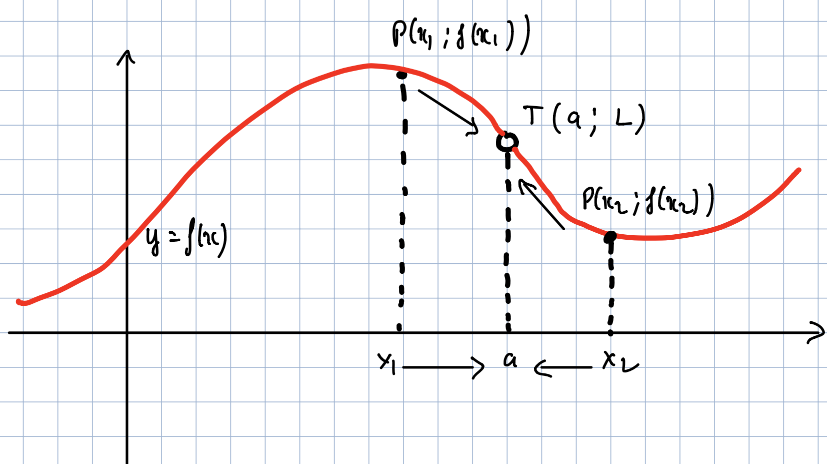
Limites finies et infinies

1) Rappel :

- Un nombre réel $a \in ED(f)$ est un zéro de f si $f(a) = 0$
- Une indéfinition $b \notin ED(f)$ est un pôle de f s'il existe un intervalle ouvert $]c\,;d[$ contenant b avec f définie sur $]c\,;b[$ ou sur $]b\,;d[$ ou sur les deux intervalles

2) Limite finie :

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ signifie que la suite de points $(x\,; f(x))$ du graphe représentant la fonction f s'approchent indéfiniment du point $(a\,;L)$ lorsque x se rapproche indéfiniment a (sans perdre la valeur a). Les mots "proche" et "s'approcher de" sont employés ici dans un sens très intuitif !



* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ ne se calcule que si a est un pôle de f ou si $a \in I \subset ED(f)$ où I est un intervalle ouvert.

3) Limites à gauche et limites à droite :

=> l'étude du comportement de certaines fonctions au voisinage d'un point a : à gauche de a et à droite de a. Le résultat ne sera pas nécessairement le même.

- Limite à gauche en $x = a$:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^-} f(x)$$

$(x<a)$

- Limite à droite en $x = a$:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^+} f(x)$$

* Propriété :

Le nombre L est la limite de f en $x = a$ (et donc cette limite existe) si et seulement si la limite depuis la gauche est égale à la limite depuis la droite :

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = L = \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)}$$

4) Calculs de limites :

a) Opérations sur les limites :

- La limite est unique : si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ et $\lim_{x \to a} f(x) = M$, alors $L = M$

- La limite d'une somme est la somme des limites :

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=L+M$$

- La limite d'un produit est le produit des limites :

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)=L\cdot M$$

- La limite d'un quotient est le quotient des limites :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{L}{M}\quad \text{si } M\neq 0$$

b) Calculs de limite en un point défini :

=> si f est une fonction polynomiale, rationnelle, irrationnelle, trigonométrique, logarithmique ou exponentielle et si $a\in ED(f)$, on a :

$$\boxed{\lim_{x\to a}f(x)=f(a)}$$

c) Calculs de la limite de deux fonctions :

* Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{N(x)}{D(x)}$ (fonction rationnelle)

=> Premier cas : le dénominateur non nul :

$$\boxed{\text{si } \lim_{x\to a}N(x)=c_1 \text{ et } \lim_{x\to a}D(x)=c_2\text{, alors } \lim_{x\to a}f(x)=\frac{c_1}{c_2}}$$

⇒ Deuxième cas : le numérateur et le dénominateur nuls :

- On obtient dans ce cas une forme $\frac{0}{0}$, dite forme indéterminée.

- Cette forme indéterminée n'est qu'une réponse provisoire à ce calcul de limite. Il s'agira par la suite de lever cette indétermination.

- Dans cette situation, $N(x)$ et $D(x)$ sont divisibles par $(x-a)$. On peut donc simplifier la fraction par $x-a$. En effet :

  - $N(a) = 0$ donc $N(x)$ est divisible par $(x-a)$
  - $D(a) = 0$ donc $D(x)$ est divisible par $(x-a)$

  ⇒ La fraction pourra donc être simplifiée par $(x-a)$.

→ Troisième cas : le numérateur non nul et le dénominateur nul : Limites infinies

Seule une des trois réponses suivantes est possible :

i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ non définie dans le cas où $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)$

Pour déterminer la bonne réponse, il faut donc calculer la limite à gauche et la limite à droite.

⇒ Si elles sont égales, la bonne réponse sera la a) ou la b).

⇒ Si elles sont différentes, la bonne réponse sera la c).

* Proposition :

Soient f et g deux fonctions avec $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq 0$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

* **Remarque :** Lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)$ sont infinies, on notera $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ si les limites à gauche et à droite ne sont pas demandées.

* **Quotients de fonctions non polynomiales :**

On utilise la formule $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ pour résoudre une forme indéterminée de la forme $\frac{0}{0}$ dans le cas d'un quotient de fonctions contenant une racine carrée.

d) **Algèbre de l'infini :**

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) + g(x) \right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) + g(x) \right) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) + g(x) \right) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = c > 0$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = c < 0$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = c < 0$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0_-$, alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

* Remarque :

- On abrège les propriétés précédentes en notant par exemple :

$\forall c \in \mathbb{R} : c + (+\infty) = +\infty$ ou $\forall c \in \mathbb{R}, c < 0 : \dfrac{c}{0_-} = +\infty$

- Il existe des formes, dites indéterminées, pour lesquelles la conclusion n'est pas immédiate. Voici les principales :

$$\boxed{\frac{0}{0} \; ; \; \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \; ; \; (+\infty) - (+\infty) \text{ et } 0 \cdot \pm\infty}$$

5) Limites à l'infini :

* Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a ; +\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ si $f(x)$ est arbitrairement proche de L dès que x est suffisamment grand.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si $f(x)$ est arbitrairement grand dès que x est suffisamment grand.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} -f(x) = +\infty$

* Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]-\infty ; a[$, où $a \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(-x)$

* **Remarque :**

a) Lorsqu'on écrit $\lim_{x \to \infty} f(x)$, cela signifiera qu'on s'intéresse indifféremment aux calculs $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ ou $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Les propriétés énoncées dans le théorème pour les limites finies peuvent être étendues sans autres aux limites à l'infini.

* **Limites à l'infini de fonctions polynomiales et rationnelles :**

Soit $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polynome de degré n $(a_n \neq 0)$

et $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ // // m $(b_m \neq 0)$.

On a :

1) $$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} p(x) = \lim_{x \to \pm\infty} (a_n x^n)}$$

2) $$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ \pm\infty & \text{si } n > m \end{cases}}$$