^r : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ \quad x \mapsto \frac{x+1}{x-1} \end{array}}$$

2.3.3 Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée pour que les fonctions suivantes soient des bijections. Puis donner leur réciproque.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^2 + x - 6$

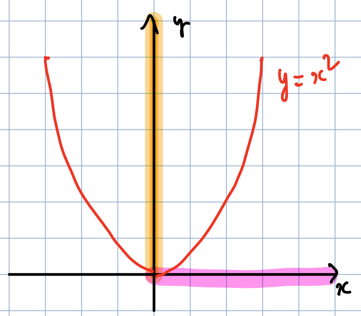
c) $f(x) = -\,x^2 + 4\,x$

d) $f(x) = \cos(x)$

e) $f(x) = \tan(x)$

f) $f(x) = \sin(2\,x)$

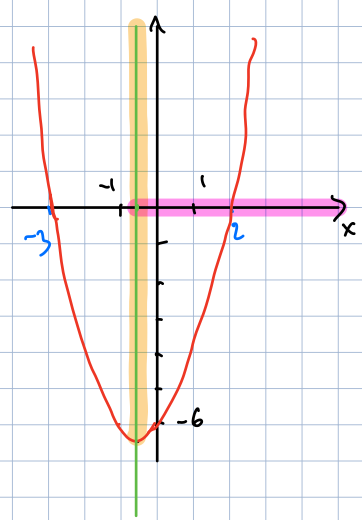
a) $f(x) = x^2$



$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$$
$$x \mapsto x^2$$

$$\Rightarrow f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$$
$$\boxed{x \mapsto \sqrt{x}}$$

b) $f(x) = x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$



Sommet : $S\left(-\frac{b}{2a} \,;\, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) = \left(-\frac{1}{2} \,;\, -6{,}25\right)$

$$f : \left[-\frac{1}{2} \,;\, +\infty\right[\to \left[-\frac{25}{4} \,;\, +\infty\right[$$

$\Rightarrow$ chercher sa réciproque :

$$y = x^2 + x - 6 \qquad \Big| +6 + \frac{1}{4}$$
$$y + 6 + \frac{1}{4} = x^2 + x + \frac{1}{4}$$
$$y + \frac{25}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

$\Rightarrow$ condition : $y + \frac{25}{4} \geq 0 \Rightarrow y \geq -\frac{25}{4}$

$$\Rightarrow \sqrt{y + \frac{25}{4}} = x + \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{y + \frac{25}{4}} - \frac{1}{2}$$

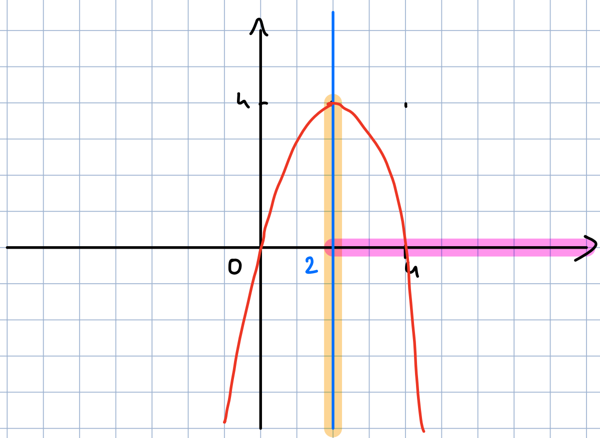
D'où $f^{-1} : \left[-\frac{25}{4} \,;\, +\infty\right[\longrightarrow \left[-\frac{1}{2} \,;\, +\infty\right[$

$$x \mapsto \boxed{\sqrt{x + \frac{25}{4}} - \frac{1}{2}}$$

c) $f(x) = -x^2 + 4x$

Sommet $S\left(-\frac{b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) = \left(\frac{-4}{-2} ; -4+8\right) = (2 ; 4)$

$f : [2 ; +\infty[\to]-\infty ; 4]$



* Sa réciproque :

$y = -x^2 + 4x$

$\Rightarrow x^2 - 4x + y = 0$

$\Delta = 16 - 4y = 4(4-y)$

$\Rightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{4-y}}{2} = 2 \pm \sqrt{4-y}$

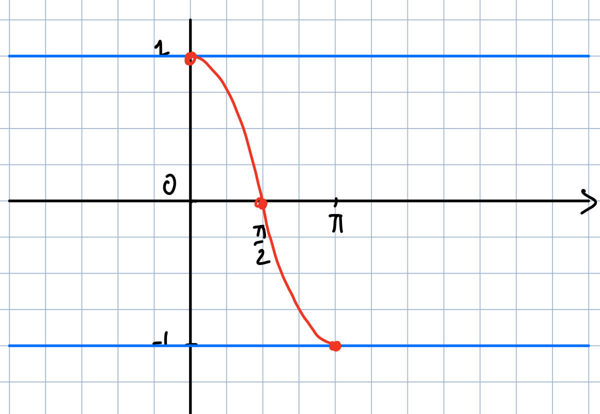
D'où $f^{-1} :]-\infty ; +4] \to [2 ; +\infty[$

$x \mapsto \boxed{2 + \sqrt{4-x}}$

d) $f(x) = \cos(x)$

$f : [0 ; \pi[\to [-1 ; 1]$

$x \mapsto \cos(x)$



$f^{-1} : [-1 ; 1] \to [0 ; \pi[$

$x \mapsto \arccos(x)$

e) $f(x) = \tan(x)$

$$f : \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \tan(x)$$

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$$
$$x \mapsto \arctan(x)$$

f) $f(x) = \sin(2x)$

$$f : \left[-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right] \to [-1 ; 1]$$
$$x \mapsto \sin(2x)$$

$$f^{-1} : [-1 ; 1] \to \left[-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right]$$
$$x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{2}$$