

## Équation du premier degré

Toute équation du premier degré d'inconnue  $x$  peut s'écrire sous la forme :

$$ax + b = 0 \quad (a \neq 0)$$

On résout une équation du premier degré en isolant l'inconnue dans l'un des membres de l'équation (à gauche ou à droite) à l'aide des principes d'équivalence.

### Rappel : Principes d'équivalence

- Deux équations sont dites équivalentes si elles possèdent exactement les mêmes solutions.
- Équations équivalentes

- $G = D \Leftrightarrow D = G$
- $G = D \Leftrightarrow G + E = D + E$
- $G = D \Leftrightarrow G \cdot K = D \cdot K, K \in \mathbb{R}^*$
- On obtient une équation équivalente si l'on réduit chacun des membres en respectant les règles du calcul littéral

\* Les solutions d'une équation sont les nombres qui, mis à la place de la lettre (ou des lettres), vérifient l'égalité.

$S$  désigne l'ensemble des solutions d'une équation.

## Rappel : Équation

Une équation est une égalité dont l'un ou les deux membres sont des expressions littérales.

$$\underbrace{x + 3,2}_{\text{Membre de gauche}} = \underbrace{10}_{\text{Membre de droite}}$$

égalité

- La variable que l'on souhaite expliciter est appelée l'inconnue
- Une solution d'une équation est une valeur de l'inconnue qui transforme l'équation en une égalité vraie
- Résoudre une équation consiste à trouver toutes ses solutions.

### \* Résolution d'une équation du premier degré :

2 règles de base :

- 1) On ne change pas une équation si l'on ajoute ou retranche un même nombre de chaque côté de l'égalité :

Exemple :

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= 5 & | -3 \\ \Leftrightarrow 2x + 3 - 3 &= 5 - 3 \\ \Leftrightarrow 2x &= 2 & | \div 2 \\ x &= 1 & \Rightarrow S = \{1\} \end{aligned}$$

2) On ne change pas une équation si l'on multiplie ou divise par un même nombre non nul chaque terme de l'équation.

Exemple:

$$\begin{array}{lcl} \text{i)} & 2x = 1 & | : 2 \\ & x = \frac{1}{2} & \Rightarrow S = \left\{ \frac{1}{2} \right\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{ii)} & 5x + 7 = -3 + 2x & | -2x - 7 \\ \Rightarrow & 5x - 2x + 7 - 7 = -3 + 2x - 2x - 7 & | \text{CL} \\ \Rightarrow & 3x & = -10 \quad | : (-10) \\ & x & = \frac{10}{3} \Rightarrow S = \left\{ -\frac{10}{3} \right\} \end{array}$$

\* Equation avec des parenthèses:

$$7(x+4) - 3(x+2) = 3(x-1) - (x+7)$$

On enlève les parenthèses:

$$\begin{array}{lcl} \Rightarrow & 7x + 28 - 3x - 6 & = 3x - 3 - x - 7 \quad | \text{CL} \\ \Rightarrow & 4x + 22 & = 2x - 10 \quad | -2x - 22 \\ \Rightarrow & 4x - 2x & = -22 - 40 \quad | \text{CL} \\ \Rightarrow & 2x & = -32 \quad | : 2 \\ & x & = -16 \Rightarrow S = \{-16\} \end{array}$$

\* Équation avec des fractions:

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{8} = x \quad | \cdot 24$$

On réduit au même dénominateur

$$24 \cdot \frac{2x}{3} + 24 \cdot \frac{1}{8} = 24x$$

$$(\Rightarrow) \quad 16x + 3 = 24x \quad | -24x - 3$$

$$(\Rightarrow) \quad -8x = -3 \quad | \div (-8)$$

$$x = \frac{-3}{-8} = \frac{3}{8} \Rightarrow S = \left\{ \frac{3}{8} \right\}$$

\* Équation avec l'égalité entre deux fractions:

$$\frac{x-3}{5} = \frac{4+5x}{3} \quad | \cdot 15$$

$$(\Rightarrow) \quad \frac{15(x-3)}{5} = \frac{15(4+5x)}{3} \quad | \text{CL}$$

$$(\Rightarrow) \quad 3(x-3) = 5(4+5x) \quad | \text{CL}$$

$$(\Rightarrow) \quad 3x - 9 = 20 + 25x \quad | -25x + 9$$

$$(\Rightarrow) \quad -22x = 10 + 9$$

$$(\Rightarrow) \quad -22x = 19 \quad | \div (-22)$$

$$x = \frac{-19}{22} \Rightarrow S = \left\{ -\frac{19}{22} \right\}$$

\* Équation avec des fractions et des parenthèses :

$$\frac{x+2}{3} - \frac{3(x-2)}{4} = \frac{-7x+2}{12} + 2 \quad | \cdot 12$$

$$(\Rightarrow) \frac{12(x+2)}{3} - \frac{12 \cdot 3(x-2)}{4} = \frac{12(-7x+2)}{12} + 2 \cdot 12 \quad | \text{CL}$$

$$(\Rightarrow) 4(x+2) - 9(x-2) = -7x+2 + 24 \quad | \text{CL}$$

$$(\Rightarrow) 4x+8 - 9x+18 = -7x+26 \quad | \text{CL}$$

$$(\Rightarrow) -5x+26 = -7x+26 \quad | +7x-26$$

$$(\Rightarrow) -5x+7x = 26-26$$

$$(\Rightarrow) 2x = 0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow S=\{0\}$$

3) Toute équation du premier degré peut s'écrire sous la forme :

$$ax = b$$

i) si  $a \neq 0$ , l'équation admet une unique solution :

$$x = \frac{b}{a} \Rightarrow S = \left\{ \frac{b}{a} \right\}$$

ii) si  $a = 0$  et  $b \neq 0$ , l'équation n'a pas de solution, donc

$$S = \emptyset$$

iii) si  $a = 0$  et si  $b = 0$ , tout  $x$  réel est solution, donc

$$S = \mathbb{R}$$

### Exemples:

$$\begin{array}{lcl} * & 2(x+4) + 1 - 5x = 3(1-x) + 7 & | \text{CL} \\ \Leftrightarrow & 2x + 8 + 1 - 5x = 3 - 3x + 7 & | \text{CL} \\ \Leftrightarrow & -3x + 9 = -3x + 10 & | +3x - 9 \\ \Leftrightarrow & -3x + 3x = 10 - 9 & \\ \Leftrightarrow & 0x = 1 \rightarrow \text{impossible} & \end{array}$$

$\Rightarrow S = \emptyset$  où  $\emptyset$  est le symbole de l'ensemble vide

$$\begin{array}{lcl} * & 3(2x+4) - 2x = 14 - 2(1-2x) & | \text{CL} \\ \Leftrightarrow & 6x + 12 - 2x = 14 - 2 + 4x & | \text{CL} \\ \Leftrightarrow & 4x + 12 = 4x + 12 & | -4x - 12 \\ \Leftrightarrow & 4x - 4x = 12 - 12 & \\ \Leftrightarrow & 0x = 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow$  est toujours vrai pour toutes les valeurs de  $x$  possibles.

$\Rightarrow$  Toutes les valeurs de l'ensemble des réels conviennent,

$$\Rightarrow S = \mathbb{R}$$

## Exercices

A) Résolve les équations suivantes:

$$1) \quad 3(x+3) = -4x + 37 \quad S = \{4\}$$

$$2) \quad -(x-6) = -4x - 3 \quad S = \{-3\}$$

$$3) \quad 5x - 1 = 3x + 1 \quad S = \{1\}$$

$$4) \quad 2x + 7 = 7 \quad S = \{0\}$$

$$5) \quad 3x + 6 = 3(x+3) \quad \Leftrightarrow 3x + 6 = 3x + 9 \quad \Leftrightarrow 0x = 3 \text{ impossible} \quad S = \emptyset$$

$$6) \quad 2x + \frac{8}{3} = \frac{3x}{2} \quad \Leftrightarrow 12x + 16 = 9x \quad \Leftrightarrow 12x - 9x = -16 \quad \Leftrightarrow 3x = -16 \quad \Leftrightarrow x = -\frac{16}{3} \\ \Rightarrow S = \left\{-\frac{16}{3}\right\}$$

$$7) \quad 2x + 6 = 2(x+3) \quad \Leftrightarrow 2x + 6 = 2x + 6 \quad \Leftrightarrow 2x - 2x = 6 - 6 \quad \Leftrightarrow 0x = 0$$

$$8) \quad 6x + 1 = 1x - 10 \quad \Leftrightarrow 6x - 1x = -11 \quad \Leftrightarrow 5x = -11 \quad \Leftrightarrow x = -\frac{11}{5} \quad \Rightarrow S = \left\{-\frac{11}{5}\right\}$$

$$9) \quad 2(3+x) + 4x = 6(x+1) \quad \Leftrightarrow 6 + 2x + 4x = 6x + 6 \quad \Leftrightarrow 6x - 6x = 6 - 6 \\ \Leftrightarrow 0x = 0 \quad \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$10) \quad 4(x+3) = 6(x+2) \quad \Leftrightarrow 4x + 12 = 6x + 12 \quad \Leftrightarrow 4x - 6x = 0 \quad \Leftrightarrow -2x = 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \quad \Rightarrow S = \{0\}$$

$$11) \quad 6x - 16 = 6x + 6 \quad \Leftrightarrow 6x - 6x = 6 + 16 \quad \Leftrightarrow 0x = 22 \quad \Rightarrow \text{impossible} \quad \Rightarrow S = \emptyset$$

$$12) \quad \frac{x}{4} + 5 = \frac{4x}{2} - 1 \quad \Leftrightarrow x + 20 = 8x - 4 \quad \Leftrightarrow -7x = -24 \quad \Leftrightarrow x = \frac{24}{7} \\ \Rightarrow S = \left\{\frac{24}{7}\right\}$$

$$13) \quad \frac{x}{5} = \frac{3}{8} \quad \Leftrightarrow 8x = 15 \quad \Rightarrow x = \frac{15}{8} \quad \Rightarrow S = \left\{\frac{15}{8}\right\}$$

$$14) \quad \frac{x+2}{2} = \frac{6}{3} \quad \Leftrightarrow 3(x+2) = 8 \quad \Leftrightarrow 3x + 6 = 8 \quad \Leftrightarrow 3x = 2 \\ \Rightarrow x = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

$$15) \quad \frac{5-x}{4} = \frac{x}{-3} \quad \Leftrightarrow \quad -3(5-x) = 4x \quad \Leftrightarrow \quad -15 + 3x = 4x \\ \Leftrightarrow \quad -x = 15 \quad \Leftrightarrow \quad x = -15 \quad \Leftrightarrow \quad S = \{-15\}$$

$$16) \quad \frac{2x+3}{3} = \frac{2-x}{5} \quad \Leftrightarrow \quad 5(2x+3) = 3(2-x) \quad \Leftrightarrow \quad 10x+15 = 6-3x \\ \Leftrightarrow \quad 13x = -9 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{9}{13} \quad \Leftrightarrow \quad S = \left\{-\frac{9}{13}\right\}$$

$$17) \quad \frac{5(x-2)}{8} + \frac{3(1-x)}{5} = \frac{2x+3}{10} \quad \Leftrightarrow \quad 25(x-2) + 24(1-x) = 4(2x+3) \\ \Leftrightarrow \quad 25x - 50 + 24 - 24x = 8x + 12 \\ \Leftrightarrow \quad x - 26 = 8x + 12 \quad \Leftrightarrow \quad -7x = 38 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{38}{7} \\ \Leftrightarrow \quad S = \left\{-\frac{38}{7}\right\}$$

$$18) \quad \frac{2+x}{2} - \frac{4x-3}{3} - 1 = -\frac{5x-12}{6} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{38}{7} \\ \Leftrightarrow \quad S = \left\{-\frac{38}{7}\right\}$$

$$19) \quad 2(x+4) + 1 - 5x = 3(1-x) + 7$$

$$20) \quad \frac{1}{4}(x+4) - \frac{1}{20}(x-60) = \frac{2}{5}(x+15)$$