

1.3.4 Déterminer dans chaque cas si les trois vecteurs sont coplanaires :

a) $\overset{\bar{a}'}{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \quad \overset{\bar{b}'}{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}} \quad \overset{\bar{c}'}{\begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}}$

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Rappel:

$\bar{a}', \bar{b}', \bar{c}'$ sont coplanaires : $\exists x, y \in \mathbb{R}$ tq :

$$x\bar{a}' + y\bar{b}' = \bar{c}'$$

a) $x \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \quad ; x, y \in \mathbb{R}$

$$= \begin{cases} 3x + 5y = 13 \\ 0x + y = 2 \\ -x + 4y = 7 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} 3x = 13 - 5y \\ y = 2 \\ -x + 4y = 7 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{13 - 10}{3} = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vérification : $-1 + 4 \cdot 2 = 7 \quad \checkmark$

Donc $\exists x = 1, y = 2$ tq :

$$1 \cdot \bar{a}' + 2 \bar{b}' = \bar{c}' \quad \Rightarrow \quad \bar{a}', \bar{b}' \text{ et } \bar{c}' \text{ sont coplanaires.}$$

* Autre méthode:

Rappel:

$\bar{a}', \bar{b}' \text{ et } \bar{c}'$ sont coplanaires $\Leftrightarrow \det(\bar{a}', \bar{b}', \bar{c}') = 0$

ici, on a le $\det(\bar{a}', \bar{b}', \bar{c}')$:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$ on va calculer ce déterminant et si il est égal à 0 $\Rightarrow$ ces 3 vecteurs sont coplanaires.

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & 2 \\ -6 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 5 & 13 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 5 & 13 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(1 \cdot 7 - 4 \cdot 2) - 0 - 1(5 \cdot 2 - 1 \cdot 13)$$

$$= 3(7 - 8) - 0 - 1(10 - 13)$$

$$= 3(-1) - 1(-3) = -3 + 3 = 0$$

$\Rightarrow \vec{a}', \vec{b}'$ et $\vec{c}'$ sont coplanaires.

$$b) \quad \vec{a}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}' = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\exists$ il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tq :

$$x \cdot \vec{a}' + y \cdot \vec{b}' = \vec{c}' \quad ; x, y \in \mathbb{R}$$

$$x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + 2y = -4 \\ 3x + y = -2 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot (-1) \\ \cdot (2) \\ \end{array}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} -2x + y = -2 \\ 2x + 4y = -8 \\ 3x + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = -10 \\ 3x + y = -2 \end{cases} = \begin{cases} y = -2 \\ x = \frac{-8 - 4y}{2} \\ 3x + y = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = \frac{-8 + 8}{2} = 0 \\ 3 \cdot 0 - 2 = -2 \quad \checkmark \end{cases} \quad \Rightarrow \exists x = 0, y = -2 \text{ tq :}$$

$$0 \cdot \vec{a}' - 2 \vec{b}' = \vec{c}'$$

$\Rightarrow \vec{a}', \vec{b}'$ et $\vec{c}'$ sont coplanaires.

Autre méthode:

$\vec{a}', \vec{b}'$ et $\vec{c}'$ sont coplanaires $\Leftrightarrow \det(\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}') = 0$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \\
 &= 2(2(-2) - 1(-4)) - ((-1)(-2) - 1 \cdot 2) + 3((-1)(-4) - 2 \cdot 2) \\
 &= 2(-4 + 4) - (2 - 2) + 3(4 - 4) = 0
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \vec{a}', \vec{b}'$ et $\vec{c}'$ sont coplanaires.

$$c) \vec{a}' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c}' = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\vec{a}', \vec{b}'$ et $\vec{c}'$ sont coplanaires $\Leftrightarrow \det(\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}') = 0$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & -11 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} &= 2(8 + 33) - (-1)(0 - 18) + 5(0 - 12) \\
 &= 82 - 18 - 60 = 4 \neq 0
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Les vecteurs ne sont pas coplanaires.

$$\begin{aligned}
 d) \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 5 \\ \frac{2}{3} & -\frac{3}{4} & -2 \\ -\frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} &= 1 \left(-\frac{3}{8} + 2 \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} - 5 \right) + \left(-\frac{1}{5} \right) \left(-1 + \frac{15}{4} \right) \\
 &= \frac{13}{8} + \frac{19}{6} - \frac{11}{12} = \frac{93}{24} = \frac{31}{8} \neq 0
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Les vecteurs ne sont pas coplanaires.