

Suites de nombres réels

* Définitions :

- Une suite réelle est une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$. L'image d'un entier naturel n par cette application, notée u_n , est le terme de rang n (qui se lit u indice n); le réel u_n est appelé terme général de la suite u .
- La suite est notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou plus simplement (u_n) .
$$(u_n) : \quad \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u_n$$
- Une suite finie est une application d'un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$. Le premier et le dernier terme d'une suite finie sont appelés les extrêmes. Une suite qui n'est pas finie est une suite infinie.

* Remarque :

On se donne une suite essentiellement de deux manières :

- i) en définissant son Terme général u_n en fonction de n : on peut calculer directement n'importe quel Terme d'indice n .
- ii) en indiquant le ou les premiers Termes et une relation de récurrence qui permet de construire un Terme à partir du ou des précédents.
→ on donne u_0 et $u_{k+1} = \dots$ une telle suite est appelée suite définie par récurrence.

* Suite alternée :

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite alternée si ses termes sont alternativement positifs et négatifs. Le terme général d'une suite alternée peut s'écrire sous la forme :

$$u_n = (-1)^n v_n \text{ avec } v_n \in \mathbb{R}$$

* Croissance et décroissance des suites :

a) Une suite est croissante si chaque terme est supérieur ou égal à son précédent :

$$u_{n+1} \geq u_n \text{ pour tout } n$$

b) Une suite est décroissante si chaque terme est inférieur ou égal à son précédent :

$$u_{n+1} \leq u_n \text{ pour tout } n$$

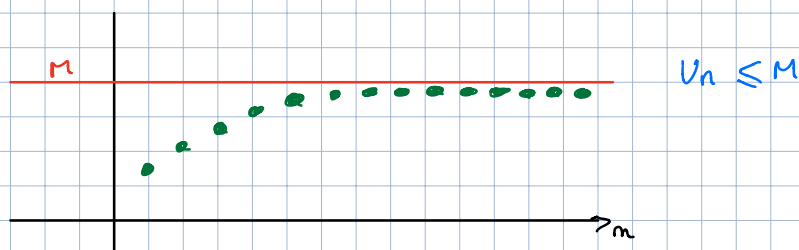
c) Une suite est monotone si elle est croissante ou si elle est décroissante.

d) De manière analogue, on définit une suite strictement croissante, strictement décroissante ou strictement monotone lorsque l'inégalité qui lie ses termes est stricte.

e) Une suite est constante si tous ses termes sont égaux.

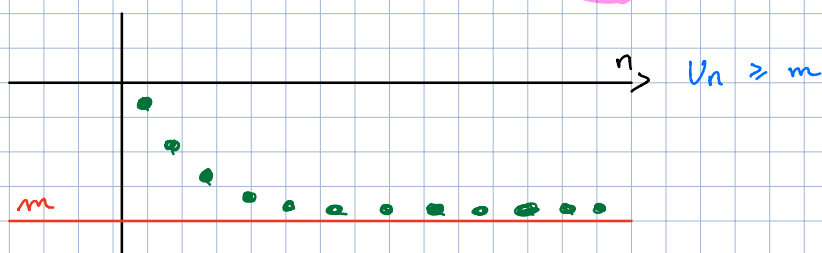
* Suite majorée ou minorée :

a) Une suite (u_n) est majorée s'il existe un nombre réel M tel que chaque terme de la suite est inférieur ou égal à ce nombre. Dans ce cas, le nombre M est appelé un majorant de la suite.



La borne supérieure de la suite est le plus petit majorant de cette suite.

- b) Une suite (u_n) est **minorée** s'il existe un nombre réel m tel que chaque terme de la suite est supérieur ou égal à ce nombre. Dans ce cas, le nombre m est appelé un **minorant** de la suite.



La borne inférieure de la suite est le plus grand minorant de cette suite.

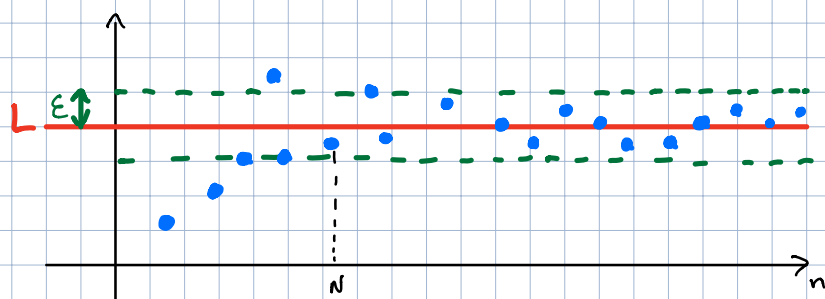
- c) Une suite est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

* Théorème :

Toute suite majorée possède un plus petit majorant. De même, toute suite minorée admet un plus grand minorant.

* Suites convergentes :

Une suite (u_n) est **convergente** vers $L \in \mathbb{R}$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$, on a $|u_n - L| < \epsilon$.



Une suite (u_n) converge vers L si $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ (N dépend de ϵ) tel que

$$|u_n - L| < \epsilon, n > N.$$

$$\text{On note } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L$$

L est appelé limite de la suite (u_n)

* Propriétés des limites de suites :

Soit deux suites (a_n) et (b_n) convergentes :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$$

On a :

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}, \text{ et } B \neq 0 \text{ et } b_n \neq 0$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} e^{a_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = e^A$$

* Suites divergentes :

On dit qu'une suite est **divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente.

=> Deux types de suites divergentes :

a) celles qui ont une limite infinie

b) celles qui n'ont pas de limite

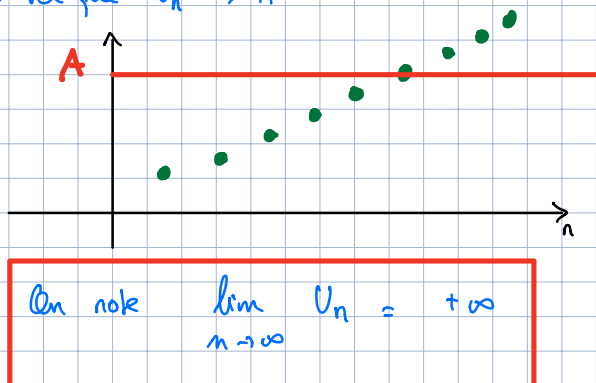
Exemples :

$$1) \quad u_n = n \quad \rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$$

$$u_n = -2n + 1000 \quad \rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$$

* Limite infinie :

Une suite réelle (u_n) diverge vers $+\infty$ si pour tout $A \in \mathbb{R}_+$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > A$



$$u_n = n$$

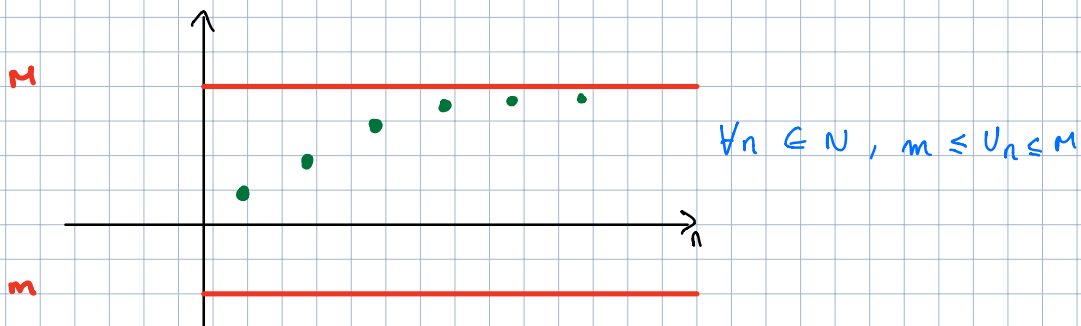
$$A = 1000, N = 1001$$

Une suite réelle (u_n) diverge vers $-\infty$ si pour tout $A \in \mathbb{R}_-$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < A$

$$\text{On note } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$$

* Propriétés :

1) Toute suite convergente est bornée.



La réciproque est fautive.

La suite définie par $u_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ est bornée mais non convergente.

2) Toute suite croissante et majorée converge.

3) Toute suite décroissante et minorée converge.

* Théorème des deux gendarmes :

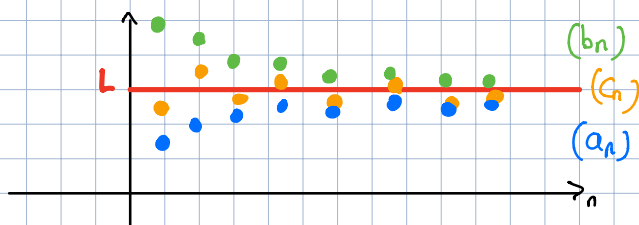
Soit (a_n) , (b_n) et (c_n) trois suites telles que

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$$

$$3) a_n \leq c_n \leq b_n \quad , \text{ pour tout } n$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$$



* Suites arithmétiques :

Une suite (U_n) est une suite arithmétique s'il existe r tel que

$$U_{n+1} = U_n + r$$

chaque terme (sauf le premier) est la somme du terme précédent et d'un nombre constant r .

Le nombre r est appelé la raison.

Ex :

$$\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = U_n + 5 \end{cases}$$

* Suites géométriques :

- Une suite géométrique est une suite telle que chaque terme (sauf le premier) est le produit du terme précédent et d'un nombre constant non nul appelé raison de la suite géométrique.

- Une suite (U_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre q tel que

$$U_{n+1} = q U_n$$

Le terme de rang n d'une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison q

est : $U_n = U_0 \cdot q^n$, $q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$$* \text{ si } (U_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \Rightarrow U_{n+1} = q U_n$$

et

$$U_n = U_1 \cdot q^{n-1}$$