Exercices supplémentaires
Exponentielles - Logarithmes

Problème 1

Résoudre les équations ci-dessous :

a) $3^x = 18$

b) $5^{3x} = 63$

c) $8 \cdot 2^x = 4^{3x+5}$

d) $29^{\frac{1}{2}x} = 76$

e) $29^{\frac{3}{5}x} = 73$

f) $e^{x+1} = 2$

g) $e^{x^2} = \dfrac{1}{2}$

h) $4^{2x} = 3^{x-1}$

i) $3^{x+1} = \left(\dfrac{1}{27}\right)^{x-2}$

j) $2^{x+1} \cdot 3^x = 5$

Problème 2

Résoudre les équations suivantes :

a) $\log(x) + \log(5) = 1$

b) $\log(9x) + \log(x) = 4$

c) $\log_8(x+1) - \log_8(x) = \log_8(4)$

d) $\log_6(x-3) + \log_6(x+2) = 1$

e) $\log_3(2x-5) - \log_3(x^2+4x+4) = -2$

f) $\log_2(2) + \log_2(x+2) - \log_2(3x-5) = 3$

g) $\log_5(4) + \log_5(2x-3) = 20$

h) $\ln(x+1) + \ln(x-1) = 1$

i) $\ln(x+1) = -1$

j) $\log(4x-1) - 2\log(x) = \log(3)$

Problème 1

j) $2^{x+1} \cdot 3^{x} = 5$

$\Leftrightarrow \ln\left(2^{x+1} \cdot 3^{x}\right) = \ln(5)$

$\Leftrightarrow \ln\left(2^{x+1}\right) + \ln\left(3^{x}\right) = \ln(5)$

$\Leftrightarrow (x+1)\ln(2) + x\ln(3) = \ln(5)$

$\Leftrightarrow x\ln(2) + \ln(2) + x\ln(3) = \ln(5)$

$\Leftrightarrow x\left(\ln(2) + \ln(3)\right) = \ln(5) - \ln(2)$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(5) - \ln(2)}{\ln(2) + \ln(3)} = \dfrac{\ln\left(\frac{5}{2}\right)}{\ln(2 \cdot 3)}$

$\Rightarrow x = \dfrac{\ln\left(\frac{5}{2}\right)}{\ln(6)}$

$\Rightarrow x = \log_{6}\left(\frac{5}{2}\right)$

Problème 2

a) $\log(x) + \log(5) = 1$

$\Leftrightarrow \log(5x) = \log(10) \Leftrightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2$

* Vérification :

$\log(2) + \log(5) = \log(2\cdot 5) = \log(10) = 1 = 1$ ✓ ok

$\Rightarrow \boxed{S = \{2\}}$

b) $\log(9x) + \log(x) = 4$

$\Leftrightarrow \log(9x\cdot x) = \log(10^4) \Leftrightarrow 9x^2 = 10^4$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{10^4}{9} \Rightarrow x = \pm \frac{100}{3}$

$x = -\frac{100}{3} < 0$ à éliminer $\Rightarrow \boxed{S = \left\{\frac{100}{3}\right\}}$

c) $\log_8(x+1) - \log_8(x) = \log_8(4)$

$\Leftrightarrow \log_8\left(\frac{x+1}{x}\right) = \log_8(4) \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} = 4$; $x \neq 0$

$\Rightarrow x + 1 = 4x \Leftrightarrow 4x - x = 1 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

* Vérification :

$\log_8\left(\frac{1}{3} + 1\right) - \log_8\left(\frac{1}{3}\right) = \log_8\left(\frac{4}{3}\right) - \log_8\left(\frac{1}{3}\right)$

$= \log_8\left(\frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}}\right) = \log_8\left(\left(\frac{4}{\cancel{3}}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{3}}{1}\right)\right) = \log_8(4) = \log_8(4)$ ✓ ok

$\Rightarrow \boxed{S = \left\{\frac{1}{3}\right\}}$

d) $\log_6(x-3) + \log_6(x+2) = 1$

$\Leftrightarrow \log_6\left((x-3)(x+2)\right) = \log_6(6) \Leftrightarrow (x-3)(x+2) = 6$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3x - 6 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-4) = 0$

$\Rightarrow x_1 = -3 \quad , \quad x_2 = 4$

* vérification :

i) $x_1 = -3$

$\Rightarrow \log_6(-3-3) + \log_6(-3+2) = \log_6(\underset{<0}{-6}) + \log_6(\underset{<0}{-1})$

$\Rightarrow x_1 = -3$ à éliminer

ii) $x_2 = 4$

$\Rightarrow \log_6(4-3) + \log_6(4+2) = \underbrace{\log_6(1)}_{=0} + \log_6(6) = 1 = 1$ OK ✓

$\Rightarrow \boxed{S = \{4\}}$

e) $\log_3(2x-5) - \log_3(x^2+4x+4) = -2$

$\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{2x-5}{x^2+4x+4}\right) = \log_3(3)^{-2}$

$\Leftrightarrow \frac{2x-5}{x^2+4x+4} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$\Leftrightarrow \frac{2x-5}{(x+2)^2} = \frac{1}{9}$; $x \neq -2$

$\Leftrightarrow 9(2x-5) = x^2+4x+4 \Leftrightarrow 18x - 45 = x^2+4x+4$

$\Leftrightarrow x^2 - 18x + 4x + 4 + 45 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 14x + 49 = 0 \Leftrightarrow (x-7)^2 = 0$

$\Rightarrow x = 7$

* vérification :

$\log_3(2\cdot 7-5) - \log_3(7^2+4\cdot 7+4) = \log_3(9) - \log_3(81)$

$= \log_3\left(\frac{9}{81}\right) = \log_3\left(\frac{1}{9}\right) = \log_3(3^{-2}) = -2$ ✓ ok

$\Rightarrow \boxed{S = \{7\}}$

f) $\underbrace{\log_2(2)}_{1} + \log_2(x+2) - \log_2(3x-5) = 3$

$1 + \log_2(x+2) - \log_2(3x-5) = 3$

$\Rightarrow \log_2\left(\frac{x+2}{3x-5}\right) = 2 \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{x+2}{3x-5}\right) = \log_2(2^2)$

$\Leftrightarrow \frac{x+2}{3x-5} = 2^2 = 4 \Leftrightarrow x+2 = 4(3x-5)$

$x \neq \frac{5}{3}$

$\Leftrightarrow x+2 = 12x - 20 \Rightarrow 11x = 22 \Rightarrow x = 2$

* <u>vérification</u> :

$\log_2(2) + \log_2(2+2) - \log_2(3\cdot 2-5) = 1 + \log_2(4) - \log_2(1)$

$= 1 + \log_2(2)^2 - 0 = 1 + 2 = 3$ ✓ OK

$\Rightarrow \boxed{S = \{2\}}$

g) $\log_5(4) + \log_5(2x-3) = 20$

<u>condition</u> : $2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{ED = \left]\frac{3}{2} ; +\infty\right[}$

$\Leftrightarrow \log_5\left(4 \cdot (2x-3)\right) = \log_5\left(5^{20}\right)$

$\Leftrightarrow 4(2x-3) = 5^{20} \Leftrightarrow 8x - 12 = 5^{20}$

$\Rightarrow 8x = 5^{20} + 12 \Rightarrow x = \frac{5^{20}+12}{8} \in ED$

$\Rightarrow \boxed{S = \left\{ \frac{5^{20} + 12}{8} \right\}}$

h) $\ln(x+1) + \ln(x-1) = 1 \quad (*)$

Cette équation est définie pour $x > -1$ et $x > 1$

$\Rightarrow ED = \left]1 ; +\infty\right[$

$(*) \Leftrightarrow \ln\left[(x+1)(x-1)\right] = 1 \Leftrightarrow \ln(x^2-1) = 1$

$\Leftrightarrow e^1 = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 = e + 1$

$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{e+1}$ à éliminer car $\notin ED$

$x_2 = \sqrt{e+1} \in ED$

$\Rightarrow \boxed{S = \left\{ \sqrt{e+1} \right\}}$

i) $\ln(x+1) = -1 \quad (*)$

Cette équation est définie pour $x > -1 \Rightarrow ED =]-1\,;+\infty[$

$(*) \Leftrightarrow x + 1 = e^{-1}$

$\Rightarrow x = e^{-1} - 1 = -1 + e^{-1} = -1 + \frac{1}{e}$

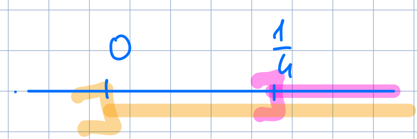
$\Rightarrow x = \frac{1-e}{e} \in ED$

$\Rightarrow \boxed{S = \left\{ \frac{1-e}{e} \right\}}$

j) $\log(4x-1) - 2\log(x) = \log(3)$

$\Leftrightarrow \log(4x-1) - \log(x)^2 = \log(3)$

condition : $4x - 1 > 0$ et $x^2 > 0$



$\Rightarrow ED =]\frac{1}{4}\,;+\infty[$

$\Leftrightarrow \log\left(\frac{4x-1}{x^2}\right) = \log(3) \Leftrightarrow \frac{4x-1}{x^2} = 3$

$\Leftrightarrow 4x - 1 = 3x^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$

$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{3} \,,\; x_2 = 1 \Rightarrow x_1, x_2 \in ED$

$\Rightarrow \boxed{S = \left\{ \frac{1}{3}\,;\,1 \right\}}$