

Chapitre 6

Intérêts composés

Intérêts composés

Introduction

On place 10'000 francs sur un compte rapportant 1% d'intérêts par année. Étudions l'évolution du capital sur le compte si on ne touche pas à l'argent qui s'y trouve :

Nombre d'années	Capital sur le compte	
$n = 0$	10'000.-	C_0
$n = 1$	Intérêts: $10'000 \cdot 1\% = 100.-$ Capital: $C_1 = 10'000 + 100 = 10'100$ ou $C_1 = 10'000 \cdot 1,01$	$C_0 \cdot 1,01$
$n = 2$	Capital: $C_2 = 10'100 \cdot 1,01$ $= 10'000 \cdot 1,01 \cdot 1,01 = 10'000 \cdot 1,01^2$ $= 10'201.-$	$C_0 \cdot 1,01^2$
$n = 3$	Capital: $C_3 = 10'201 \cdot 1,01$ $= 10'000 \cdot 1,01^3 = 10'303.-$	$C_0 \cdot 1,01^3$
n	$C_n = 10'000 \cdot 1,01^n$	$C_0 \cdot 1,01^n$

Le capital sur le compte peut donc être décrit par la fonction suivante :

$$C_n = 10'000 \cdot 1,01^n$$

taux $t = 1$ (%)
 $i = \frac{t}{100} = 0,01$
 $1+i = 1,01$

La formule générale pour obtenir le capital sur un compte à intérêts composés est :

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$$

- n : nombre d'années écoulées
- C_n : capital après n années
- C_0 : capital initial (au temps $n=0$)
- i : $i = \frac{t}{100}$ où $t = \text{taux (en \%)}$

Exemple 1

On place un capital de 2'500 francs à 2,25% d'intérêts annuels. $C_0 = 2'500$ $t = 2,25 \Rightarrow i = 0,0225 \Rightarrow 1+i = 1,0225$

- a) Déterminer une fonction C_n modélisant le capital sur le compte après n années :

$$\underline{\underline{C_n = 2'500 \cdot 1,0225^n}}$$

- b) Quel capital y a-t-il sur le compte après 20 ans ?

$$C_{20} = 2'500 \cdot 1,0225^{20} \approx \underline{\underline{3'901,27 \text{ Francs}}}$$

- c) Après combien d'années entières, le capital aura-t-il dépassé 7'000 francs ?

$$2'500 \cdot 1,0225^n = 7'000 \quad | : 2'500$$

$$1,0225^n = 2,8 \quad | \log_{1,0225} ()$$

$$n = \log_{1,0225} (2,8)$$

$$n = \frac{\log(2,8)}{\log(1,0225)} \approx 46,27 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Après 47 ans}}}$$

Exemple 2

$$\rightarrow i = 0,0075$$

On place un certain montant sur un compte à 0,75% d'intérêts annuels le premier janvier 2010. Le premier janvier 2018, le capital du compte s'élève à 47'771,90 francs. Déterminer le montant initial :

$$\begin{array}{l} \Downarrow \\ n=8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{"} \\ C_8 \end{array}$$

$$C_n = C_0 \cdot 1,0075^n$$

$$47'771,90 = C_0 \cdot 1,0075^8$$

$$47'771,90 \approx C_0 \cdot 1,0616$$

$$\Rightarrow C_0 \approx \frac{47'771,90}{1,0616} \approx 44'999,95$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{C_0 \approx 45'000.-}}$$

Exemple 3

A quel taux faut-il placer 30'000 francs pour obtenir 62'813 francs 25 ans plus tard ?

$$\begin{array}{l} \text{"} \\ C_0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{"} \\ C_{25} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{"} \\ n \end{array}$$

$$C_{25} = C_0 \cdot (1+i)^{25}$$

$$62'813 = 30'000 \cdot (1+i)^{25} \quad (C_0 = 30'000)$$

$$(1+i)^{25} \approx 2,09377$$

$$| \sqrt[25]{\quad}$$

$$1+i \approx 1,02999$$

$$| - 1$$

$$i \approx 0,02999$$

$$| \cdot 100$$

$$\underline{\underline{t \approx 3\%}}$$

Taux nominal, taux périodique, taux réel

Exemple 1

Vous voulez placer un montant de 2'000 francs et vous avez consulté trois banques.

La première banque B_1 offre un taux annuel de 9%, capitalisé annuellement.

La seconde banque B_2 offre un taux nominal de 9% capitalisé trimestriellement.

La troisième banque B_3 offre un taux nominal de 9%, capitalisé mensuellement.

Quelle institution offre les meilleures conditions ?

$$\textcircled{B_1} \quad 2'000 \cdot 1,09 = \underline{\underline{2'180.-}}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{B_2} \quad 9\% \text{ annuel} &\Rightarrow \frac{9\%}{4} = 2,25\% \text{ par trimestre} \\ &\Rightarrow i = 0,0225 \\ \Rightarrow 2'000 \cdot (1 + 0,0225)^4 \\ &= 2'000 \cdot 1,0225^4 \cong \underline{\underline{2'186,17 \text{ Francs}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{B_3} \quad 9\% \text{ annuel} &\Rightarrow \frac{9\%}{12} = 0,75\% \text{ par mois} \\ &\Downarrow \\ &i = 0,0075 \\ &1+i = 1,0075 \\ \Rightarrow 2'000 \cdot 1,0075^{12} &\cong \underline{\underline{2'187,61 \text{ Francs}}} \end{aligned}$$

C'est donc la banque $\textcircled{B_3}$ qui est la plus intéressante.

Définitions :**Taux nominal, taux périodique, taux réel et taux équivalents**

On appelle **taux nominal** que l'on note $(j; m)$ un taux annuel j qui est composé m fois par année au taux périodique $i = j/m$.

Exemple : $(3\%; 12)$ signifie un taux annuel de 3%,
capitalisé mensuellement (12 mois)

On appelle **taux périodique** le taux $i = j/m$ qui s'applique à chaque période de capitalisation.

Exemple : $(3\%; 12)$ signifie que $i = \frac{3}{12} = 0,25\%$

On appelle **taux réel** ou **taux effectif** le taux r réellement payé annuellement.

On l'obtient en ramenant le taux périodique à un taux annuel.

Exemple : $(3\%; 12)$ correspond à un taux réel de :

$$i = \frac{3}{12} = 0,25\% = 0,0025 \Rightarrow 1+i = 1,0025$$

$$\Rightarrow 1,0025^{12} = (1+i)^{12}$$

$$\Rightarrow r = 1,0025^{12} - 1 \approx \underline{\underline{3,0416\%}}$$

Deux taux sont **équivalents** s'ils correspondent au même taux réel.

Exemple : $(3\%; 12)$ est équivalent à $(???\%; 2)$

$$(1+i)^{12} = 1,0025^{12}$$

$$(1+i)^2 \approx 1,0304 \quad \sqrt{\quad}$$

$$1+i \approx 1,01509 \quad -1$$

$$i \approx 0,01509$$

$$\Rightarrow j = 2 \cdot i \approx 0,030188 \approx 3,0188\%$$

$$\Rightarrow (3\%; 12) \sim \underline{\underline{(3,0188\%; 2)}} \sim (3,0416\%; 1)$$

Ainsi, dans l'exemple 1 d'introduction :

La banque B_1 propose un taux périodique annuel de 9% qui est le taux réel.

La banque B_2 propose un taux nominal de (9%, 4) :

$$\text{Taux périodique} = \text{taux trimestriel} = \frac{9\%}{4} = 2,25\%$$

$$(1 + 0,0225)^4 = (1 + r)^1 \Rightarrow r = 1,0225^4 - 1$$

↑
taux annuel

$$\text{équivalent} \quad r \approx 0,093083$$

$$\Rightarrow \text{taux effectif} \approx \underline{\underline{9,3083\%}}$$

La banque B_3 propose un taux nominal de (9%, 12) :

$$\text{Taux périodique} = \text{taux mensuel} = \frac{9\%}{12} = 0,75\%$$

$$(1 + 0,0075)^{12} = (1 + r)^1 \Rightarrow r = 1,0075^{12} - 1$$

$$r \approx \underline{\underline{9,3807\%}}$$

Le meilleur placement est donc chez la banque : B_3 qui a le meilleur taux réel.

Exemple 2

On place un capital de 50'000 francs à un taux nominal de 2%.

Quel montant aura-t-on sur le compte après 10 ans de capitalisation trimestrielle ?

$$\Rightarrow (2\% ; 4) \Rightarrow i = \text{taux périodique} = \frac{2\%}{4} = 0,5\%$$

$$= 0,005 \Rightarrow 1 + i = 1,005$$

$$\Rightarrow C_{10} = 50'000 \cdot (1,005^4)^{10 \text{ ans}}$$

$$= 50'000 \cdot 1,005^{40}$$

$$\approx \underline{\underline{61'039,71 \text{ francs}}}$$

Exemple 3

À quel taux nominal, capitalisé semestriellement a-t-on placé 10'000 francs si l'on obtient un capital de 11'956,18 francs après 6 ans ?

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} \text{''} \\ C_6 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{''} \\ C_0 \end{matrix} \\ & \Rightarrow 11'956,18 = 10'000 \cdot (1+i)^{12} \\ & \quad \quad \quad \uparrow \\ & \quad \quad \quad \text{taux périodique semestriel} \\ & 1,195618 = (1+i)^{12} \quad \sqrt[12]{} \\ & 1+i \cong 1,014999 \quad | - 1 \\ & i \cong 0,014999 \\ & \Rightarrow i \cong 1,5\% \quad i = j/m \\ & \Rightarrow j = 1,5 \cdot 2 = \underline{\underline{3\%}} \quad i = j/2 \\ & \quad \quad \quad \leftarrow j = 2 \cdot i \end{aligned}$$

Exemple 4

Calculer le taux trimestriel équivalent au taux mensuel de 0,5%.

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} \downarrow \\ 4 \text{ fois} \end{matrix} & \begin{matrix} \downarrow \\ 12 \text{ fois} \end{matrix} & \Rightarrow i = 0,005 \\ & (1+i)^4 = (1,005)^{12} & & 1+i = 1,005 \\ & (1+i)^4 \cong 1,0616 \quad \sqrt[4]{} \\ & 1+i \cong 1,015075 \quad | - 1 \\ & i \cong 0,015075 \cong \underline{\underline{1,5075\%}} \end{aligned}$$

Exercice 6.1 *Rappel, intérêts simples*

Lorsque la durée d'un placement est courte, en général de moins d'une année, on calcule les intérêts simples I avec

$$I = \frac{C \cdot t \cdot n}{100 \cdot 360}$$

où C est le capital, t le taux en % et n la durée du placement en nombre de jours.

a) On donne $C = 1'800$ francs, $t = 5\%$ et $n = 240$ jours. Calculer I .

$$I = \frac{1'800 \cdot 5 \cdot 240}{100 \cdot 360} = \underline{\underline{60 \text{ Francs}}}$$

b) On donne $C = 257'500$ francs, $t = 1,25\%$ et $I = 1'432,30$ francs. Calculer n .

$$I \cdot 100 \cdot 360 = C \cdot t \cdot n$$

$$n = \frac{I \cdot 100 \cdot 360}{C \cdot t}$$

$$n = \frac{1'432,30 \cdot 100 \cdot 360}{257'500 \cdot 1,25} \approx 160,195$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\approx 160 \text{ jours}}}$$

c) On donne $C = 282,50$ francs, $n = 240$ jours et $I = 6,60$ francs. Calculer t .

$$I \cdot 100 \cdot 360 = C \cdot t \cdot n$$

$$t = \frac{I \cdot 100 \cdot 360}{C \cdot n}$$

$$t = \frac{6,60 \cdot 100 \cdot 360}{282,50 \cdot 240} \approx 3,504 \Rightarrow \underline{\underline{t \approx 3,5\%}}$$

d) On donne $t = 0,5\%$, $n = 200$ jours et $I = 19$ francs. Calculer C .

$$I \cdot 100 \cdot 360 = C \cdot t \cdot n$$

$$C = \frac{I \cdot 100 \cdot 360}{t \cdot n}$$

$$C = \frac{19 \cdot 100 \cdot 360}{0,5 \cdot 200} = \underline{\underline{6'840 \text{ francs}}}$$

Exercice 6.2

$$\rightarrow i = 0,015 \Rightarrow 1+i = 1,015$$

On place 300'000 francs sur un compte à 1,5% d'intérêt annuel le premier janvier 2012.

- a) Déterminer la fonction donnant le capital sur le compte après n années :

$$C_n = 300'000 \cdot 1,015^n$$

+ 8 ans

- b) Calculer le montant qui se trouvera sur le compte le premier janvier 2020 :

$$C_8 = 300'000 \cdot 1,015^8 \approx \underline{\underline{337'947,75 \text{ Francs}}}$$

- c) Au début de quelle année aura-t-on pour la première fois un montant supérieur à 400'000 francs ?

$$300'000 \cdot 1,015^n = 400'000 \quad | : 300'000$$

$$1,015^n = 1,333 \quad | \log_{1,015} ()$$

$$n = \log_{1,015} (1,333) = \frac{\log(1,333)}{\log(1,015)} \approx 19,32 \Rightarrow \text{Dans 20 ans}$$

$$\Rightarrow 2012 + 20 \Rightarrow \underline{\underline{\text{En 2032}}}$$

- d) Le même montant a été placé en même temps sur un autre compte, et on observe que le premier janvier 2020 le compte comporte 312'212,10 francs. Déterminer le taux d'intérêt annuel de ce compte :

$$312'212,10 = 300'000 \cdot (1+i)^8$$

$$(1+i)^8 \approx 1,04 \quad | \sqrt[8]{}$$

$$1+i \approx 1,00499 \quad | -1$$

$$i \approx 0,00499 \quad | \cdot 100$$

$$\underline{\underline{t \approx 0,5\%}}$$

Exercice 6.3

Calculer la valeur actuelle d'un capital qui vaudra 10'730,40 francs dans 7 ans s'il est placé à 5,25% :

$$i = 0,0525$$

$$1+i = 1,0525$$

$$10'730,40 = C_0 \cdot 1,0525^7$$

$$10'730,40 \approx C_0 \cdot 1,43$$

$$\underline{\underline{C_0 \approx 7'500 \text{ Francs}}}$$

Exercice 6.4

A quel taux faut-il placer 20'000 francs pour que ce montant double en 40 ans ?

$$20'000 \cdot (1+i)^{40} = 40'000$$

$$(1+i)^{40} = 2$$

$$1+i \approx 1,0175$$

$$i \approx 0,0175$$

$$t \approx \underline{\underline{1,75\%}}$$

Exercice 6.5

Quelle somme retire-t-on au bout de 20 ans si l'on place 20'000 francs à 1,25% pendant 5 ans, puis à 1,5% pendant 12 ans, et enfin à 1,75% pendant le reste du temps ?

$$C_5 = 20'000 \cdot 1,0125^5 \approx 21'281,64.-$$

$$20 - 5 - 12 = 3$$

$$C_{12} = 21'281,64 \cdot 1,015^{12} \approx 25'444,72.-$$

$$C_3 = 25'444,72 \cdot 1,0175^3 = \underline{\underline{26'804,08 \text{ Francs}}}$$

Variante : $20'000 \cdot 1,0125^5 \cdot 1,015^{12} \cdot 1,0175^3 \approx 26'804,08 \text{ francs}$

Exercice 6.6

Calculer l'intérêt gagné durant la douzième année grâce à un capital initial de 15'000 francs placés à un taux de 3% :

$$C_{11} = 15'000 \cdot 1,03^{11} \approx 20'763,51 \text{ Francs}$$

$$C_{12} = 15'000 \cdot 1,03^{12} \approx 21'386,41 \text{ Francs}$$

Intérêts de la 12^{ème} année :

$$C_{12} - C_{11} \approx \underline{\underline{622,91 \text{ Francs}}}$$

Variante : $15'000 \cdot 1,03^{11} \cdot 0,03 \approx 622,91 \text{ francs}$

Exercice 6.7

On place 70'000 francs sur un compte à 2% en prévoyant de retirer l'argent 10 ans plus tard. Malheureusement, après 5 ans, les conditions du compte changent et le taux d'intérêt est baissé à 1,25%. Combien de temps au total doit-on laisser l'argent sur le compte pour obtenir le montant prévu au départ ?

$$C_{10} = 70'000 \cdot 1,02^{10} \approx 85'329,61 \text{ francs}$$

$$C_5 = 70'000 \cdot 1,02^5 \approx 77'285,66 \text{ francs}$$

$$C_n = 77'285,66 \cdot 1,0125^n \approx 85'329,61$$

$$1,0125^n \approx 1,104$$

$$n = \log_{1,0125}(1,104)$$

$$n = \frac{\log(1,104)}{\log(1,0125)} \approx 7,97 \Rightarrow \text{Encore 8 ans}$$

$$\text{Total : } 5 + 8 = \underline{\underline{13 \text{ ans}}}$$

Exercice 6.8

Un capital de 80'000.- placé à 4,5% a rapporté 15'401,50 francs d'intérêts. Quelle est la durée du placement ?

$$C_n = 80'000 + 15'401,50 = 95'401,50 \text{ francs}$$

$$95'401,50 = 80'000 \cdot 1,045^n$$

$$1,045^n \approx 1,1925$$

$$n \approx \frac{\log(1,1925)}{\log(1,045)} \approx 4 \Rightarrow \underline{\underline{4 \text{ ans}}}$$

Exercice 6.9

Un capital de 20'000 francs a rapporté 9282 francs en 4 ans. Quel est le taux ?

$$C_4 = 20'000 + 9282 = 29'282 \text{ francs}$$

$$29'282 = 20'000 \cdot (1+i)^4$$

$$(1+i)^4 = 1,4641 \quad | \sqrt[4]{\quad}$$

$$1+i = 1,1$$

$$i = 0,1$$

$$\underline{\underline{t = 10\%}}$$

Exercice 6.10

Une personne a gagné 5'000 francs en 10 ans à un taux de 3%. Quel était le capital initial ?

$$C_0 + 5'000 = C_0 \cdot 1,03^{10} \quad | - C_0$$

$$5'000 \cong 1,3439 C_0 - C_0$$

$$5'000 \cong 0,3439 C_0$$

$$\underline{\underline{C_0 \cong 14'538,42 \text{ francs}}}$$

Exercice 6.11

On place 2'900 francs à 4% pendant un certain temps. Pour un an de plus, on retirerait 185,72 francs de plus. Calculer la durée du placement :

$$C_n = 2'900 \cdot 1,04^n$$

$$I_{n+1} = C_n \cdot 0,04 = 185,72$$

$$\Rightarrow 2'900 \cdot 1,04^n \cdot 0,04 = 185,72$$

$$1,04^n \approx 1,601$$

$$n \approx \frac{\log(1,601)}{\log(1,04)} \approx \underline{\underline{12 \text{ ans}}}$$

Exercice 6.12

Une banque propose de tripler le capital placé sur une période de 12 ans.

Le taux dépend-il du capital placé ? Si non, quel est ce taux ?

$$C_{12} = 3C_0 \qquad C_{12} = C_0 \cdot (1+i)^{12}$$

$$\Rightarrow 3C_0 = C_0 \cdot (1+i)^{12} \qquad | : C_0$$

$$3 = (1+i)^{12} \qquad | \sqrt[12]{\quad}$$

$$1+i \approx 1,09587$$

$$i \approx 0,09587$$

$$\underline{\underline{t \approx 9,6\%}}$$

Le taux ne dépend pas de C_0 .

Exercice 6.13

Pierre désire s'acheter une voiture de sport. Il décide de verser chaque premier janvier de chaque année 3'500 francs, ceci pendant 10 ans. Le taux de placement du capital constitué, année après année, est de 3%. Quel montant touche-t-il à la fin des dix ans ?

$$\begin{aligned}
 \text{Total: } & C_{10} + C_9 + C_8 + C_7 + \dots + C_3 + C_2 + C_1 \\
 = & 3'500 \cdot 1,03^{10} + 3'500 \cdot 1,03^9 + \dots + 3'500 \cdot 1,03 \\
 = & 3'500 \cdot (1,03^{10} + 1,03^9 + \dots + 1,03) \\
 \approx & 3'500 \cdot 11,807 \approx 41'327,28 \text{ Francs} \\
 \approx & \underline{\underline{41'327,30 \text{ Francs}}}
 \end{aligned}$$

Remarque : suite géom $u_{n+1} = u_n \cdot r$ $S_n = u_1 + \dots + u_n = u_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow a + a^2 + a^3 + \dots + a^n &= S_n = a \cdot \frac{a^n - 1}{a - 1} \\
 \Rightarrow 1,03 + 1,03^2 + \dots + 1,03^{10} &= S_{10} = 1,03 \cdot \frac{1,03^{10} - 1}{0,03} \approx 11,8077957
 \end{aligned}$$

Exercice 6.14

Partager 10'000 francs entre deux frères âgés de 14 et 16 ans de telle manière que les parts placées à 3% leur donnent un même montant quand ils atteindront leur majorité.

$$\begin{aligned}
 x &= \text{part du frère qui a 14 ans} \rightarrow \text{placement de 4 ans} \\
 10'000 - x &= \text{part du frère qui a 16 ans} \rightarrow \text{placement de 2 ans} \\
 x \cdot 1,03^4 &= (10'000 - x) \cdot 1,03^2 \quad | : 1,03^2 \\
 x \cdot 1,03^2 &= 10'000 - x \\
 1,0609x &= 10'000 - x \quad | + x \\
 1,0609x + 1x &= 10'000 \\
 2,0609x &= 10'000 \\
 x &\approx \underline{\underline{4'852,25 \text{ Francs}}} = \text{part du frère de 14 ans} \\
 \text{et } &\underline{\underline{5'147,75 \text{ Francs}}} = \text{part du frère de 16 ans}
 \end{aligned}$$

Taux nominal, taux périodique, taux réel

Exercice 6.15

Vous voulez placer un montant de 2'000 CHF et vous avez consulté trois banques.

La première banque B_1 offre un taux annuel de 9% capitalisé annuellement.

La seconde banque B_2 offre un taux nominal de 9% capitalisé trimestriellement.

La troisième banque B_3 offre un taux périodique mensuel de 0,75%. $0,75 \cdot 12 = 9\%$

Quelle banque offre les meilleures conditions?

$$B_1 : (9\% ; 1) \quad B_2 : (9\% ; 4) \quad B_3 : (9\% ; 12)$$

\Rightarrow C'est B_3 qui est la plus intéressante!

Details

$$B_2 : (9\% ; 4) \Rightarrow \frac{9\%}{4} = 2,25\% \Rightarrow C_4 = C_0 \cdot 1,0225^4$$

$$C_4 \approx C_0 \cdot 1,09308$$

$$\text{Après 1 an : } C_4 = 2'000 \cdot 1,09308$$

$$C_4 \approx \underline{\underline{2'186,17 \text{ Francs}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{taux réel : } \underline{\underline{\sim 9,31\%}}$$

$$B_3 : 9,75\% \Rightarrow C_{12} = C_0 \cdot 1,0075^{12} \approx C_0 \cdot 1,0938069$$

$$\Rightarrow \text{taux réel : } \underline{\underline{\sim 9,38\%}}$$

$$\text{Après 1 an : } C_{12} = 2'000 \cdot 1,0938069 \approx \underline{\underline{2'187,61 \text{ Francs}}}$$

Exercice 6.16

$$- B_1 : C_1 = 2'000 \cdot 1,09 = \underline{\underline{2'180 \text{ Francs}}}$$

On place un capital de 100'000 francs à un taux nominal de 12%. Quelle somme aura-t-on après 6 ans si la capitalisation est annuelle? semestrielle? trimestrielle?

$$- \text{Capitalisation annuelle : } C_6 = 100'000 \cdot 1,12^6 \approx \underline{\underline{197'382,27 \text{ Francs}}}$$

- Capitalisation semestrielle :

$$\frac{12\%}{2} = 6\% \Rightarrow 1,06^2 \Rightarrow C = 100'000 \cdot 1,06^{12} \approx \underline{\underline{201'219,65 \text{ Francs}}}$$

- Capitalisation trimestrielle :

$$\frac{12\%}{4} = 3\% \Rightarrow 1,03^4 \Rightarrow C = 100'000 \cdot 1,03^{24} \approx \underline{\underline{203'279,41 \text{ Francs}}}$$

Exercice 6.17

A quel taux nominal capitalisé semestriellement a-t-on placé un capital de 100'000 francs si l'on obtient un capital de 166'817,25 francs après 8 ans ?

$$166'817,25 = 100'000 \cdot (1+i)^{16} \quad \begin{matrix} 16 \\ \swarrow \\ 2 \cdot 8 \end{matrix}$$

$$(1+i)^{16} = 1,6681725 \quad \sqrt[16]{}$$

$$1+i \approx 1,0325$$

$$i \approx 0,0325 \quad | \cdot 100$$

$$\Rightarrow 3,25\%$$

$$\begin{matrix} \textcircled{\cdot 2} \\ \Rightarrow \end{matrix} 6,5\% \quad \Rightarrow \underline{\underline{(6,5\% ; 2)}}$$

↑

$$i = \frac{j}{2}$$

$$j = 2 \cdot i$$

Exercice 6.18

Combien de temps faut-il placer un capital initial de 12'000 francs à un taux nominal de 8% capitalisé semestriellement pour obtenir 49'247,20 francs ?

$$12'000 \cdot 1,04^{2x} = 49'247,20$$

$$1,04^{2x} \approx 4,104$$

$$2x \approx \frac{\log(4,104)}{\log(1,04)}$$

$$2x \approx 36$$

$$x \approx 18$$

Il faut le placer 18 ans

Exercice 6.19

Calculer le taux mensuel équivalent au taux annuel de 12%.

$$(1+x)^{12} = 1,12$$

$$1+x \approx 1,0094888$$

$$x \approx 0,0094888$$

$$\Rightarrow \text{taux mensuel : } \underline{\underline{0,9489\%}}$$

Exercice 6.20

Calculer le taux trimestriel équivalent au taux mensuel de 1%.

$$1,01^{12} = (1+x)^4$$

$$1,1268 \approx (1+x)^4 \quad | \sqrt[4]{\quad}$$

$$1+x \approx 1,030301$$

$$x \approx 0,030301 \Rightarrow \text{taux trimestriel : } \underline{\underline{3,0301\%}}$$

Exercice 6.21

Calculer le taux annuel correspondant au taux nominal de 8% capitalisé trimestriellement.

$$\frac{8\%}{4} = 2\% \Rightarrow 1,02^4 = 1+i$$

$$1,08243 = 1+i$$

$$i = 0,08243$$

$$\Rightarrow \text{taux annuel : } \underline{\underline{8,243\%}}$$

Exercice 6.22

Calculer le taux annuel réel correspondant à un taux nominal de 12% capitalisé mensuellement.

$$\frac{12\%}{12} = 1\% \Rightarrow 1,01^{12} = 1+i$$

$$1,126825 \approx 1+i$$

$$i \approx 0,126825$$

$$\Rightarrow \text{taux annuel : } \underline{\underline{12,6825\%}}$$