

Généralités sur les fonctions :

Corrigé

2.2.1 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes : *Fonctions polynomiales*

a) $f(x) = 4 - 5x$

b) $f(x) = x^2 - x - 2$

$ED_f = \mathbb{R}$

c) $f(x) = (x+4)^2(2+x)$

d) $f(x) = -6x^3 + 11x^2 - 3x$

e) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

f) $f(x) = x^4 + 5x^2 - 36$

a) $f(x) = 4 - 5x$ est définie sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow ED_f = \mathbb{R}$

b) $f(x) = x^2 - x - 2 \Rightarrow ED_f = \mathbb{R}$

c) $f(x) = (x+4)^2(2+x) \Rightarrow ED_f = \mathbb{R}$

d) $f(x) = -6x^3 + 11x^2 - 3x \Rightarrow ED_f = \mathbb{R}$

e) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \Rightarrow ED_f = \mathbb{R}$

f) $f(x) = x^4 + 5x^2 - 36 \Rightarrow ED_f = \mathbb{R}$

2.2.2 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes : *Fonctions rationnelles*

a) $f(x) = \frac{x(x+4)}{3-2x}$

b) $f(x) = \frac{2x}{16-x^2}$

c) $f(x) = \frac{(x+2)^2(x+1)}{x^2+x}$

d) $f(x) = x - \frac{1}{x}$

e) $f(x) = \frac{1}{x-5} + \frac{3}{x+1}$

f) $f(x) = \frac{-5(4-x)^2}{(1-x^2)(2-x)}$

a) $f(x) = \frac{x(x+4)}{3-2x}$ est définie si $3-2x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{3}{2}$

$\Rightarrow ED_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}$

$$b) f(x) = \frac{2x}{16-x^2} \text{ est définie si } 16-x^2 \neq 0 \Leftrightarrow (4-x)(4+x) \neq 0$$

$$\Rightarrow x \neq 4 \text{ ou } x \neq -4$$

$$\Rightarrow \underline{ED_f = \mathbb{R} \setminus \{-4; 4\}}$$

$$c) f(x) = \frac{(x+2)^2(x+1)}{x^2+x} \text{ est définie si } x^2+x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \text{ ou } x \neq -1$$

$$\Rightarrow \underline{ED_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}} \text{ ou } \underline{ED_f = \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}}$$

$$d) f(x) = x - \frac{1}{x} \text{ est définie si } x \neq 0$$

$$\Rightarrow \underline{ED_f = \mathbb{R}^*}$$

$$e) f(x) = \frac{1}{x-5} + \frac{3}{x+1} \text{ est définie si } x-5 \neq 0 \text{ et } x+1 \neq 0$$

$$\Rightarrow x \neq 5 \text{ et } x \neq -1$$

$$\Rightarrow \underline{ED_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 5\}}$$

$$f) f(x) = \frac{-5(4-x)^2}{(1-x^2)(2-x)} \text{ est définie si } (1-x^2)(2-x) \neq 0$$

$$\Rightarrow 1-x^2 \neq 0 \text{ ou } 2-x \neq 0$$

$$\Rightarrow (1-x)(1+x) \neq 0 \text{ ou } x \neq 2$$

$$\Rightarrow \underline{ED_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; -1; 2\}}$$

2.2.3 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

fonction irrationnelles

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

b) $f(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{x-5}$

c) $f(x) = \sqrt{(x-1)(x-5)}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{6-2x}}{x^2 - 5x + 4}$

e) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-4}}$

f) $f(x) = \frac{x^2 + 7x}{\sqrt{1-x^2}}$

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

$f(x)$ est définie si $x^2 + x + 1 \geq 0$

$\Delta = -3 < 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 \text{ est } > 0$

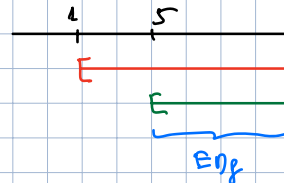
(même signe que x^2)

$\Rightarrow \underline{ED_f = \mathbb{R}}$

b) $f(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{x-5}$ est définie si $x-1 \geq 0$ et $x-5 \geq 0$

intersection

$\Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 5 \end{cases}$



$\Rightarrow \underline{ED_f = [5; +\infty[}$

c) $f(x) = \sqrt{(x-1)(x-5)}$ est définie si $(x-1)(x-5) \geq 0$

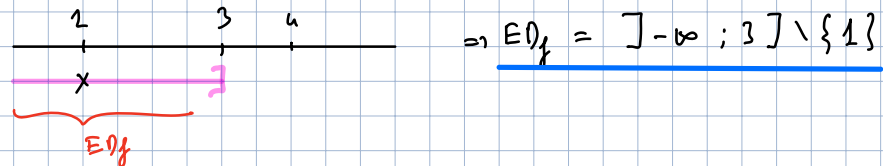
Tableau de signe :

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
$(x-1)(x-5)$	$+$	$\bigcirc$	$-$	$\bigcirc$	$+$

$\Rightarrow \underline{ED_f =]-\infty; 1] \cup [5; +\infty[}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{6-2x}}{x^2-5x+4}$ est définie si $6-2x \geq 0$ et $x^2-5x+4 \neq 0$

$$= \begin{cases} 6-2x \geq 0 \\ x^2-5x+4 \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} x \leq 3 \\ (x-4)(x-1) \neq 0 \end{cases}$$



e) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-4}}$ est définie si $\frac{x+1}{x-4} \geq 0$ et $x-4 \neq 0$

Tableau de signe :

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
$x+1$	-	0	+	+
$x-4$	-	-	0	+
$\frac{x+1}{x-4}$	+	0	-	+

$$\Rightarrow ED_f =]-\infty; -1] \cup]4; +\infty[$$

ou :

on teste avec

des valeurs $\rightarrow$

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
$\frac{x+1}{x-4}$	+	0	-	+

$$\Rightarrow ED_f =]-\infty; -1] \cup]4; +\infty[$$

$$f) f(x) = \frac{x^2 + 7x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ est définie si } 1-x^2 \geq 0 \text{ et } 1-x^2 \neq 0$$

$\Rightarrow x \neq \pm 1$

$$\Rightarrow 1-x^2 > 0$$

$$\Rightarrow (1-x)(1+x) > 0$$

Tableau de signe :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$1-x^2$	-	0	+	0	-

$$\Rightarrow \underline{ED_f =]-1; 1[}$$

2.2.5 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \ln(7-2x)$

b) $f(x) = e^{x-1}$

c) $f(x) = \frac{3-x}{1-\log(x)}$

d) $f(x) = 3^{1/(x+2)}$

e) $f(x) = \log_2\left(\frac{2+x}{3-x}\right)$

f) $f(x) = 10^{-x}$

a) $f(x) = \ln(7-2x)$ est définie si $7-2x > 0 \Rightarrow x < \frac{7}{2}$

$$\begin{array}{c} \frac{7}{2} \\ | \\ \text{---} \end{array}$$

$\underline{ED_f =]-\infty; \frac{7}{2}[}$

b) $f(x) = e^{x-1}$ est définie sur $\mathbb{R} \Rightarrow \underline{ED_f = \mathbb{R}}$

c) $f(x) = \frac{3-x}{1-\log(x)}$ est définie si $1-\log(x) \neq 0$ et $x > 0$

$$\Rightarrow 1-\log(x) \neq 0 \Rightarrow \log(x) \neq 1 \Rightarrow \log(x) \neq \log(10)$$

$\Rightarrow x \neq 10$

$$\begin{array}{c} 0 \qquad 10 \\ | \qquad | \\ \text{---} \end{array}$$

$\Rightarrow \underline{ED_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{10\}}$

d) $f(x) = 3^{1/(x+2)}$ est définie si $x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$
 $\Rightarrow \underline{ED_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}}$

e) $f(x) = \log\left(\frac{2+x}{3-x}\right)$ est définie si $\frac{2+x}{3-x} > 0$ et $3-x \neq 0$

$\Rightarrow$ signe de $\frac{2+x}{3-x}$

on teste
avec des
valeurs

$\Rightarrow$

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$\frac{2+x}{3-x}$	-	0	+	-

$\Rightarrow \underline{ED_f =]-2; 3[}$

f) $f(x) = 10^{-x}$ est définie sur $\mathbb{R} \Rightarrow \underline{ED_f = \mathbb{R}}$

2.2.6 Calculer dans chaque cas la valeur de $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ et $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

Donner ensuite les ensembles de définition des fonctions $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ et $\frac{f}{g}$.

a) $f(x) = 3$ et $g(x) = x^2$

b) $f(x) = \frac{2x}{x-4}$ et $g(x) = \frac{x}{x+5}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \sqrt{4x}$

d) $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = \ln(1-x)$

a) $f(x) = 3$ et $g(x) = x^2$

* $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 3 + x^2 = \underline{x^2 + 3} \Rightarrow \underline{ED(f+g) = \mathbb{R}}$

* $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 3 - x^2 = \underline{-x^2 + 3} \Rightarrow \underline{ED(f-g) = \mathbb{R}}$

* $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \underline{3 \cdot x^2} \Rightarrow \underline{ED(f \cdot g) = \mathbb{R}}$

* $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \underline{\frac{3}{x^2}} \Rightarrow \underline{ED\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R}^*}$

$$b) f(x) = \frac{2x}{x-4} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x}{x+5}$$

$$* (f+g)(x) = \frac{2x}{x-4} + \frac{x}{x+5} = \frac{3x^2+6x}{(x-4)(x+5)} \Rightarrow \text{ED}(f+g) = \mathbb{R} \setminus \{-5; 4\}$$

$$* (f-g)(x) = \frac{2x}{x-4} - \frac{x}{x+5} = \frac{x^2+14x}{(x-4)(x+5)} \Rightarrow \text{ED}(f-g) = \mathbb{R} \setminus \{-5; 4\}$$

$$* (f \cdot g)(x) = \frac{2x}{x-4} \cdot \frac{x}{x+5} = \frac{2x^2}{(x-4)(x+5)} \Rightarrow \text{ED}(f \cdot g) = \mathbb{R} \setminus \{-5; 4\}$$

$$* \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\frac{2x}{x-4}}{\frac{x}{x+5}} = \frac{2x}{x-4} \cdot \frac{x+5}{x} = \frac{2x(x+5)}{x(x-4)} \Rightarrow \text{ED}\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R}^+ \setminus \{-5; 4\}$$

$$c) f(x) = \sqrt{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{4x}$$

$$* (f+g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4x} = \sqrt{x} + 2\sqrt{x} = 3\sqrt{x} \Rightarrow \text{ED}(f+g) = \mathbb{R}_+$$

$$* (f-g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{4x} = \sqrt{x} - 2\sqrt{x} = -\sqrt{x} \Rightarrow \text{ED}(f-g) = \mathbb{R}_+$$

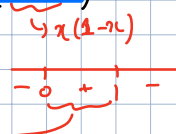
$$* (f \cdot g)(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{4x} = \sqrt{4x^2} = 2|x| = 2x \Rightarrow \text{ED}(f \cdot g) = \mathbb{R}_+$$

$$* \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4x}} = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ED} = \mathbb{R}_+^*$$

$$d) f(x) = \ln(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(1-x)$$

$$* (f+g)(x) = \ln(x) + \ln(1-x) = \ln(x(1-x)) = \ln(x-x^2)$$

$$\Rightarrow \text{ED}(f+g) =]0; 1[$$



$$* (f-g)(x) = \ln(x) - \ln(1-x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

$$\Rightarrow \text{ED}(f-g) =]0; 1[$$

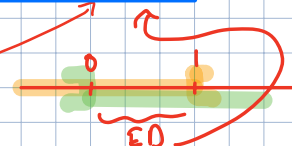
$\frac{x}{1-x} > 0$ et $x \neq 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	-	0	+	+
$1-x$	+	+	0	-
$\frac{x}{1-x}$	-	+		-

$\text{ED}(f-g)$

$$* (f \cdot g)(x) = \ln(x) \cdot \ln(1-x) \Rightarrow \text{ED}(f \cdot g) =]0; 1[$$

$\downarrow$
 $x > 0$
 $\downarrow$
 $1-x > 0$
 $x < 1$



$$* \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(1-x)} \Rightarrow \text{conditions} \begin{cases} x > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ED}\left(\frac{f}{g}\right) =]0; 1[$$

2.2.7 Soit f , g et h trois fonctions définies par $f(x) = 2x$, $g(x) = 2x - 1$ et $h(x) = x^2$.
Calculer :

a) $(f \circ g)(x)$

b) $(h \circ f)(x)$

c) $(g \circ h \circ f)(x)$

Rappel: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x-1) = 2(2x-1) = \underline{4x-2}$

b) $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(2x) = (2x)^2 = \underline{4x^2}$

c) $(g \circ h \circ f)(x) = g[h(f(x))] = g(4x^2) = 2(4x^2) - 1 = \underline{8x^2 - 1}$

2.2.8 Dans chacun des cas suivants, donner $(f \circ g)(x)$, $D_{f \circ g}$, $(g \circ f)(x)$, $D_{g \circ f}$.

a) $f(x) = x^2 - 3x$ et $g(x) = \sqrt{x+2}$ b) $f(x) = \frac{x}{3x+2}$ et $g(x) = \frac{2}{x}$

a) $f(x) = x^2 - 3x$ et $g(x) = \sqrt{x+2}$

$\Rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x+2}) = (\sqrt{x+2})^2 - 3(\sqrt{x+2}) = \underline{x+2 - 3\sqrt{x+2}}$
 $\Rightarrow \underline{ED(f \circ g) = [-2; +\infty[}$

$\begin{array}{c} -2 \\ | \\ \hline \end{array}$
 $\begin{array}{c} x+2 \geq 0 \\ \hline \end{array}$
 $ED(f \circ g)$

$\Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 3x) = \underline{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$

condition : $x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) \geq 0$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$(x-1)(x-2)$	$+$	0	$-$	$+$

$\Rightarrow \underline{ED(g \circ f) =]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[}$

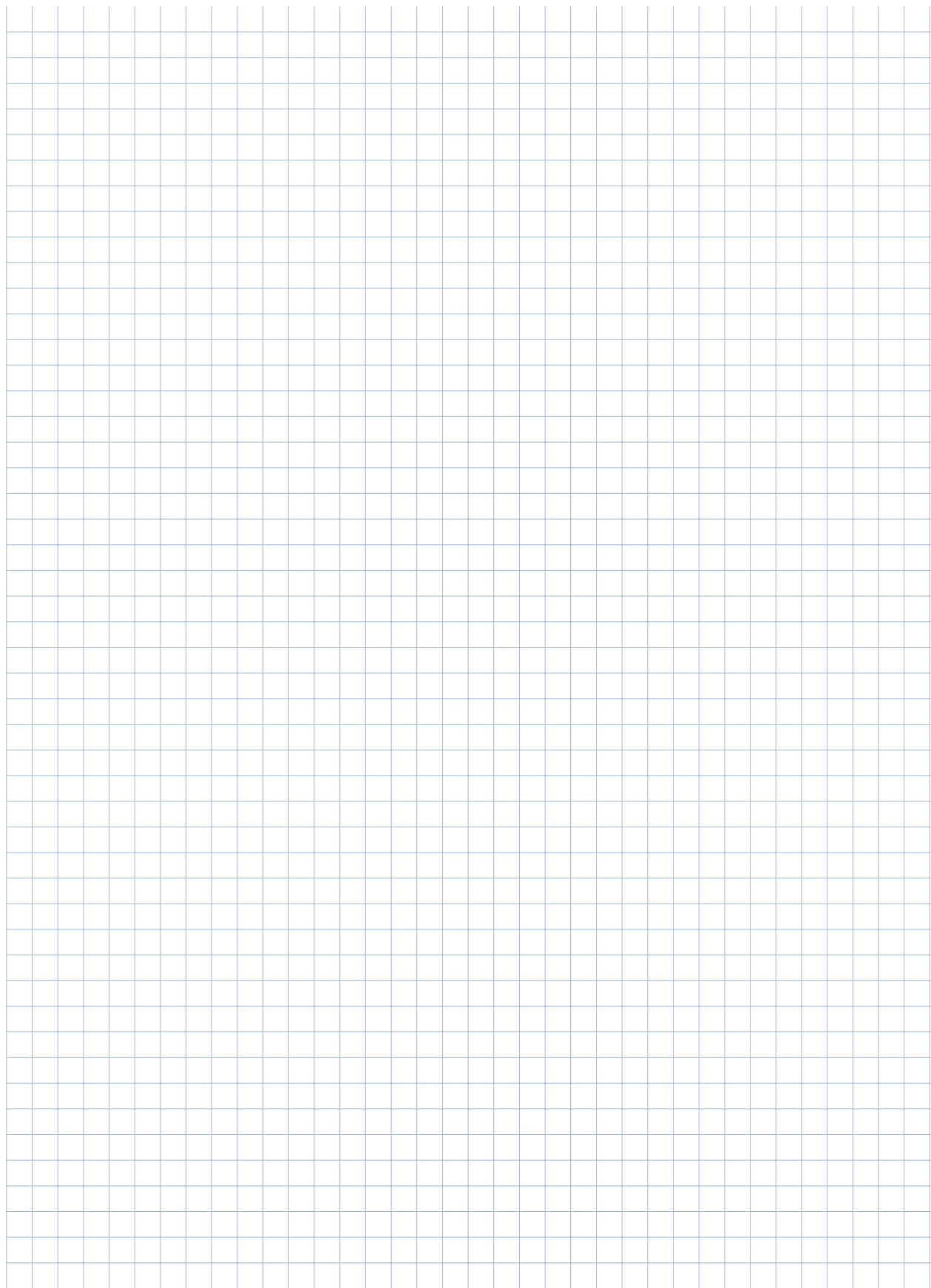
b) $f(x) = \frac{x}{3x+2}$ et $g(x) = \frac{2}{x}$

$\Rightarrow (f \circ g)(x) = f\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{\frac{2}{x}}{3 \cdot \frac{2}{x} + 2} = \frac{1}{\underline{3+x}}$
 $\Rightarrow \underline{ED(f \circ g) = \mathbb{R}^* \setminus \{-3\}}$

$\frac{2}{x} \neq 0$
 $3+x \neq 0$

$\Rightarrow (g \circ f)(x) = g\left(\frac{x}{3x+2}\right) = \underline{\frac{6x+4}{x}}$

$\Rightarrow \underline{ED(g \circ f) = \mathbb{R}^* \setminus \{-\frac{2}{3}\}}$



2.2.11 Tracer dans le même système d'axes les graphes des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_3(x) = x^3, f_4(x) = x^4, f_5(x) = x^5$$

Rappel : fonction puissance n -ème

$$f(x) = x^m$$

a) si n est pair

alors :

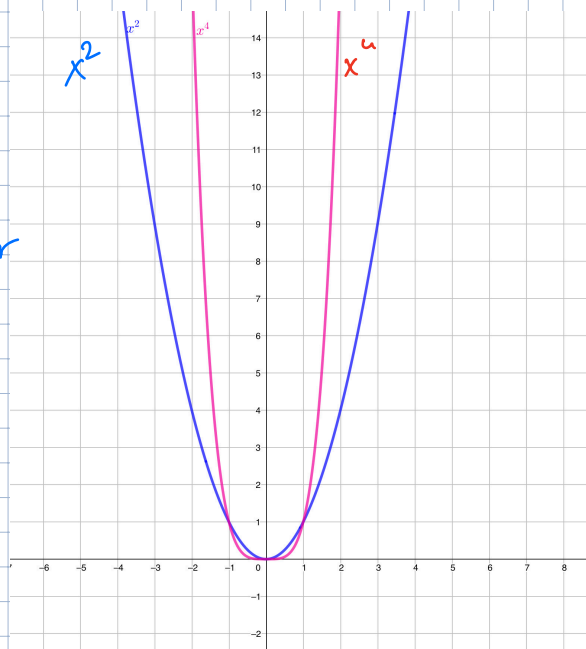
1) Symétrie: $(-x)^m = x^m \quad \forall x \in \mathbb{R}$

fonc. est paire $\rightarrow$ symétrie par rapport à l'axe des y .

2) Forme:

plus n est petit, plus la courbe représentant de la fct f "s'éloigne" rapidement de l'axe Oy quand

x augmente ($x > 0$) ou diminue ($x < 0$), qu'elle passe par les points $(0; 0)$ (0 est le zéro de f) et $(1; 1)$, et qu'elle est toujours au-dessus de l'axe des abscisses ($f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$).



b) si n est impair :

1) Symétrie :

La représentation graphique de la fct $f(x) = x^n$ admet une symétrie centrale de centre O car $(-x)^n = -x^n, \forall x \in \mathbb{R}$. Cette fct est donc une fonction impaire (car $f(-x) = -f(x)$).

2) Forme :

On peut remarquer que, plus l'exposant est petit, plus la courbe représentant la fct f "s'éloigne" rapidement l'axe Oy quand x augmente ($x > 0$) ou diminue ($x < 0$), qu'elle passe par les points $(0;0)$ (0 est le zéro de f) et $(1;1)$, et qu'elle est au-dessus de l'axe des abscisses pour $x > 0$ ($f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}_+^*$) et au-dessous pour $x < 0$ ($f(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}_-^*$).

2.2.19 Déterminer si les fonctions suivantes sont paires, impaires ou ni l'un ni l'autre :

a) $f(x) = 9x^4 - 3x^2 + 2$

b) $f(x) = x^3 - 2x$

c) $f(x) = 5$

d) $f(x) = x^2 + 8x + 2$

e) $f(x) = \frac{3x^2 - 2}{2x}$

f) $f(x) = \frac{x^5 - x}{x^2 + 1}$

g) $f(x) = \frac{x}{x+2} + \frac{x}{x-2}$

h) $f(x) = x^6 + 3x^2 - \frac{1}{x}$

i) $f(x) = \sqrt{x}$

j) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

k) $f(x) = |x^3 - 3x| + 1$

l) $f(x) = \frac{x}{|x| - 1}$

m) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$

n) $f(x) = \sin^2(x) \cdot \cos(x)$

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= 9x^4 - 3x^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad f(-x) = 9(-x)^4 - 3(-x)^2 + 2 \\ &= 9x^4 - 3x^2 + 2 = f(x) \\ &\Rightarrow \underline{f(x) \text{ est paire}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f(x) &= x^3 - 2x \quad \Rightarrow \quad f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x) \\ &\Rightarrow f(-x) = -f(x) \quad \Rightarrow \underline{f(x) \text{ est impaire}} \end{aligned}$$

$$\text{c) } f(x) = 5 \quad \Rightarrow \quad f(-x) = 5 = f(x) \quad \Rightarrow \underline{f(x) \text{ est paire}}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } f(x) &= x^2 + 8x + 2 \quad \Rightarrow \quad f(-x) = (-x)^2 + 8(-x) + 2 = x^2 - 8x + 2 \\ &\Rightarrow f(-x) \neq f(x) \quad \Rightarrow \underline{f(x) \text{ est ni paire, ni impaire}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } f(x) &= \frac{3x^2 - 2}{2x} \quad \Rightarrow \quad f(-x) = \frac{3(-x)^2 - 2}{2(-x)} = \frac{3x^2 - 2}{-2x} = -\frac{3x^2 - 2}{2x} \\ &\Rightarrow f(-x) = -f(x) \quad \Rightarrow \underline{f(x) \text{ est impaire}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } f(x) &= \frac{x^5 - x}{x^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad f(-x) = \frac{(-x)^5 - (-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x^5 + x}{x^2 + 1} = -\frac{x^5 - x}{x^2 + 1} \\ &\Rightarrow f(-x) = -f(x) \quad \Rightarrow \underline{f(x) \text{ est impaire}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g) \quad f(x) &= \frac{x}{x+2} + \frac{x}{x-2} \Rightarrow f(-x) = \frac{-x}{-x+2} + \frac{-x}{-x-2} \\
 &= f(-x) = \frac{-x}{-(x-2)} + \frac{-x}{-(x+2)} = \frac{x}{x-2} + \frac{x}{x+2} = \frac{x}{x+2} + \frac{x}{x-2} \\
 &\Rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow \underline{f(x) \text{ est paire}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h) \quad f(x) &= x^6 + 3x^2 - \frac{1}{x} \Rightarrow f(-x) = (-x)^6 + 3(-x)^2 - \frac{1}{-x} \\
 &\Rightarrow f(-x) = x^6 + 3x^2 + \frac{1}{x} \neq f(x) \Rightarrow \underline{f(x) \text{ n'est ni paire, ni impaire}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i) \quad f(x) &= \sqrt{x} \Rightarrow f(-x) = \sqrt{-x} \quad \underline{\text{n'est pas définie sur le même domaine}} \\
 &\Rightarrow \underline{f(x) \text{ n'est ni paire, ni impaire}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 j) \quad f(x) &= \sqrt{9-x^2} \Rightarrow f(-x) = \sqrt{9-(-x)^2} = \sqrt{9-x^2} \\
 &\Rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow \underline{f(x) \text{ est paire}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Rf } k) \quad f(x) &= |x^3 - 3x| + 1 \Rightarrow f(-x) = |(-x)^3 - 3(-x)| + 1 = |-x^3 + 3x| + 1 \\
 &\Rightarrow f(-x) = |-(x^3 - 3x)| + 1 = |x^3 - 3x| + 1 \\
 &\Rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow \underline{f(x) \text{ est paire}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Rf } l) \quad f(x) &= \frac{x}{|x|-1} \Rightarrow f(-x) = \frac{-x}{|-x|-1} = \frac{-x}{|x|-1} = -\frac{x}{|x|-1} \\
 &\Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow \underline{f(x) \text{ est impaire}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Rf } m) \quad f(x) &= \sin(x) + \cos(x) \Rightarrow f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin(x) + \cos(x) \\
 &\Rightarrow f(-x) \neq f(x) \Rightarrow \underline{f(x) \text{ n'est ni paire, ni impaire}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Rf } n) \quad f(x) &= \sin^2(x) \cdot \cos(x) \Rightarrow f(-x) = \sin^2(-x) \cdot \cos(-x) = (-\sin(x))^2 \cdot \cos(x) \\
 &\Rightarrow f(-x) = \sin^2(x) \cos(x) = f(x) \Rightarrow \underline{f(x) \text{ est paire}}
 \end{aligned}$$

2.3.1 Déterminer les applications injectives, surjectives ou bijectives.

a) $f_1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $x \mapsto 2x+1$

d) $f_4 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $x \mapsto x^3$

g) $f_7 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $x \mapsto x^2$

b) $f_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $x \mapsto x^2$

e) $f_5 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $x \mapsto x$

h) $f_8 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$

c) $f_3 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $x \mapsto x-3$

f) $f_6 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $x \mapsto x+2$

i) $f_9 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 2x+1$

j) $f_{10} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^3$

l) $f_{12} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $x \mapsto x^2$

n) $f_{14} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto e^x$

k) $f_{11} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^3 - x^2$

m) $f_{13} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $x \mapsto x^2$

o) $f_{15} : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \log(x)$

a) $f_1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $x \mapsto 2x+1$

f_1 est injective . En effet, soit x_1 et $x_2 \in \mathbb{Z}$ tq $f_1(x_1) = f_1(x_2)$

$$\Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \quad | -1$$

$$2x_1 = 2x_2 \quad | \div 2$$

$$x_1 = x_2$$

$$\text{donc } f_1(x_1) = f_1(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

f_1 n'est pas surjective . En effet, si $a \in \mathbb{Z}$ est tel que $f_1(a) = 0$

$$\text{alors } 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

(* on peut démontrer que 2 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{Z}$: $2x+1=2$)
 $\Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

$$b) f_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ x \mapsto x^2$$

f_2 n'est pas injective. En effet, soit x_1 et $x_2 \in \mathbb{Z}$ tq $f_2(x_1) = f_2(x_2)$

$$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \quad (\Rightarrow) \quad x_1^2 - x_2^2 = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$$

$\Rightarrow$ sauf s'ils sont nuls, 2 nombres opposés ne sont pas égaux !

$\Rightarrow f$ n'est pas injective.

(ou $f_2(1) = f_2(-1) = 1 \quad \rightarrow$ pas injective)

f_2 n'est pas surjective : $\forall y \in \mathbb{Z}, \nexists x \in \mathbb{Z}$

en effet, les nombres négatifs n'ont pas d'antécédent dans $\mathbb{Z}$

$$c) f_3 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ x \mapsto x-3$$

f_3 est injective. En effet, soit x_1 et $x_2 \in \mathbb{Z}$ tq $f_3(x_1) = f_3(x_2)$

$$\Rightarrow x_1 - 3 = x_2 - 3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\text{donc } f_3(x_1) = f_3(x_2) \quad (\Rightarrow) \quad x_1 = x_2$$

f_3 est surjective. En effet $\forall y \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{Z}$ tq $f(x) = y$

$$y = 2 \in \mathbb{Z} \rightarrow x - 3 = 2 \Rightarrow x = 5 \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ f_3 est bijective.

2.3.2 Définir l'application réciproque des bijections.

$$\text{a) } f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x$$

$$\text{e) } f_5 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3$$

$$\text{b) } f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x$$

$$\text{f) } f_6 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ x \mapsto x-3$$

$$\text{c) } f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x+3$$

$$\text{g) } f_7 : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\} \\ x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$$

$$\text{d) } f_4 : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^* \\ x \mapsto \frac{1}{x}$$

$$\text{h) } f_8 : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\} \\ x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{a) } f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x$$

$$\Rightarrow f_1^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x$$

$$\text{b) } f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x$$

La fonction réciproque s'obtient en résolvant l'équation :

$$f(x) = 3x = y \Rightarrow x = \frac{y}{3}$$

$$\Rightarrow f_2^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad f_2^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto \frac{y}{3} \quad x \mapsto \frac{x}{3}$$

$$\text{c) } f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x+3$$

$$\Rightarrow 2x+3 = y \Rightarrow 2x = y-3 \Rightarrow x = \frac{y-3}{2}$$

$$\Rightarrow f_3^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x-3}{2}$$

$$\text{d) } f_4 : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^* \\ x \mapsto \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = y \Rightarrow x = \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow f_4^{-1} : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^* \\ x \mapsto \frac{1}{x}$$

$$e) f_5 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^3$$

$$\Rightarrow x^3 = y \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$$

$$\Rightarrow f_5^r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt[3]{x}$$

$$f) f_6 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$x \mapsto x-3$$

$$\Rightarrow x-3 = y \Rightarrow x = y+3$$

$$\Rightarrow f_6^r : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$x \mapsto x+3$$

$$g) f_7 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+1}{x-1} = y \Rightarrow 2x+1 = y(x-1) = yx - y$$

$$\Rightarrow 2x - yx = -y - 1 \Rightarrow x(2-y) = -y-1$$

$$\Rightarrow x = \frac{-y-1}{2-y} = \frac{-(y+1)}{-(y-2)} = \frac{y+1}{y-2}$$

$$\Rightarrow f_7^r : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$$

$$h) f_8 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$$

$$\Rightarrow y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow x = \frac{y+1}{y-1}$$

$$\Rightarrow f_8^r : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$$

2.3.3 Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée pour que les fonctions suivantes soient des bijections. Puis donner leur réciproque.

a) $f(x) = x^2$

d) $f(x) = \cos(x)$

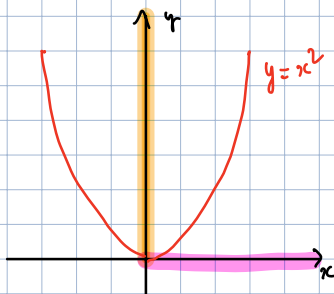
b) $f(x) = x^2 + x - 6$

e) $f(x) = \tan(x)$

c) $f(x) = -x^2 + 4x$

f) $f(x) = \sin(2x)$

a) $f(x) = x^2$



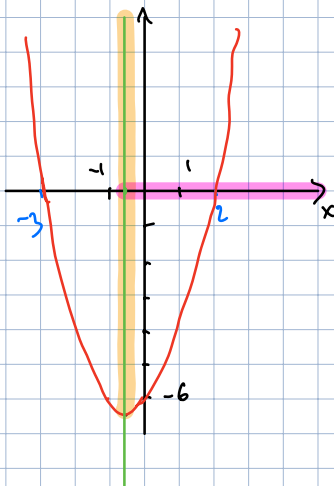
$$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \mapsto x^2$$

$$\Rightarrow f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

b) $f(x) = x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$



$$\text{Sommet : } S\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) = \left(-\frac{1}{2}; -6,25\right)$$

$$f: \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[\rightarrow \left[-\frac{25}{4}; +\infty\right[$$

=> chercher la réciproque !

$$y = x^2 + x - 6 \quad \left| +6 + \frac{1}{4} \right.$$

$$y + 6 + \frac{1}{4} = x^2 + x + \frac{1}{4}$$

$$y + \frac{25}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \text{Condition : } y + \frac{25}{4} \geq 0 \Rightarrow y \geq -\frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{y + \frac{25}{4}} = x + \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{y + \frac{25}{4}} - \frac{1}{2}$$

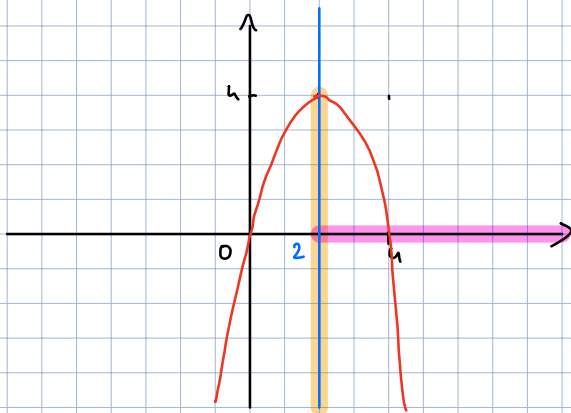
donc $f: \left[-\frac{25}{4}; +\infty\right[\rightarrow \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

$$x \mapsto \sqrt{x + \frac{25}{4}} - \frac{1}{2}$$

c) $f(x) = -x^2 + 4x$

Sommets $S\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) = \left(-\frac{4}{-2}; -4 + 8\right) = (2; 4)$

$f: [2; +\infty[\rightarrow]-\infty; 4]$



+ Sa réciproque:

$$y = -x^2 + 4x$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + y = 0$$

$$\Delta = 16 - 4y = 4(4 - y)$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{4-y}}{2} = 2 \pm \sqrt{4-y}$$

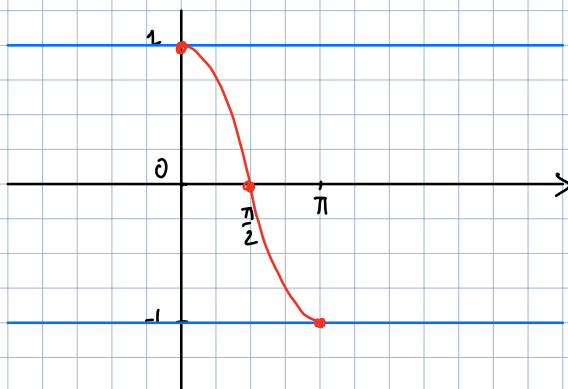
Donc $f:]-\infty; 4] \rightarrow [2; +\infty[$

$x \mapsto 2 + \sqrt{4-y}$

d) $f(x) = \cos(x)$

$f: [0; \pi[\rightarrow [-1; 1]$

$x \mapsto \cos(x)$



$f: [-1; 1] \rightarrow [0; \pi[$

$x \mapsto \arccos(x)$

$$e) \quad f(x) = \tan(x) \quad \begin{array}{l} f:]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \tan(x) \end{array}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\\ x \mapsto \arctan(x)$$

$$f) \quad f(x) = \sin(2x)$$

$$f: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1; 1] \\ x \mapsto \sin(2x)$$

$$f: [-1; 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{2}$$